ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ
им. С.И. Вавилова РАН

На правах рукописи

Андрианов Александр Львович

ЗАРОЖДЕНИЕ И РАННЯЯ ИСТОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Специальность 07.00.10 – История науки и техники

диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: **доктор физико-математических наук**
Демидов Сергей Сергеевич

Москва – 2017

Оглавление

Введение

Зарождение и развитие новых областей математической науки представляет собой одну из важнейших и интереснейших проблем истории математики. ЛП стало принципиально новой областью математической науки, получившей широкие применения и оказавшей огромное влияние как на развитие экономической науки, так и самой математики. Однако историко-математическое осмысление этого феномена по существу ещё не начиналось.

Сложность изучения этого вопроса объясняется, наряду с прочими, следующим фактором. Несмотря на то, что появление области линейного программирования, а также методов для решения рассматриваемых в ней задач, связываются в первую очередь, и вполне обоснованно, с именами таких ученых, как Л. В. Канторович, Т. Купманс и Дж. Б. Данциг, тем не менее, они не являются первыми исследователями, которые занимались этими вопросами. И хотя, насколько нам известно, эти ученые не были знакомы с деятельностью своих предшественников, исследования последних представляют большой интерес с точки зрения истории развития математики, связанной с данным вопросом. Также в контексте обсуждения сложности изучаемого вопроса необходимо заметить, что как исследования, относящиеся непосредственно к линейному программированию (ЛП), так и работы, изучающие полиэдры и линейные неравенства сами по себе, – все эти труды можно считать имеющими прямое отношение к интересующему нас предмету, в силу того, что эти три области являются ни чем иным, как взглядами с разных сторон (со стороны оптимизации, геометрии и алгебры, соответственно) на одни и те же вопросы. В силу этого в качестве предыстории ЛП необходимо рассматривать важнейшие результаты во всех этих областях.

И все же, полученные в исследованиях трех вышеперечисленных ученых (к именам которых также вполне справедливо можно добавить Дж. фон Неймана (John von Neumann)) результаты можно считать определенным прорывом в данной области, после совершения которого как развитие качественной теории, так и методов для решения рассматриваемых в ее рамках вопросов, а также деятельность, направленную на практическое применение и внедрение этих методов, приобрели совершенно другой характер и размах, нежели были прежде. С этой точки зрения момент совершения названными учеными их основных открытий в области ЛП можно считать переломным для развития последней, в связи с чем их деятельность заслуживает особого рассмотрения. Причем не только их исследования по темам научных проблем, лежащих в рамках интересующей нас области ЛП или даже более обще – вопросов оптимизации, – но и их научная деятельность в предшествующие этому этапы также требует пристального изучения: во многих случаях именно она сыграла значительную роль в определении позиций, с которых ученые подходили к вопросам оптимизации, каким багажом и кругозором обладали, а также (что является совсем немаловажным в мире современных научных исследований) какими связями и кругом общения они к этому моменту уже обладали. Последнее сыграло большую роль как в самый первый момент, когда интерес к этой тематике со стороны авторов будущих знаменитых открытий только зарождался, так и в процессе дальнейшего поиска методов решения поставленных вопросов, их последующего обсуждения, совершенствования, обобщения, развития и продвижения в научных и производственных кругах.

Рассматривая вопрос об истории зарождения и последующего развития такой области математики как ЛП, исследователь невольно отмечает следующую ситуацию. Даже при первоначальном взгляде становится очевидным, что на данную тему имеется весьма обширная литература, весьма разнородная по своей форме и содержанию.

Среди источников, которые имеют непосредственное отношение к предмету диссертации, имеются как разнообразные воспоминания и автобиографические труды, авторами которых являются ученые, имена которых напрямую связаны с появлением и разработкой вопросов этого направления, так и всякого рода обзоры основных достижений, связанных с рассматриваемой предметной областью.

