

На правах рукописи

Анрианов Александр Львович

**ЗАРОЖДЕНИЕ И РАННЯЯ ИСТОРИЯ ЛИНЕЙНОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Специальность 07.00.10 – «История науки и техники» (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова Российской академии наук.

Научный руководитель:

Демидов Сергей Сергеевич, доктор физико-математических наук, заведующий Отделом истории физико-математических наук ФГБУН Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН

Официальные оппоненты:

Курсаев Анатолий Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, директор ФГБУН «Владикавказский научный центр» РАН

Зверкина Галина Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика – 1» Института управления и информационных технологий ФГБОУ ВО «Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II» (МИИТ)

Ведущая организация:

Институт информационных наук и технологии безопасности ФГБОУ ВО «Российский государственный гуманитарный университет» (ИИНТБ РГГУ)

Защита диссертации состоится 30 мая 2017 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.051.05 при ФГБУН Институте истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН по адресу: 125315, г. Москва, ул. Балтийская, д. 14, ком. 46.

С диссертацией можно ознакомиться в Дирекции Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН и на сайте института <http://www.ihst.ru>.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью учреждения, просим направлять учёному секретарю диссертационного совета по адресу: 125315, г. Москва, ул. Балтийская, д. 14; тел./факс 8(495)988-22-80.

Автореферат разослан « ____ » марта 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.051.05,
кандидат физико-математических наук

И. О. Лютер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования данной диссертации – история возникновения и последующего становления и развития линейного программирования (ЛП) в 1930–60-е гг. и влияния этого процесса на теоретические и прикладные разработки того времени. Предметом диссертационного исследования являются работы математиков СССР и США – Л. В. Канторовича, Дж. Б. Данцига, Дж. фон Неймана и некоторых других, связанные с областью ЛП. Главное внимание уделено научной деятельности первооткрывателя ЛП – Канторовича, работам его коллег, учеников и соавторов, а также деятельности основателя ЛП на Западе – Данцига и его коллег. Изучены поиск ими проблематики, их роли организаторов, руководителей и общественных деятелей, борьба за признание и продвижение собственных результатов, а также связи Данцига с другими учеными, прежде всего с Т. Купмансом и фон Нейманом, работавшими в близких областях и оказавшими значительное влияние как на его деятельность, так и на развитие ЛП в целом.

Также рассмотрены исследования Западных (Х. У. Куна, А. У. Таккера, В. Каруша и других) и Советских математиков (А. Ю. Левина, А. С. Немировского, Ю. Е. Нестерова, Л. Г. Хачияна, Л. А. Левина и других), развивающие и обобщающие ЛП и алгоритмы решения его задач.

Цель диссертации – анализ зарождения и ранней истории развития ЛП начиная с исследований по математике и экономике в XVIII в. и до работ по развитию ЛП и примыкающих направлений в работах учёных СССР и Запада, опубликованных до конца 1960-х гг., а также краткая характеристика дальнейшей эволюции алгоритмов решения данных задач; обобщение историко-научного материала для воссоздания целостной картины развития области и реакции научного сообщества на ее появление.

Актуальность темы исследования. Зарождение и развитие новых областей представляет собой одну из важнейших и интереснейших проблем истории математики. ЛП стало принципиально новой областью, получившей широкие применения и оказавшей огромное влияние на развитие экономики и самой математики. Однако историко-математическое осмысление этого феномена по существу ещё не начиналось. Предпосылки возникновения ЛП в различных странах, в рамках разных школ и традиций, влияние на эти процессы особенностей политической, социальной и экономической среды, в контексте которой приходилось работать, практически не изучены. Не стали объектом исторического анализа и взаимосвязи исследований отдельных авторов, связи их работ с другими работами по экономической математике и работами в других областях математики. Всё это приводит к недостаточно объективной оценке вклада отдельных учёных, отсутствию понимания их идейного взаимовлияния, и в итоге не позволяет воссоздать адекватную картину исторического процесса развития ЛП во всём многообразии

внутренних взаимосвязей и связей со смежными областями. Значимость ЛП для математических методов экономики, теории игр (ТИ) и некоторых других областей математики и отсутствие систематического анализа процессов возникновения и дальнейшего развития этой теории определяют актуальность избранной темы исследования.

Степень разработанности темы. Среди имеющихся источников, относящихся к описанию и анализу истории появления и эволюции ЛП и методов решения его задач, отметим нижеследующие труды, дающие картину разработанности данного вопроса.

В книге «Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый» (в двух томах 2002 и 2004 гг., редакторы-составители Л. В. Канторович, С. С. Кутателадзе, Я. И. Фет.) предпринята попытка пролить свет на жизненный путь Л. В. Канторовича, его труды и их воздействие на науку и социум, на борьбу ученого с невежеством и политическими предрассудками, которые слабо освещены в имеющейся литературе. Авторы собрали огромное количество материалов: документов, преимущественно принадлежащих архиву Л. В. Канторовича; интервью и воспоминаний; статей, созданных специально для публикации в этой книге, авторами которых стали коллеги и друзья Канторовича, а также участники описываемых событий. Выделим:

- взятое у Канторовича интервью Сони Брентъес;
- предполагавшийся доклад «Мой путь в науке» с обзором всех открытий Канторовича в математике и экономике;
- последнее интервью ученого «Смотреть на правду открытыми глазами» о этических вопросах принятия экономических решений и вообще роли, правах и обязанностях ученого при принятии решений и взаимодействии с властью и обществом;
- статью А. М. Вершика, рассказывающую не только об открытии новой области математики и работе ученого как наставника и организатора, но также о математической экономике как области математики;
- не опубликованные ранее и малоизвестные труды и выступления Канторовича 1937–57 гг. (дают представление, насколько активно, несмотря ни на что, он занимался продвижением и внедрением получаемых им результатов);
- Нобелевская лекция Канторовича;
- материалы, дающие представление, в атмосфере какой борьбы приходилось работать ученому в период получения им Сталинской и Ленинской премий, а также о признании его приоритета мировой общественностью.

В целом книга – великолепное произведение, охватывающее большую часть жизни Канторовича, дающее представление о нем как о человеке, гражданине, педагоге и ученом. Однако, она обходит стороной математическую сторону вопросов и ориентирована не на специалистов, а на широкий круг читателей. Кроме того, она, естественно, сконцентрирована на личности Канторовича.

Некоторые сведения о работах Канторовича, связанных с ЛП, оптимальных планировании и ценах можно найти во вступительной статье библиографического указателя¹.