Первые появлялись как по собственной инициативе авторов, так и писались на заказ, а также в качестве речей, вступлений и специальных статей, приуроченных к различным мероприятиям по случаю юбилеев как самого ЛП или СМ для его решения, так и авторов, причастных к этим открытиям. Однако, как правило, большинство трудов этого рода отличаются тем, что в качестве объекта своего описания авторы выбирают творческую деятельность преимущественно одного какого-нибудь ученого, не показывая связей его научного поиска с трудами других. Кроме того, очень часто текст, представленный в рамках этих материалов, носит преимущественно описательный характер, и авторы не вдаются в анализ деталей, а также не затрагивают математическую сторону излагаемых ими вопросов.

Что же касается обзоров основных достижений, то последние часто имеют весьма краткий и, соответственно, не полный, а избирательный характер, и представляют собой разного рода введения к монографиям, учебникам, переводам, сборникам статей, статьи в энциклопедических словарях, а также вводные части перед соответствующими главами в трудах, имеющих более общий характер, например, посвященных не только ЛП, но вместе с ним различным математическим методам оптимизации.

Опять же в соответствии с целью, стоящей перед их авторами, повествование часто имеет описательный характер, без сравнительного анализа аналогичных работ различных ученых. В такого рода описаниях почти всегда игнорируется всё, за исключением математического аспекта описываемых ими достижений; в результате чего всевозможные исторические, социальные, политические, культурные, личностные и прочие аспекты не только оказываются не охваченными полностью, но и, как правило, вообще, игнорируются.

Резюмируя все вышесказанное, становится очевидной актуальность исследования вопросов, связанных с появлением и последующим развитием ЛП, объединяющего в себе анализ трудов различных авторов, имевших отношение к вопросам данной тематики, и, одновременно, изучение причин их появления, а также внутренних и внешних взаимосвязей как с точки зрения математики, так и с точки зрения различных исторических аспектов.

Актуальность темы исследования. Развитие новых областей науки – одна из важнейших проблем. ЛП стало новый новой областью, которая не только стала широко использоваться в приложениях, но и оказала сильнейшее воздействие на развитие экономики и самой математики. Тем не менее, можно сказать, что осмысление этого явления только начинается. Предпосылки возникновения ЛП в различных странах, в рамках разных школ и традиций, влияние на эти процессы особенностей политической, социальной и экономической среды, в контексте которой приходилось работать авторам, практически не изучены. Существуют обширные источники по исследуемому вопросу, однако, в большинстве из них не стали объектом исторического анализа взаимосвязи исследований отдельных учёных, имевших непосредственное отношение к данной области, связи их работ с другими работами по экономической математике, а также с работами в других областях математики. Всё это приводит к недостаточно объективной оценке вклада отдельных учёных, отсутствию понимания взаимовлияния их идей, и, в итоге, не позволяет воссоздать адекватную картину исторического процесса развития ЛП в целом, во всём многообразии внутренних взаимосвязей и связей со смежными областями. Значимость ЛП для математических методов экономики, теории игр и некоторых других областей математики и отсутствие систематического анализа процессов возникновения и дальнейшего развития этой теории определяют актуальность избранной темы исследования.

Степень разработанности темы. Возвращаясь к вопросу об имеющихся на данный момент источниках, относящихся к описанию или анализу истории появления и эволюции ЛП и методов для решения формулируемых им задач, остановимся на нижеследующих трудах, дающих на наш взгляд картину разработанности данного вопроса в литературе.

Во-первых, следует отметить книгу «Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый» состоящую из двух томов, редакторами-составителями которой стали Л. В. Канторович, С. С. Кутателадзе и Я. И. Фет. Первый том книги [72] вышел в 2002 г., а следующий [73] появился двумя годами позже, в 2004 г. В этом труде была предпринята попытка пролить свет на жизненный путь Л. В. Канторовича, его труды и произведенное ими на науку и социум воздействие, на все трудности борьбы ученого с невежеством и политическими предрассудками, которые, по мнению авторов этого труда (и здесь с ними сложно не согласиться), очень слабо освещены в имеющейся литературе. В связи с этим «*в предлагаемой читателям книге собраны материалы, характеризующие личность ученого, широту его научных интересов и масштаб достижений, сложные и бескомпромиссные взаимоотношения с академическим и общественным окружением*». Этот труд основывается на огромном количестве архивных материалов (преимущественно принадлежащих архиву Л. В. Канторовича, который находится в Академии народного хозяйства при Правительстве Российской Федерации), устных интервью и воспоминаний, а также статьях, созданных специально для публикации в этой книге, авторами которых стали коллеги, друзья Канторовича, а также участники описываемых событий.

В первом томе книги имеются четыре части. В первой части опубликованы автобиография и рассказы Л. В. Канторовича о себе. Среди последних необходимо особенно выделить ответы на вопросы в интервью «Об истории линейного программирования», заданные ему Сони Брентьес, а также текст предполагавшегося доклада Л. В. Канторовича в Московском математическом обществе «Мой путь в науке», написанный в 1986 г. и представляющий исключительно интересный и полезный обзор всех сделанных Л. В. Канторовичем за его долгую и плодотворную научную карьеру открытий как в математике, так и в экономике (он также вышел в переводе: [192]). Также очень интересен текст последнего интервью с выдающимся ученым «Смотреть на правду открытыми глазами», дающим представление о взгляде ученого на этические вопросы, связанные с принятием экономических решений в вообще на роль, обязанности и права ученого во время принятия им решений и доведения их результатов до руководящих политиков и общества.

Во второй части собраны воспоминания о Л. В. Канторовиче, авторами которых стали его друзья и коллеги. Среди них особого внимания заслуживает статья А. М. Вершика «О Л. В. Канторовиче и о линейном программировании», написанная в 2001 г. специально для данного сборника, в которой автор не только рассказывает об открытии новой для математики области и работе ученого в качестве наставника и организатора, но также говорит о математической экономике как области математики и о некоторых ее связях с другими разделами математики.

В третей части – не опубликованные до этого и малоизвестные труды и выступления самого Леонида Витальевича. Все они относятся к промежутку времени от 1937 до 1957 г. – в то время большинство его трудов по экономической тематике не публиковались. Собранные в этой части материалы позволяют получить представление о том, насколько активно, несмотря ни на что, ученый занимался продвижением и внедрением получаемых им результатов в практическую народно-хозяйственную экономическую деятельность.

В четверной части представлены матераиалы, относящиеся к получению Леонидом Витальевичем Нобелевской премии за 1975 г. Среди последних наибольший интерес представляют лекция лауреата «Математика в экономике: достижения, трудности, преспективы», прочитанная им в 1975 г. в Стокгольме в Шведской академии наук в связи с присуждением ему Нобелевской премии.

Что касается второго тома, то (помимо представленной в первой части автобиографии, написанной в 1975 г.) во второй части находятся также не опубликованные до этого и малоизвестные труды и выступления самого Леонида Витальевича, но уже более позднего – сибирского – периода его жизненного пути, датируемые годами с 1954 по 1986. Третья часть посвящена разнообразным письмам, отзывам, выпискам, отчетам, запискам и рецензиям, характеризующим различные труды и деятельность Л. В. Канторовича. Кроме того, в этом же томе в четвертой и пятой частях находятся материалы, дающие представление относительно того, как и в какой атмосфере ученому приходилось работать в период получения им двух крупнейших наград в СССР – Сталинской и Ленинской премий. Из собранных в этих главах документов становится ясно, насколько ожесточенные споры приходилось вести ученному в тот временной период. Шестая часть проливает свет на то, как шло признание приоритета Канторовича мировой общественностью. В седьмой части мы находим материалы, связанные с присуждением Леониду Витальевичу разнообразных почетных степеней и званий, а в восьмой – переписку ученого со своими коллегами со всего мира.