Среди работ о Данциге отметим:

- статью² о его личности, но не о научной деятельности;
- работу³, демонстрирующая взгляд на историю появления ЛП, открытия симплекс-метода (СМ) и дальнейшее развитие и обобщения данных вопросов в работах ученых США; хотя в работе нет ни одной формулы, она дает представление, как взаимосвязаны пути творческого поиска основных действующих лиц в США (Е. Неймана, В. Леонтьева, Дж. фон Неймана, Т. Купманса, А. У. Таккера, Х. У. Куна и Д. Гейла), а также их результаты;
- статью⁴, посвященную жизни и научной деятельности Данцига, в которой удачно объединено описание жизни, творческих взглядов и принципов ученого с анализом научных достижений, их связи с деятельностью его коллег и друзей; приведено достаточное для представления о задействованном математическом аппарате количество математических формулировок и выкладок.

К числу хороших статей об истории ЛП или СМ относятся:

- статья Гейла⁵, концентрирующаяся исключительно вокруг ЛП и СМ, в которой упор сделан на математическую сторону вопроса;
- в предисловии к своей книге⁶ Данциг рассказывает об истоках и влияниях ЛП и СМ;
- работа Данцига⁷, где подробно затронута его докторская диссертация;

¹ Канторович Леонид Витальевич (1912–1986): Библиографический указатель / Ред. С. С. Кутателадзе. Авт. Вступ. Ст. С. С. Кутателадзе, В. Л. Макаров, И. В. Романовский и Г. Ш. Рубинштейн. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.

² Murray, W. Tributes to George Dantzig and Leonid Khachiyan. George Dantzig: A Personal Perspective // SIAG/OPT Views-and-News. A Forum for the SIAM Activity Group on Optimization. Vol. 16, N 1–2 October 2005.

³ Данциг, Дж. Б. Воспоминания о началах линейного программирования. Стэнфордский университет, факультет исследования операций, Стэнфорд, СА 94305, США.

⁴ Cottle, R., Johnson, E., Wets, R. George B. Dantzig (1914–2005) // Notices of the American Mathematical Society. V.54, N3, March 2007. P.344–362.

⁵ Gale, D. Linear Programming and the Simplex Method // Notices Of the American Mathematical Society. V.54, N.3. March 2007. – P.364–369.

⁶ Dantzig, G. B. Linear Programming and Extensions, Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1963.

⁷ Dantzig, G. B. Origins of the simplex method / S. G. Nash (Ed.). A History of Scientific Computing, – ACM Press, Reading, MA, 1990.

- статья Дорфмана⁸ об открытии ЛП проясняет влияния главных разработчиков ЛП и рассказывает о некоторых из существовавших до Данцига элементах ЛП;
- книга Дорфмана, Самуэльсона и Солоу⁹, построенная вокруг идеи раскрытия связи ЛП и стандартного экономического анализа;
- статья Прекопы¹⁰ о становлении ЛП и связях ранних исследований с задачами механики.

Среди прочих работ отметим:

- книгу Поляка¹¹, где в предисловии и введении дается краткий обзор интересующей нас темы, упомянуты главные советские и зарубежные исследователи ЛП, и приведен обширный библиографический материал;
- методические материалы по теории экстремальных задач и созданию функционального анализа из серии «История математики»¹²;
- сборник¹³, где представлена статья Г. Ш. Рубинштейна о работах ученых СССР по ЛП со сравнительным анализом некоторых представленных в них методов и кратким перечислением зарубежных ученых в области ЛП; в этот же сборник включена книга С. Вайда «Теория игр и линейное программирование», посвященная связи ТИ и ЛП.
- хорошее и интересное описание истории поиска полиномиального алгоритма для задачи ЛП (ЗЛП) дано в статье¹⁴.

Как видно, имеется весьма обширная литература разнородной формы и содержания: воспоминания и автобиографические труды, а также обзоры достижений. Однако, первые, как правило, фокусируются на деятельности преимущественно одного ученого, не показывая связей его научного поиска с

⁸ Dorfman, R. The discovery of linear programming // *Annals of the History of Computing* 6. 1984, P.283–295.

⁹ Dorfman, R., Samuelson, P. A., Solow, R. M. *Linear Programming and Economic Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1958.

¹⁰ Prekopa, A. On the development of Optimization Theory // *The Amer. Math. Monthly*. – 1980. – V. 87. – №7. – P.527–542.

¹¹ Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. - М.: Наука, 1983 – 384 с.

¹² Методические материалы для подготовки к экзамену по истории и философии науки (история математики) / Отв. Ред. И сост. С. С. Демидов. М.: Янус-К, 2003, С.14–40.

¹³ Линейные неравенства и смежные вопросы / Кун Г., Таккер А. (ред). Пер. под ред. Л. В. Канторовича и В. В. Новожилова. М., ИЛ, 1959. Приложение: С. Вайд «Теория игр и линейное программирование».

¹⁴ Tikhomirov, V.M. *The Evolution of Methods of Convex Optimization* / Ed. by Abe Shenitzer // *Mathematics*, York University, North York, Ontario M3J 1P3, Canada.

трудами других; кроме того, очень часто их текст носит описательный характер без деталей и не затрагивает математическую сторону вопросов. Обзоры же часто имеют краткий и избирательный характер, являясь разного рода введениями к монографиям, учебникам, переводам и сборникам, статьями в энциклопедиях, и вводными частями соответствующих глав трудов более общего характера, например, посвященных не только ЛП, но различным математическим методам оптимизации; их повествование, опять же, часто имеет описательный характер, без сравнительного анализа аналогичных работ различных ученых. В такого рода описаниях почти всегда игнорируется всё, за исключением математического аспекта, а всевозможные исторические, социальные, политические, культурные, личностные и прочие аспекты опускаются.

Резюмируя вышесказанное, становится очевидной актуальность исследования вопросов появления и последующего развития ЛП, объединяющего в себе анализ трудов различных авторов, имевших отношение к вопросам данной тематики, и, одновременно, изучение причин их появления, а также внутренних и внешних взаимосвязей как с точки зрения математики, так и с точки зрения различных исторических аспектов.

Исходя из высокой актуальности и недостаточной разработанности темы, для достижения поставленной цели данное исследование имеет следующие задачи.

Задачи исследования: выделение определяющих факторов, инициировавших развитие исследований по ЛП в эти годы; выделение основных факторов ускоренного развития области в 1930–60-е гг.; анализ основных проблем и направлений исследований в рассматриваемый период, а также важнейших результатов, полученных главными действующими лицами, связанными с этой областью исследований; выделение специфических черт деятельности каждого из них, обусловленных особенностями того исторического, политического, социального, экономического и научного контекста, в рамках которого их работы возникали; установление причин, позволивших привлечь к направлению большое внимание и добиться серьезных продвижений в теории и практике решения задач ЛП; анализ влияния ЛП на теоретические и прикладные разработки того времени, его связей с другими областями математики и взаимосвязей между исследованиями внутри области, а также зависимости этих исследований от предшествующей научной деятельности их авторов, их взглядов на развитие математики, экономики и науки в целом, а также на актуальность и принципы выбора тем научных исследований; выявление причин того, что именно эти учёные и именно в этот исторический момент обратились к данной теме; анализ деятельности по организации научных исследований, руководству работами и внедрению полученных достижений в практику.

Научная новизна работы. Впервые в историко-научной литературе проведено систематическое исследование процесса возникновения и развития ЛП – тех предпосылок, которые определили зарождение интереса к проблематике и стимулировали начало исследований, а также способствовали выработке методов исследования, основных путей развития теории в СССР и США в 1930–60-е гг. Впервые дан сравнительный анализ исследований в этой области советского математика Л.В. Канторовича, с одной стороны, и американских авторов (Данцига, Купманса и фон Неймана), с другой. Определён вклад и выявлена роль каждого из этих учёных при создании, развитии, продвижении и внедрении в практику ЛП и методов решения его задач.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты проведённого исследования могут быть использованы, во-первых, в обязательных и специальных курсах по ЛП и его истории, а также по истории и методологии математики, читаемых в высших учебных заведениях студентам математических и экономических специальностей, во-вторых, в дальнейших исследованиях как по общим вопросам истории математики, так и, в частности, по истории ЛП и математических методов в экономике.

Методология и методы исследования продиктованы его междисциплинарным характером. Для решения поставленных задач комбинировались методы историко-научного анализа трудов Канторовича, Данцига, фон Неймана и некоторых других авторов 1930–60-х гг. в контексте современной им математики (антикваристский подход) и с позиций математики сегодняшнего дня (презентистский подход).

На защиту выносятся следующие положения:

1. Общими предпосылками возникновения и успешного развития ЛП, его основных понятий, задач и методов их исследования, как в СССР, так и на Западе послужили:

– острая необходимость и инициированный ею со стороны соответствующих организаций запрос на решение определённого круга прикладных задач;

– атмосфера, установившаяся в мире в преддверии Второй мировой войны и лишь усугубившаяся в её ходе, а также на протяжении войны Холодной, оказавшая большое влияние на взгляды и приоритеты, определившие выбор тематики научных исследований создателями ЛП, подкреплённая необходимостью решения задач оборонного характера;

– традиции научной деятельности и творческих принципов Петербургской–Ленинградской математической школы, ярким представителем которой явился Канторович, для которой характерна практическая направленность исследований, базирующихся на мощном теоретическом фундаменте;

- мировоззрение и опирающиеся на него приоритеты и интересы Канторовича и Данцига, определявшие их выбор тем и методов исследований;
- предшествовавшая профессиональная карьера и имевшиеся на тот момент должностные связи и обязанности основных авторов – Канторовича и Данцига.

2. Причинами, приведшими Канторовича, Данцига и фон Неймана к задачам ЛП и способствовавшими дальнейшим их успехам в разработке этой дисциплины стали:

- наличие у Канторовича, Данцига и фон Неймана богатого опыта и идей, приобретенных в процессе предыдущей научной деятельности, которые непосредственно подсказали пути, на которых будет найден метод для успешного решения ЗЛП;

- проявленная Данцигом способность быстро образовать круг единомышленников, поддержавших его идеи и внесших значительный вклад в их развитие и доработку;

- интересы влиятельных правительственных и деловых кругов, позволившие Данцигу получить сильную финансовую и административную поддержку для развития, внедрения и продвижения разрабатываемых им методов;

- поддержка работ по ЛП Канторовича крупнейшими советскими математиками, позволившая продолжать исследования в этой области несмотря на неоднозначную реакцию к этому направлению со стороны влиятельных кругов научного сообщества (в особенности представителей экономической науки) и не простую политическую обстановку.

3. Крупные достижения, полученные в области ЛП, были обусловлены:

- широким кругозором, опытом и выдающимся талантом Канторовича и Данцига;

- их выдающимися организаторскими способностями;

- активным использованием теоретических результатов в приложениях;

- начавшимся бурным развитием вычислительной техники и разработкой соответствующих математических методов моделирования и решения прикладных задач.

4. История создания и развития ЛП предлагает замечательный пример того как методы, порожденные по запросу одной науки (экономики), в рамках другой науки (математики) смогли оказать значительное влияние не только на первую (экономику), но и на последнюю (математику), примером чему служит полное решение проблемы Г. Монжа, полученное Канторовичем на основе открытых им ранее методов ЛП.

5. В силу особенностей исторической и политической ситуации в мире на протяжении всего XX в. к сходным, а иногда и одинаковым идеям, задачам и методам приходили ученые как из разных систем и научных школ (о чем свидетельствует анализ достижений в СССР и США), так иногда даже и внутри

одной страны и даже ведомства (примером чему могут служить исследования Каруша, а затем Куна и Таккера в США и алгоритмы Левина и Немировского в СССР).

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты доложены на Годичных научных конференциях Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН, проходивших в 2008, 2009, 2010, 2011 гг.; на Общемосковском научно-исследовательском семинаре по истории и методологии математики и механики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова в марте 2009 и 2010 гг., апреле 2011 г. и марте 2012 г.; на заседании сектора истории математики Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН 20 октября 2009 г.; на VIII Международном Конгрессе по математическому анализу ISAAC 22–27 августа 2011 г. в Москве.

Публикации: результаты диссертации опубликованы в 9 работах общим объемом 4,8 п.л., в том числе в трёх статьях в изданиях из перечня ВАК, а также материалах VIII Международного Конгресса по математическому анализу ISAAC 22–27 августа 2011 г. в Москве.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографии и двух приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается новизна и актуальность выбранной темы, определяются цели и задачи, которые ставил перед собой исследователь, характеризуются использованные методы исследования, формулируются основные результаты диссертации, обсуждаются возможности их использования, дано краткое содержание работы.

ГЛАВА 1.

1.1. Идеи Л. В. Канторовича в контексте экономических исследований советских ученых первой половины XX в. Показывается связь работ Канторовича по экономико-математическим методам с трудами других исследователей – предшественников и современников, показываются особенности научного контекста, в рамках которого происходили исследования Канторовича: в 1910–20-х гг. уже были попытки применения методов математического и статистического анализа для решения задач экономики: труды Е. Е. Слуцкого и А. А. Конюса по моделям потребления; исследования Г. А. Фельдмана по моделям роста; труды Н. Д. Кондратьева по «длинным циклам»; в ЦСУ СССР были выполнены работы по шахматному балансовому анализу экономики; работы Л. Юшкова, где выдвинута идея сформулировать оптимальные подходы к понятию норматива эффективности, которая впоследствии получила чрезвычайно плодотворное развитие в творчестве В. В. Новожилова.

Подробно изучаются и сравниваются методы исследований Слуцкого, Новожилова, Леонтьева. Описаны работы М. Г. Крейна, результаты которого находят применение в решении задач оптимального управления систем с распределенными параметрами и ряде вопросов ЛП стационарных процессов.