В целом книга «Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый» является великолепным произведением, охватывающим большую часть жизни и деятельности Канторовича, и дает представление о нем как о человеке, гражданине, внимательном педагоге и превосходном ученом. Однако, эта книга обходит стороной все то, что касается математической стороны изучавшихся им вопросов и ориентирована не на специалистов в области экономики или математики, а на широкий круг читателей. Кроме того, в соответствии с названием, она, естественно, сконцентрирована на личности Леонида Витальевича.

Некоторые сведения относительно работ Канторовича, связанных с областью ЛП, оптимального планирования и оптимальных цен, экономическими проблемами планирования (а также достижениями ученого в других областях математики) можно найти во вступительной статье С. С. Кутателадзе, В. Л. Макарова, И. В. Романовского и Г. Ш. Рубинштейна в библиографическом указателе [60].

К работам о Дж. Б. Данцига, дающим представление больше о его личности и особенностях отношения к жизни и людям, нежели о его научной деятельности, можно отнести статью [220]. Очень интересной является работа [16], демонстрирующая взгляд на историю появления ЛП, открытия СМ для решения рассматриваемых в его рамках задач, а также на дальнейшее развитие и обобщения данных вопросов в работах ученых в США. Несмотря на то, что в этой работе нет ни одной формулы, она дает представление о том, как были взаимосвязаны пути творческого поиска основных действующих лиц в США (Е. Неймана, Леонтьева, фон Неймана, Купманса, Таккера, Х. Куна и Д. Гейла), причастных к интересующей нас теме, а также о связи между результатами их деятельности.

Среди весьма примечательных работ о Дж. Б. Данциге необходимо отметить статью [122], посвященную его жизни и научной деятельности. В ней авторам удалось достаточно удачным образом объединить описание жизни, творческих взглядов и принципов ученого с хорошим анализом полученных им научных достижений, их взаимного отношения с деятельностью его коллег и друзей, а также дать представление о том, как проходило общение всех действующих лиц, участвовавших в этом научном поиске. В данной статье также присутствует достаточное количество математических формулировок и выкладок, позволяющее получить некоторое представление относительно математического аппарата, задействованного при решении рассматриваемых вопросов.

Еще одна интересная статья [179], концентрирующаяся исключительно вокруг ЛП и СМ, автором которой, кстати, является один из важных действующих лиц рассматриваемой нами истории – Д. Гейл, также заслуживает упоминания. В ней, в отличие от [122], упор сделан на математическую сторону вопроса, хотя и нить, связанная с темой истории вопроса, также проходит сквозь ее повествование.

В [133] Дж. Данциг дает отдельный исторический рассказ об истоках (и влияниях) ЛП и СМ. Почти двадцатью годами позже, когда он приблизился к возрасту семидесяти лет, Данциг начал писать многочисленные заказные статьи [130, 132, 137, 139, 140, 141] (см. электронную версию одной из них: [15]) на эту тему, большинство из которых имели автобиографический оттенок. С математической точки зрения, наверное, нет работы лучше, чем [137], которая, в отличии от остальных, подробно затрагивает часть докторской диссертации Данцига, касающуюся ЛП.

Данциг не был единственным, кто писал об открытии ЛП. Одна из наиболее содержательных статей по этому предмету – статья Роберта Дорфмана (Robert Dorfman) [160], профессора экономики из Гарварда, где он проясняет «*роли основных действующих лиц*»: «*это не такая особенно запутанная история, как истории научных открытий бывают, но она также и не полностью прямая*». Эти его вступительные замечания предназначены для того, чтобы навести на мысль, что многие элементы ЛП уже существовали до их независимого открытия Данцигом в 1947 г.

Также в 1958 г. была опубликована книга Дорфмана, Самуэльсона (Samuelson) и Солоу (Solow) *«Linear Programming and Economic Analysis»* [161]. Эта книга, построенная вокруг идеи раскрытия связи ЛП и стандартного экономического анализа, стала основой многих университетских курсов. Ее предисловие провозглашает, что «*линейное программирование было одним из наиболее важных послевоенных результатов в экономической теории*». Авторы подчеркивают взаимосвязь ЛП с ТИ фон Неймана, с экономикой благосостояния и с равновесием Вальраса (Walrasian). К. Эрроу (K. Arrow) в [109] дает проекцию на роль Данцига в развитии экономического анализа.

В книге Ж. П. Обена (J. P. Aubin) [83] приводится краткая история использования математики при решении экономических задач. Описываются основные экономические модели (Леона Вальраса, Дж. фон Неймана). Также, несомненно, заслуживает внимание статья А.Прекопы [231] о том, как происходило становление НЛП и ЛП. Она проливает свет на связь ранних исследований с задачами механики.

Интересна книга Б. Т. Поляка [84], где в предисловии и введении дается краткий обзор по интересующей нас теме, упомянуты главные советские и зарубежные исследователи ЛП. Книга включает обширный библиографический материал – 247 работ.

В серии «История математики» изданы методические материалы по теории экстремальных задач и созданию функционального анализа, которые, также являющиеся предметом данного исследования [77].

Двухтомная монография известного нидерладского математика Александра Схрейвера [89] посвящена новым (на тот момент) эффегтивным алгоритмам решения задач ЛП и целочисленного программирования. Автор детально и всесторонне рассматривает их с позиций теории сложности вычислений и возможности использования методов ЛП в дискретной оптимизации. Схрейвер использует материал журнальных статей, посвященных новым перспективным методам ЛП, однако также приводит исторические справки. Книга в основном теоретическая, но во втором томе приводятся также и алгоритмы для практических рассчетов. Эта книга отличается обширным библиографическим материалом по каждой главе отдельно. Благодаря детальному изложению, включаюшему определение всех используемых понятий, монография может и сегодня представлять интерес как специалистам по ЛП, так и студентам старших курсов ВУЗов.

Систематическое изложение вопроса наилучшим образом представлено в сборнике «Линейное программирование и смежные вопросы» под редакцией Г. У. Куна (H.W. Kuhn) и А. У. Таккера. (A.W. Tukker) [75], приложение к которой включает работу С. Вайда «Теория игр и линейное программирование». В предисловии к русскому изданию сборника отмечается вклад советских ученых в развитие ЛП. Книга представляет собой сборник из 18 статей по теории СЛН, объединенных одной темой – теорией СЛН в приложении к экономическим моделям, рассматриваемым с математической точки зрения.

Статьи сборника схематически разбиваются на три категории:

1) детальное изложение основных математических результатов, служащих базой для приложений (5 статей);

2) математические вопросы при развитии экономических теорий и использование теоремы двойственности ЛП;

3) исследование отдельных экономических моделей.

В Добавлении представлена статья Г.Ш. Рубинштейна [87] о работах ученых СССР по ЛП (и сравнительный анализ представленных в них методов). Рассмотренны задачи, где использовались методы ЛП: транспортная, загрузки оборудования, распределение затрат между отдельными видами продукции при комплексном ее выпуске, рациональный раскрой промышленных материалов, выбор оптимальных вариантов технологии, оценка эффективности новой техники, распределение посевной площади между различными культурами и другие. В небольшом подразделе перечислены зарубежные ученые, работающие в области ЛП.