1.2. Математические предпосылки возникновения линейного программирования. Показывается, что исследования, относящиеся к ЛП, полиэдрам и системам линейных неравенств (СЛН) самим по себе, являются взглядами с разных сторон (оптимизация, геометрия и алгебра, соответственно) на одни и те же вопросы, что было замечено еще Ж. Б. Фурье. В силу этого в качестве предыстории ЛП рассматриваются важнейшие результаты во всех этих областях. Показывается, что основными вехами раннего развития ЛП можно назвать следующие: метод Фурье для СЛН; принцип Лагранжа для решения оптимальных задач с ограничениями типа равенств и его развитие для случая с ограничениями неравенствами; теорема Фаркаша–Минковского о зависимых неравенствах; брошюра Канторовича 1939 г.; представленные в конце 1940 гг. СМ Данцига и двойственность Неймана.

Показано, как исследования конца XVIII в. многомерных задач поиска экстремума, возникшее при работе над решением СЛН задач теоретической механики и принципа виртуальных скоростей (теория Лагранжа – Ж. Лагранж, Фурье, К. Гаусс, М. В. Остроградский), оказались полезны в экономике. Так Остроградскому удалось дать доказательство утверждения (названного впоследствии леммой Фаркаша) для частной ситуации: в предположении о линейной независимости неравенств. Экономист А. О. Курно, тоже обращался к вопросу ограничений неравенств в механике и также получил для частного случая некоторое «механическое доказательство» леммы Фаркаша.

Достаточно подробно рассматриваются исследования Ж. Б. Фурье, который близко подошел к ЛП и фактически предвосхитил формулировку ЗЛП. Он был первым, кто рассмотрел (применительно к равновесию в механике) случай ограничений неравенств и даже описал алгоритм, созданный с целью отыскания минимума величины, являющейся одной из трех координат точки, которая по условию рассматриваемой им задачи должна лежать внутри полиэдра. Этот алгоритм с рядом допущений можно считать упрощенным вариантом СМ.

Показано, что в исследованиях Фурье совмещаются три подхода – оптимизации, геометрии и алгебры (связываются воедино задачи минимизации, полиэдров и СЛН). Фурье дал способ решения произвольных СЛН путем последовательного исключения неизвестных, который сейчас называется методом исключения Фурье-Моцкина.

Показано, что исследования, связанные с чебышёвским приближением (нахождение точки, наименее уклоняющейся по модулю от системы плоскостей), занимают важное место в вопросе появления идей, на которые опирается СМ. Данная задача эквивалентна ЗЛП определенного вида.

Показана связь геометрической теории полиэдров и двойственности, что дает выход в теорию СЛУ.

Прослеживается взаимное влияние ЛП, СЛН, выпуклых множеств, теории чисел (работы П. Гордана, Дж. Фаркаша, Г. Минковского, Г. Вейля, Г. Ф. Вороного, А. Хаара).

1.3. О математическом творчестве Л. В. Канторовича конца 1920-х и 1930-х годов. Подробно изучено творчество Л. В. Канторовича конца 1920-х и 1930-х гг. – работы по дескриптивной теории функций, теории множеств, конструктивной теории функций, теории приближений, вариационным методам, по приближённым методам применительно к конформному отображению близких областей.

Подробно рассмотрены работы Канторовича по функциональному анализу – обобщенные функции, введение в функциональный анализ полуупорядоченных пространств - пространств, наделённых определённым образом согласованными векторной и порядковой структурами, которые стали объектом активных изысканий как в СССР, так и за рубежом.

Показано, как исследования Канторовича по функциональному анализу позже развились (уже после войны) в такие новые подобласти, как «доказательные вычисления» (методы, которые, исходя из разрешимости приближенного уравнения, отвечают на вопрос о существовании точного решения исходной задачи и позволяют определить область, где оно лежит) и K -пространства (пространства Канторовича).

ГЛАВА 2 содержит анализ ранних работ Канторовича.

2.1. О начале творчества Л. В. Канторовича в области экономики. Показано, как влияние политической обстановки (назревала война) на фоне давнего интереса к экономике привело Канторовича в 1938 г. к исследованиям вопросов линейной оптимизации. Толчком послужила поставленная перед ученым прикладная задача оптимальной загрузки станков фанерного треста.

Показано, как Канторович пришел к обобщению на другие экономические проблемы предложенного им математического подхода к максимизации функции при многих ограничениях (метода разрешающих множителей), и продемонстрирована важность алгоритмичности метода и осознанного автором содержательного экономического значения используемых в нем технических средств – множителей. Данные исследования оформились в знаменитой работе «Математические методы организации и планирования производства» 1939 г., по существу, описывающей метод, идейно близкий к СМ.

Приведены основные типы задач ЛП, сформулированные и решенные Канторовичем, и их важнейшие применения.

Показано, что ценность этой первой публикации на тему ЛП с математической точки зрения состоит в изложенном в ней методе решения задачи на экстремум, выходящем за рамки классического математического

анализа, описания применения математических методов для организации производства на конкретных примерах, постановкой основных задач ЛП и демонстрацией его важнейших применений на примере девяти экономических задач с описанием метода их решения. В дальнейшем метод был развит на экстремальные задачи с ограничениями в функциональных пространствах как в линейном, так и нелинейном случаях.

Показано, что идеи, изложенные в указанной работе, и сам метод разрешающих множителей являются предтечей созданного Данцигом СМ, и концепции двойственности в ЛП, которая оформилась позднее в работах Данцига и книге фон Неймана.

2.2. Экономические исследования Л. В. Канторовича в довоенные годы. Показано, как из работы Канторовича 1939 г. вытекают исследования математических методов экономики, появляется наиболее общая математическая трактовка предложенного Канторовичем вариационного принципа и метода разрешающих множителей, общая формулировка условий экстремума при наличии ограничений в бесконечномерном пространстве, а также постановка и решение ставшей классической транспортной задачи, получившей далее бесконечномерный аналог.

2.3. Исследования Л. В. Канторовича довоенных лет и современная наука. В этом разделе показано, как от классической постановки задач на условный экстремум и с ограничениями только типа равенств (в качестве аппарата для их решения использовалось правило множителей Лагранжа), с объектами, удовлетворяющими условиям гладкости, наметился переход к рассмотрению выпуклых экстремальных задач с системой неравенств (первые работы по экстремальным задачам с ограничениями общего вида появились только в конце 30-х – начале 40-х гг. XX в.).

Показана эволюция перехода к рассмотрению выпуклых экстремальных задач с системой неравенств: изучение собственно систем неравенств в отрыве от задач минимизации – Фурье, Минковский, Вейль; далее – исследования Чикагской школы – Г. Блисс, О. Больца, Е. Макшейн, Л. М. Грейвс, М. Р. Хестенс и др.; исследования Ф. Валентайна 1937 г. по условиям экстремума для задач вариационного исчисления при наличии разного рода ограничений типа неравенств; работы Каруша, исследовавшего гладкие конечномерные задачи минимизации с общими ограничениями и пришедшего в 1939 г. к условиям экстремума I и II порядков, и Ф. Джона, который исследовал экстремальные проблемы в геометрии и получил сходные результаты.