Оценим включенную в издание книгу Вайда «Теория игр и линейное программирование» с позиций её значения для рассматривамой в диссертации темы. Книга посвящена связи ТИ и ЛП. От читателей требуются элементарные знания по алгебре и линейной аналитической геометрии. Дается краткий очерк ТИ: для введения терминалогии рассматривается *игра с нулевой суммой* и *стратегические игры* (игры Блотто). Для описания игры автор использует ее представление в виде *таблицы* или *матрицы выигрышей*, а также наглядные графические модели. Рассматриваются возможные процессы графического нахождения оптимальных стратегий. Для получения общих результатов автор в главе III переходит к алгебраическому исследованию ТИ, дает определение минимакса, указывает на связь ТИ с ЛП. В главе IV С. Вайд приводит краткий очерк ЛП, где рассматривает ряд практических задач и вводит определения типов решения задачи, которые показывают, что умение решать задачу ЛП оказывается полезным в самых различных вопросах, кратко излагается суть СМ, основные черты которого в главе VI излагаются алгебраическими средствами. Главы V и X, VII и VIII посвящены, соответственно, геометрической интерпретации ЛП, вырождению и другим усложнениям, двойственному и обычному СМ.

Хорошее и интересное описание истории поиска полиномиального алгоритма для ЗЛП дано в [246].

Целью диссертации является анализ зарождения и ранней истории развития теории ЛП начиная с исследований по математике и экономике в XVIII в. и до работ по развитию ЛП и примыкающих направлений в работах учёных в СССР и на Западе, опубликованных до конца 60-х гг. XX в., а также краткая характеристика дальнейшей эволюции алгоритмов решения данных задач; выявление ролей советского математика Л.В. Канторовича, американского математика Дж.Б. Данцига и некоторых других исследователей как основных разработчиков ЛП; обобщение историко-научного материала для воссоздания целостной картины развития этой области; выделение основных факторов её ускоренного развития в 1930–1960-е гг.; установление причин, позволивших привлечь к направлению большое внимание, добиться серьезных продвижений в теории и практике решения задач ЛП; выявление причин того, что именно эти учёные и именно в этот исторический момент обратились к данной теме; выделение специфических черт деятельности каждого из них, обусловленных особенностями исторической, политической, социальной и экономической среды.

Анализ влияния ЛП на теоретические и прикладные разработки того времени, его связей с другими областями математики и взаимосвязей между исследованиями, а также зависимости этих исследований от предшествующей научной деятельности их авторов; анализ деятельности по организации научных исследований, выбору проблематики, руководству работами и внедрению полученных достижений в практику; описание деятельности основных исследователей и результатов по рассматриваемой проблеме.

Научная новизна работы. Впервые в историко-научной литературе проведено систематическое исследование процесса возникновения и развития ЛП – тех предпосылок, которые определили зарождение интереса к проблематике и стимулировали начало исследований, а также способствовали выработке методов исследования, основных путей развития теории в СССР и США в 30–60-ых гг. XX в. Впервые дан сравнительный анализ исследований в этой области советского математика Л.В. Канторовича, с одной стороны, и американских авторов (Дж. Б. Данцига, Т. Ч. Купманса и Дж. фон Неймана), с другой. Определён вклад и выявлена роль каждого из этих учёных при создании, развитии, продвижении и внедрении в практику ЛП и методов решения его задач.

Хронологические рамки. Рассмотрено исторически развитие идей и методов, связанных с вопросами ЛП начиная с XVIII столетия; основное внимание уделено 30–60-м гг. XX в.

Объектом диссертационного исследования является история возникновения и последующего становления и развития ЛП. Предметом диссертационного исследования являются работы математиков СССР и США – Канторовича, Данцига, Дж. фон Неймана и некоторых других, связанные с областью ЛП.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты проведённого исследования могут быть использованы, во-первых, в обязательных и специальных курсах по ЛП и его истории, а также по истории и методологии математики, читаемых в высших учебных заведениях студентам математических и экономических специальностей, во-вторых, в дальнейших исследованиях как по общим вопросам истории математики, так и, в частности, по истории ЛП и математических методов в экономике.

Методы исследования. Для решения поставленных задач комбинировались методы историко-научного анализа трудов Канторовича, Данцига, фон Неймана и некоторых других авторов 30–60-ых гг. XX в. в контексте современной им математики (антикваристский подход) и с позиций математики сегодняшнего дня (презентистский подход).

На защиту выносятся следующие положения:

1. Общими предпосылками возникновения и успешного развития ЛП, его основных понятий, задач и методов их исследования, как в СССР, так и на Западе послужили:

– острая необходимость и инициированный ею со стороны соответствующих организаций запрос на решение определённого круга прикладных задач;

– атмосфера, установившаяся в мире в преддверии Второй мировой войны и лишь усугубившаяся в её ходе, а также на протяжении войны Холодной, оказавшая большое влияние на взгляды и приоритеты, определившие выбор тематики научных исследований создателями ЛП, подкреплённая необходимостью решения задач оборонного характера;

– традиции научной деятельности и творческих принципов Петербургской–Ленинградской математической школы, ярким представителем которой явился Канторович, для которой характерна практическая направленность исследований, базирующихся на мощном теоретическом фундаменте;

– мировоззрение и опирающиеся на него приоритеты и интересы Канторовича и Данцига, определявшие их выбор тем и методов исследований;

– предшествовавшая профессиональная карьера и имевшиеся на тот момент должностные связи и обязанности основных авторов – Канторовича и Данцига.

2. Причинами, приведшими Канторовича, Данцига и фон Неймана к задачам ЛП и способствовавшими дальнейшим их успехам в разработке этой дисциплины стали:

– наличие у Канторовича, Данцига и фон Неймана богатого опыта и идей, приобретенных в процессе предыдущей научной деятельности, которые непосредственно подсказали пути, на которых будет найден метод для успешного решения задачи ЛП;

– проявленная Данцигом способность быстро образовать круг единомышленников, поддержавших его идеи и внесших значительный вклад в их развитие и доработку;

– интересы влиятельных правительственных и деловых кругов, позволившие Данцигу получить сильную финансовую и административную поддержку для развития, внедрения и продвижения разрабатываемых им методов;

– поддержка работ по ЛП Канторовича крупнейшими советскими математиками, позволившая продолжать исследования в этой области несмотря на неоднозначную реакцию к этому направлению со стороны влиятельных кругов научного сообщества (в особенности представителей экономической науки) и не простую политическую обстановку.

3. Крупные достижения, полученные в области ЛП, были обусловлены:

– широким кругозором, опытом и выдающимся талантом Канторовича и Данцига;

– их выдающимися организаторскими способностями;

– активным использованием теоретических результатов в приложениях;

– начавшимся бурным развитием вычислительной техники и разработкой соответствующих математических методов моделирования и решения прикладных задач.

4. История создания и развития ЛП предлагает замечательный пример того как методы, порожденные по запросу одной науки (экономики), в рамках другой науки (математики) смогли оказать значительное влияние не только на первую (экономику), но и на последнюю (математику), примером чему служит полное решение проблемы Г. Монжа, полученное Канторовичем на основе открытых им ранее методов ЛП.

5. В силу особенностей исторической и политической ситуации в мире на протяжении всего XX в. к сходным, а иногда и одинаковым идеям, задачам и методам приходили ученые как из разных систем и научных школ (о чем свидетельствует анализ достижений в СССР и США), так иногда даже и внутри одной страны и даже ведомства (примером чему могут служить исследования В. Каруша, а затем Х.У. Куна и А.У. Таккера в США и алгоритмы А.Ю.Левина и А.С. Немировскаго в СССР).