Показано, что в СССР пионером в этой области был Канторович, первая работа которого по этой тематике вышла в 1939 г. и содержала постановку задачи минимизации линейной функции на множестве, задаваемом линейными ограничениями типа равенств и неравенств; в 1940 г. появилась его заметка, содержащая общую формулировку условий экстремума при наличии

ограничений в бесконечномерном пространстве, то есть постановка и решение общего вида задач данного класса.

Показано, что в США к этим вопросам приходят значительно позднее, в конце 1940-х гг. (Данциг и, частично, фон Нейман, а позднее – Гейл, Кун, Таккер).

Показано родство этих задач с задачами оптимального управления (Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и Р. В. Гамкрелидзе, сформулировавших и доказавших необходимые условия оптимальности в форме так называемого принципа максимума); сходными вопросами занимался так же Р. Беллман; цикл работ А. Я. Дубовицкого и А. А. Милютина, Б. Н. Пшеничного, Л. Нейштадта, Г. Халкина, Дж. Варги и др., в которых были предложены общие схемы получения условий экстремума для абстрактных задач оптимизации с ограничениями, позволяющие охватить и теорему Куна–Таккера, и принцип максимума; в исследованиях Р. Рокафеллара получил завершённую форму выпуклый анализ, оказавшийся исключительно удобным аппаратом исследования экстремальных задач.

Показана заслуга Канторовича в том, что он нашел единый подход к очень широкому классу задач математической экономики, базирующийся на идеях функционального анализа и вскрывающий идейную суть вопроса. Это давало и базу для численных методов решений. Оказалось, что вместо дискретных экономических проблем гораздо эффективнее использовать родственные им непрерывные континуальные модели. Такова, например, модель развития (роста) при техническом прогрессе с вменёнными основными фондами (Р. Солоу, Л. В. Канторович), которая описывается функциональным уравнением, в свою очередь хорошо поддающаяся не только общему теоретическому анализу, но и практическому расчету. Канторович разработал общую теорию методов приближенных вычислений (демонстрируются различные варианты применения функционального анализа для изучения проблем вычислительной математики), основываясь на следующей идее: пространство, в котором задано исходное уравнение, отображается на более простое пространство, а уже в этом более простом пространстве ведется исследование приближенного уравнения. Канторович доказал достаточно общие теоремы, дающие возможность установить разрешимость приближенного уравнения, а также сходимость приближенного решения к точному решению в зависимости от свойств исходного уравнения. Также Канторович получил ряд результатов, которые позволяют на основе разрешимости приближенного уравнения устанавливать существование точного решения исходной задачи и даже определять область его расположения. Канторович создал теорию K -пространств, которая является одним из основных его достижений в функциональном анализе (применительно к экономике этот подход оказался полезен при агрегировании экономических систем – появляется возможность понижения размерности и исследования

близости приближенного решения к искомому). Канторович обобщил теорему Хана–Банаха на случай продолжения мажорируемых линейных операторов со значениями в K -пространстве (теперь это Теорема Хана–Банаха–Канторовича), что оказалось ценным для разных приложений.

Показана заслуга Канторовича в решении общей транспортной задачи и нахождении более полного решения проблемы Монжа (на основе методов ЛП). Таким образом, показано, как математические методы, рожденные в качестве ответа на запрос со стороны экономики, пройдя некоторый путь развития, оказались способными дать сильный толчок для развития других, не связанных с ними напрямую, областей чистой математики и позволили решить давние чисто математические задачи, подойдя к ним с новой стороны.

2.4. Результаты работ довоенных лет с современной точки зрения.

Показано на основе работ Канторовича, что достаточно общая экстремальная задача эквивалентна основной ЗЛП. Ее можно также сформулировать следующим образом: задано выпуклое многогранное множество M и направленная прямая (ось) B . Тогда прямая задача звучит так: найти точку из M , лежащую на оси B и притом, как можно выше. А двойственная задача – так: найти гиперплоскость, пересекающую ось B как можно ниже и разделяющую M и положительную часть оси B .

Для этой задачи, которую можно трактовать как задачу об экстремуме линейных форм, связанных линейными соотношениями и ограничениями, или как задачу о нахождении максимума вогнутой кусочно-линейной функции на выпуклом множестве, найдены необходимые и достаточные условия оптимальности решения, основанные на существовании в максимальной точке (в «пространстве продукции») опорной гиперплоскости, коэффициенты которой (разрешающие множители) есть решение двойственной задачи. То есть, дана характеристика оптимального решения через двойственные переменные (разрешающие множители), но в этом знании нет необходимости – достаточно использовать свойство опорной гиперплоскости.

На основании необходимых и достаточных условий были получены методы решения. Эти конечные процессы, названные методами разрешающих множителей, по своей эффективности и универсальности не уступают разработанным позже методам, например, СМ. Метод корректировки множителей, входящий в эту группу методов, совпадает, по существу, с методами одновременного решения прямой и двойственной задач. Он ближе всего к разработанному в 1957 г. методу Данцига–Форда–Фулкерсона.

В 1940 г. издана статья Канторовича – чисто математическая версия работы, выраженная в терминах функционального анализа и алгебры.

Для транспортной задачи разработана эффективная модификация метода разрешающих множителей – метод потенциалов, распространенный позже под названием метода последовательного улучшения плана на другие задачи. Он наиболее близок к модифицированному СМ. Также дан критерий

оптимальности решения, поставлены более общие задачи. В 1942 г. дан абстрактный вариант с бесконечномерными обобщениями задачи и методов ее решения.

ГЛАВА 3. Проанализированы исследования Канторовича в области математических методов экономики, последовавшие за опубликованными в книге «Математические методы организации и планирования производства», вышедшей в 1939 г.

Эти исследования можно разделить на две группы: те, которые были ориентированы на практическое применение и носили более частный характер, и те, которые имели большее теоретическое значение, не относясь к конкретным экономическим примерам.

3.1. Применение линейного программирования к частным задачам.

Проанализированы работы чисто прикладного характера:

- работа, содержащая решение задачи сочетания максимальной эффективности распиловки деревоматериалов с получением заданного ассортимента продукции, работа, содержащая анализ задач о наиболее эффективных перевозках грузов и алгоритмы решения этих задач в виде метода потенциалов;
- работа о применении ЛП к вопросу рационального раскроя материалов, в которой даны новые приемы решения задач ЛП и на этой базе – подробный анализ проблем экономии материала при раскрое;
- работа, разъясняющая связи ЛП с оптимальным решением задач оперативно-производственного планирования.

3.2. Методы и их применение к математическим проблемам. Показано присущее творчеству Канторовича взаимопроникновение прикладных и теоретических исследований (в том числе – и в экономико-математической тематике).

3.3. Признание вклада Л.В. Канторовича в экономическую науку. Показан вклад Канторовича в функциональный анализ и ЛП и связь функционального анализа с прикладными задачами.

Показано, что, несмотря на сопротивление ортодоксов от науки, заслуги Канторовича были постепенно признаны во всех областях: 1948 г. – сталинская премия за работы по функциональному анализу, 1964 г. – избрание действительным членом Академии наук по Отделению математики, 1965 г. – Ленинская премия за работы экономической тематики, 1975 г. – Нобелевская премия совместно с Купмансом «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». О признании роли и приоритета Канторовича в развитии ЛП говорят многочисленные почетные степени и звания в наиболее уважаемых организациях всего мира.

3.4. Полное решение проблемы Монжа на основе линейного программирования. Здесь автором показано очень интересное явление: ситуация, когда у метода, разработанного с целью решения достаточно конкретной практической задачи, сфера применения оказалась намного больше,

чем первоначально планировавшаяся; и, более того, метод оказался в состоянии оказать влияние на область чистой математики посредством демонстрации совершенно нового (и значительно более простого, чем ранее) способа решения классических математических задач, которые были сформулированы несколькими столетиями ранее. Речь идет о ЛП и его связи с полным решением известной проблемы Монжа, имеющей более чем 200-летнюю историю. Проблема имела решение, но оно было весьма сложным и основывалось на сложных теоремах из вариационного исчисления. Однако, ЛП дало доказательство гипотезы (причём для более широкого класса задач перемещения масс) в виде простого следствия признака оптимальности перемещения, разработанного Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным в связи с решением транспортной задачи и обобщённого затем Канторовичем. Эта задача в терминах непрерывных распределений масс стала называться задачей Монжа-Канторовича.

Автором показано, как с помощью анализа связей Транспортной задачи и Задачи перемещения масс с задачей Монжа на базе ЛП получается решение проблемы Монжа в качестве простого следствия.

Бесконечномерный аналог (обобщение) для транспортной задачи изучался впервые в 1942 г. Канторовичем и затем получил обобщение, рассматривающее общую проблему оптимального перемещения массы в компактном метрическом пространстве.

Задача решается на произвольном метрическом компакте K с метрикой $r(t, s)$, которая характеризует затраты, связанные с перемещением единицы массы из любого пункта t , принадлежащего компакту K , в любой пункт s , принадлежащий компакту K .

Минимальное перемещение может быть characterized (с помощью свойства существования особого потенциала для такого перемещения) на основе теоремы, доказанной Канторовичем и опубликованной в 1942 г.: для того чтобы перемещение Ψ_0 было минимальным, необходимо и достаточно, чтобы она была потенциалом. Формулировка в терминах непрерывного распределения массы стала называться «Задача Монжа-Канторовича».

Задача перемещения массы может быть получена (и была исследована Канторовичем) как обобщение рассмотренных ранее практических задач по нахождению способа подключения пункта производства товара, расположенного на железнодорожной сети, к местам потребления этих товаров таким образом, чтобы обеспечить минимальные общие затраты на транспортировку этих товаров. Очевидно, что Транспортная задача есть частный случай общей проблемы.

Только через некоторое время после выхода в свет этого исследования Канторович заметил, что эта же общая проблема сдержит, как частный случай, еще одну важную проблему, которая гораздо раньше была исследована

Монжем в работе о «разрезании и заполнении». И вышеупомянутая теорема может быть с успехом применена для ее анализа.

ГЛАВА 4. В настоящем разделе подробно изучаются биография Данцига и его научные работы, его влияние на науку, промышленность, систему образования и пр.

Показывается, что несмотря на то, что Данциг известен прежде всего, как создатель ЛП и СМ, которые оказали большое влияние как на науку, так и на повседневное применение в практических решениях, что выдвинули Данцига в число наиболее значимых математиков XX в., воспринимать Данцига надо и как многостороннего исследователя, организатора, человека, постоянно ведущего преподавательскую деятельность, человека, оказавшего большое влияние на военное и индустриальное планирование и производство, экономику, математику, исследование операций (ИО), теорию вычислительных машин, различные области прикладной науки и технологии.

4.1. Творческий путь Дж. Данцига. Показывается, как уже в начале обучения и после окончания университета Данциг проявлял как характер, так и серьезные способности.

Прослеживается, как Данциг включается в военные исследования, где добивается серьезных результатов – признание его заслуг военными ведомствами, написание множества статей на темы: ЛП и различные варианты СМ, крупномасштабное ЛП, ЛП в условиях неопределенности, сетевая оптимизация, включая задачу коммивояжера, целочисленное ЛП и многообразные приложения. Затем – работа в Калифорнийском университете (Беркли) на должности профессора в Департаменте промышленного производства; потом участие в Программе по ИО в Департаменте теории вычислительных машин и систем в Стэнфордском университете.

4.2. Линейное программирование и симплекс метод. Показано, что несмотря на большое количество предшественников (Канторович, Купманс, Хичкок, Фулкерсон, Монгенштерном, Моцкин), чьи исследования потенциально могли вдохновить Данцига на его открытие, совсем не их работы стали отправной точкой для его исследований. Изначально Данциг ничего не знал об этих трудах; катализатором для его бурной исследовательской деятельности стала работа Леонтьева по структуре американской экономики. Наибольшее впечатление на Данцига произвело именно использование Леонтьевым эмпирической, а не чисто формальной, модели, а также организационный талант Леонтьева, который решал ряд сложных вопросов, связанных с добыванием данных для своего исследования, а потом «торговал» результатами своей исследовательской деятельности.

Показана важность взаимодействия Данцига с Купмансом, фон Нейманом, Таккером, Куном, Гейлом и другими учеными.

Демонстрируется глубокая связь роли Данцига в процессе открытия ЛП и создания СМ с историко-политическим контекстом, в котором надо особенно отметить значимость влияния Холодной войны и начала компьютерного века.

Показывается, что именно работа Данцига стала тем решающим моментом, после которого ЛП получило широкое признание, а созданный Данцигом СМ приобрел свою огромную популярность, и что произошло это благодаря прозрачности предложенной геометрической иллюстрации: Данциг показал, что, когда мы рассматриваем полиэдральное множество допустимых решений ЗЛП, СМ является алгоритмом перехода от одной вершины выпуклого многогранника к новой, в результате которого мы приходим к вершине, означающей решение поставленной задачи, при этом направленный перебор вершин представлен в форме достаточно удобного для осуществления алгоритма.

Проанализировано, как выбор Данцига в пользу должности математического руководителя патентного ведомства военно-воздушных сил США повлиял на дальнейшие успехи в разработке им ЛП. При этом Данцигом была создана линейная математическая модель, отражающая, какие запасы были доступны и какой выпуск был необходим в течение многопериодного временного промежутка. Такие условия в большинстве случаев приводят к недоопределённой системе, даже если на переменные накладывается дополнительное условие, согласно которому они должны принимать только неотрицательные значения, так как интерпретируются как физические количества. Для выделения «наилучшего» решения, Данциг предложил линейную целевую функцию, и именно эту линейную величину необходимо минимизировать или максимизировать. Именно введение целевой функции стало инновацией в области планирования и тем самым достижением, которым Данциг чрезвычайно гордился.

Показана плодотворная деятельность Данцига по продвижению ЛП и СМ, работ по их расширению, плодотворное участие в многочисленных симпозиумах, конференциях, комитетах, подготовка докторантов и пр.; разработки математических моделей и методов для нахождения решения практических задач, а также их внедрения в промышленную практику, чрезвычайно важное влияние на дальнейшее развитие науки в целом, вычислительные машины и разработку методов нахождения решения крупномасштабных линейных программ.

4.3. Организаторская и преподавательская деятельность. Показано, что Данциг всё время исключительно активно поддерживал студентов, коллег, оказывая им свою полную поддержку; проявлял основной интерес в области построения моделей, которые окажут воздействие на выработку тактики в областях, которые принесут значительную пользу обществу в глобальном масштабе; принимал активное участие в деятельности Международного института по анализу прикладных систем (International Institute of Applied

Systems Analysis), чья главная миссия – проведение междисциплинарных научных исследований разнообразных вопросов (окружающей среды, экономики, технологии, социальных проблем) с точки зрения глобальных изменений. Им было учреждено множество научных журналов; при его содействии в учебные программы были включены курсы ЛП и ИО.

Показано математическое влияние деятельности Данцига: специалисты-практики самого широкого диапазона различных сфер увидели потенциал использования моделей ЛП благодаря тому, что отныне такие модели появлялись уже не сами по себе в отрыве от практики, а шли вместе с достаточно эффективным методом решения. В математических кругах такое положение дел послужило переломным моментом, стимулировав и вдохновив математиков и ученых, проводящих исследования в области теории вычислительных систем, вплотную приступить к изучению до того момента, по существу, незатронутого класса задач, причем не только с вычислительной, но и с теоретической позиции.

Показаны перемены на теоретическом фронте: вместо классической структуры для анализа, по существу ограничивавшей круг рассматриваемых функций и отображений определенными на открытых множествах или дифференцируемых многообразиях, возникла новая парадигма, которая оказалась в состоянии работать с функциями, которые не обязательно дифференцируемы или даже непрерывны и чьи области определения могут быть замкнутыми множествами или многообразиями, которые, в лучшем случае, соответствуют условиям ограничения Липшица на поведение приращения функции. Это повлекло за собой новые представления о (суб)производных, которые вполне могут быть эффективно использованы для того, чтобы характеризовать особые точки в ситуациях, когда классический анализ не способствует пониманию. Это породило принципиально новую теорию приближений, в которой поточечные пределы заменены пределами множеств; они вышли на сцену по причине врожденной односторонней (асимметричной) природы математических объектов, лежащих в области исследования. Для теории целых функционалов также были даны некоторые серьезные математические основания, и был достигнут существенный прогресс в решении задач, над которыми ученые ломали голову на протяжении очень долгого времени.

ГЛАВА 5. Данная глава посвящена Теореме Каруша-Куна-Таккера, исследованиям Фон Неймана и описанию алгоритмов, имевших большее значение для развития ЛП в целом.

5.1. Обзор развития линейного программирования с точки зрения математики. Подведен промежуточный итог, позволяющий увидеть общую картину развития ЛП и результатов этого прогресса. Дан взгляд на ЗЛП через теорию экстремума, СЛН, геометрию полиэдров.

ЗЛП принадлежит классу экстремальных задач, которые изучает математический анализ, и одновременно к классу выпуклых задач, исследованием которых занимается выпуклый анализ, ставший самостоятельной областью в XX в. В силу природы изучаемых выпуклым анализом объектов, он одновременно относится как к геометрии (выпуклость – понятие геометрическое), так и к анализу (так как относится к теории СЛН). Постепенно выпуклый анализ получил своё обобщение на случай бесконечномерных линейных топологических пространств, однако все наиболее важные факты относятся к конечномерному пространству, а главные результаты имеют содержательную интерпретацию в двумерном случае.

Сквозной для всей теории выпуклости является идея, оформившаяся в виде принципа двойственности выпуклых объектов, заключающаяся в том, что у всех выпуклых замкнутых объектов есть два описания – в основном и двойственном пространствах.

Проанализирован вклад основных действующих лиц при создании теории двойственности: Минковского и фон Неймана, а также (в геометрии и бесконечномерном анализе) Кэли, Плюккерера, Банаха, Шварца, Гротендика и др. В рамках выпуклого анализа исследуются такие объекты, как выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи (ЗЛП – частный случай последних).

Показана важность для ЛП теорем, описывающих системы линейных неравенств, среди которых центральное место занимают теоремы Фаркаша-Минковского о зависимых неравенствах, двойственного представления многогранников и условия ограниченности многогранника.

Показаны проявления двойственности (для конусов, многогранников, полиэдров, замкнутых выпуклых функций) и роль неравенств в теории выпуклости, принцип Лагранжа для экстремальных задач, а также взгляд на ЛП как подкласс экстремальных задач (с точки зрения проблем существования, необходимых и достаточных условий экстремума, а также алгоритмов его поиска).

5.2. Фон Нейман, теория игр и ее связи с линейным программированием. Проанализирован вклад фон Неймана, Данцига, а также Гейла, Куна и Таккера в изучение минимакса матриц и его связи с двойственностью ЛП. Дан сравнительный анализ путей развития ТИ и ЛП и раскрывается связь между ними.

5.3. Теорема Каруша – Куна – Таккера, принцип Лагранжа; нелинейное программирование. При исследовании ЗЛП появлялись всё новые подходы, формируя целостную картину. Одним из них стал подход с позиций выпуклого анализа, который в общей форме формулирует задачу математического программирования и признаки оптимальности решения, раскрывая при этом связи с двойственной задачей и её решением, что имеет большое значение для понимания и экономической интерпретации результатов.

Проанализированы разработки в ранний период расширения ЛП в области нелинейной оптимизации Куном и Таккером, представившими совместную работу «Нелинейное программирование» в 1951 г., которая дает необходимые условия оптимальности для задачи минимизации (возможно) нелинейной целевой функции в условиях ограничений в виде (возможно) нелинейных неравенств. Результат является наследником так называемого метода множителей Лагранжа. Подобная теорема (условие оптимальности) была ранее получена Джоном и опубликована в 1948 г. Эти условия оптимальности называются условиями Каруша–Куна–Таккера в знак признания практически одинакового результата, представленного в (неопубликованной) магистерской диссертации Каруша 1939 г.

Проведен анализ значения работы Каруша, показано использование доказанной в ней теоремы для раскрытия смысла принципа двойственности в выпуклом программировании. Справедливо сказать, что она стала фундаментальным для нелинейного программирования достижением, которое позднее получило обобщение в работах Джона, Куна и Таккера.

Дан взгляд на двойственность в выпуклом программировании через пространства в двойственности и преобразование Лежандра, а также подход к ЗЛП (как к частному случаю) с этих же позиций.

5.4. Основные алгоритмы, разработанных для линейного программирования. Дан анализ вклада учёных СССР (Левина, Хачияна, Д. Б. Юдина, Немировского, Нестерова, Левина) и США (Н. Кармаркара, С. Кука, Р. М. Карпа, В. Кли, Г. Минти) в развитие ЛП и изучение не только теоретического, но и практического решения данных вопросов и, конечно, развитие и исследование соответствующих алгоритмов. Дан обзор наиболее важных алгоритмов, разработанных для решения ЗЛП, но оказавших значительное влияние также и на развития математики в целом. Показано, как шел процесс осознания и принятия этих достижений мировой общественностью.

5.5. Экономическая интерпретация задач линейного программирования. Дана интерпретация ЗЛП как производственной (прямая задача – поиск экстремального состояния при данных ресурсах и заданном ассортименте конечной продукции) и экономической (двойственная задача – поиск при данном конечном задании результата с наименьшими затратами ресурсов) задач.

Описана модель Вальраса экономического равновесия и проанализировано, как она может быть доработана путем перехода от ограничений равенств к ограничениям неравенствам и добавления условия вида дополняющей нежесткости, что позволяет решить проблемы, связанные с ситуациями, когда: либо система уравнений переопределена и вообще не имеет решения, либо решение существует, однако малосодержательно с точки зрения

экономической интерпретации в силу того, что часть переменных оказывается отрицательными. Дано описание дальнейшего обобщения модели.

Рассмотрена модель роста фон Неймана, которая тоже опирается на СЛН и дополняющую нежесткость. В ней также проявляется двойственность (цен и интенсивностей производства). Показано, что справедливо можно говорить о том, что доказанные фон Нейманом при исследовании модели утверждения включают в себя теорему двойственности для ЗЛП с положительными коэффициентами.

Показана роль, которые сыграли транспортные задачи, которые можно назвать одними из первых проблем ИО. Также справедливо будет сказать, что на пути поиска решения данных проблем в работах Канторовича, Хитчкока и Купманса появлялось ЛП, развивался и обогащался его аппарат. Сказано о роли Купманса в этой области.

Проанализирован предложенный Канторовичем способ, принципиальным образом опирающийся на двойственность: он основан на нахождении разрешающих множителей (двойственных переменных), также Канторович показал значение разрешающих множителей для исследования чувствительности решения, а также продемонстрировал путь, посредством которого можно показать оптимальность допустимого решения прямой задачи через установление оптимальных значений для двойственных переменных.

Разобрана работа Хитчкока 1941 г., где он доказал, что решение должно лежать в вершине допустимой области и дал путь его поиска во многом схожий с СМ.

В **Заключении** подводятся итоги проведенного исследования и приводятся полученные выводы.

В **Приложении 1** даны некоторые математические сведения, необходимые для понимания основного текста.

В **Приложении 2** приведено интервью, взятое автором у академика А. Г. Аганбегяна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итогом данного исследования является проведенный анализ и полученная на его основе более целостная картина процесса зарождения, формирования и развития ЛП, включая его истоки, работы основных авторов, их взаимосвязи, связи с их предшествующими трудами, а также различными исследованиями в смежных областях. Прослежены взаимовлияния математических идей, значение исторического, политического и прочих контекстов для исследований в ЛП, а также влияние ЛП на экономику (ради решения задач которой, оно появилось), математику, промышленность и некоторые другие сферы (например, вычислительные системы).

Наибольший научный интерес в качестве дальнейших направлений исследования представляют следующие. Во-первых, сопоставление эффективности и практической значимости методов, предлагавшихся в различные временные периоды в трудах разных ученых. Дело в том, что конкурирующие подходы и идеи развивались не всегда одинаковыми темпами, часто (например, методы внутренней точки) определенные идеи появлялись, становились популярны, затем исследования затихали, а некоторое время спустя начинались с новой силой. Определенный вклад в популярность и эффективность конкурирующих подходов вносило развитие вычислительной техники, идущее параллельным курсом и часто меняющее расстановку сил. Кроме того, в силу огромного размера рассматриваемых задач, часто приходится иметь дело с асимптотическими оценками (причем, иногда наихудшего случая, а в других ситуациях некоторого среднего в смысле какого-то распределения). А в дополнение к этому размер и специфика самих задач могут вносить существенный вклад в сравнение методов и изменение баланса их сил (что наблюдается при сравнении методов внутренней точки с их конкурентами, идущими к оптимальному решению по границе допустимого множества).

Другим важным продолжением исследования, представленного в данной работе, может являться расширение хронологических рамок и рассмотрение более поздних работ.

Результаты исследования опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Андрианов А.Л. Л. В. Канторович как создатель линейного программирования // Вопросы истории естествознания и техники. №4, М., 2009, С.77–89;

2. Андрианов А.Л. Дж.Б. Данциг и линейное программирование // Казанская наука. №8 2014г. – Казань: Изд-во Казанский Издательский Дом, 2014. С.19–23.

3. Андрианов А.Л. Краткий очерк эволюции ранних методов линейного программирования // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер. «Естественные и Технические науки» №1, М., 2017, С.23–28.

и в других изданиях:

4. Андрианов А.Л. Рождение линейного программирования // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2008. – М.: ИДЭЛ, 2009. – С.260–262.

5. Андрианов А.Л. Развитие линейного программирования в ранних работах Л.В.Канторовича // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 13 (48). –М.: «Янус-К», 2009. – С.323–339.

6. Андрианов А.Л. Линейное программирование в работах Л.В. Канторовича 1930–1950-х гг. // Институт истории естествознания и техники им.

С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2009. – М.: «Анонс Медиа», 2009. – С.323–325.

7. Андрианов А.Л. Джордж Б.Данциг и история линейного программирования (ЛП) в США // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2011. – М.: «Янус-К», 2011. – С.315–318.

8. *Andrianov A.* The full Monge problem solution based on the linear programming (LP) // Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation (22–27 August 2011) V.3. – М.: Peoples' Friendship University of Russia, 2012. – P.94–101.

9. Андрианов А.Л. Развитие линейного программирования в работах Л. В. Канторовича 1930–50-х гг. // Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 15 (50). М, «Янус-К», 2014. – С.25–40.