Апробация результатов. Основные результаты доложены на Годичных научных конференциях Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН, проходивших в 2008, 2009, 2010, 2011 гг.; на Общемосковском научно-исследовательском семинаре по истории и методологии математики и механики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова в марте 2009 и 2010 гг., апреле 2011 г. и марте 2012 г.; на заседание сектора истории математики Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН 20 октября 2009 г.; а также на VIII Международном Конгрессе по математическому анализу ISAAC 22 – 27 августа 2011 г. в Москве.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 10 работах:

в журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Андрианов А.Л.* Л. В. Канторович как создатель линейного программирования // Вопросы истории естествознания и техники. №4, М., 2009, С. 77–89;
2. *Андрианов А.Л.* Дж.Б. Данциг и линейное программирование // Казанская наука. №8 2014г. – Казань: Изд-во Казанский Издательский Дом, 2014. С. 19–23.
3. *Андрианов А.Л.* Краткий очерк эволюции ранних методов линейного программирования // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер. «Естественные и Технические науки» №1, М., 2017, С. 23–28.
4. *Андрианов А.Л.* Краткий очерк эволюции ранних методов линейного программирования // Вопросы истории естествознания и техники. №2. М., 2017 (в печати, выход во втором квартале 2017).

и в других изданиях:

5. *Андрианов А.Л.* Рождение линейного программирования // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2008. – М.: ИДЭЛ, 2009. – С. 260–262.

6. *Андрианов А.Л.* Развитие линейного программирования в ранних работах Л.В.Канторовича // Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 13 (48). –М.: «Янус-К», 2009. – С. 323–339.

7. *Андрианов А.Л.* Линейное программирование в работах Л.В. Канторовича 1930–1950-х гг. // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2009. – М.: «Анонс Медиа», 2009. – С. 323–325.

8. *Андрианов А.Л.* Джордж Б.Данциг и история линейного программирования (ЛП) в США // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2011. – М.: «Янус-К», 2011. – С. 315–318.

9. *Andrianov A.* The full Monge problem solution base on the linear programming (LP) // Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its

Applications, and Computation (22–27 August 2011) Volume 3. – M.: Peoples' Friendship University of Russia, 2012. – P.94–101.

10. *Андрианов А.Л.* Развитие линейного программирования в работах Л. В. Канторовича 1930–50-х гг. // Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 15 (50). М, «Янус-К», 2014. – С. 25–40.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографии и приложения. Список цитируемой литературы содержит 255 ссылок.

Глава 1. Рассматривается предыстория ЛП. Описаны идеи Л. В. Канторовича в контексте экономических исследований советских ученых первой половины XX в.: Е. Е. Слуцкого, В. В. Новожилова, В. В. Леонтьева, М. Г. Крейна. Показано, что основные математические предпосылки возникновения ЛП базируются на работах по теоретической механике, исследованиях Ж. Б. Фурье и П. Л. Чебышёва, геометрической теории полиэдров и двойственности, работах П. Гордана, Дж. Фаркаша, Г. Минковского, Г. Вейля, Г. Ф. Вороного, А. Хаара, а также ТИ.

В разделе 1.3. «О математическом творчестве Л.В. Канторовича конца 1920-х и 1930-х годов» анализируется вклад Л.В. Канторовича в развитие дескриптивной теории функций, функций над множествами, аналитических и проективных множеств. Приводятся исследования Канторовича по конструктивной теория функций, приближённым методам анализа, теории полуупорядоченных пространств, функциональному анализу и приближенным методам.

Глава 2. Посвящена вопросу развития линейного программирования в ранних работах Л. В. Канторовича. Описано зарождение интереса Л. В. Канторовича к экономике. Дается общее описание и анализ его работы «Математические методы организации и планирования производства», ее ценности с точки зрения математики и приведенных в ней конкретных примеров, иллюстрирующих применения математических методов для организации производства. Приведены основные типы задач ЛП, сформулированных и решенных автором, и их важнейшие применения. Кратко рассмотрены три типа задач на экстремум и два подхода к доказательству существования решения. Дается математическая постановка экстремальных задач с ограничениями в функциональных пространствах как в линейном, так и нелинейном случаях. Отмечена важная роль введенных Канторовичем разрешающих множителей. Описаны экономические исследования Л. В. Канторовича в довоенные годы с оценкой результатов работ довоенных лет с современной точки зрения.

В разделе 2.4. рассматриваются исследования Л. В. Канторовича довоенных лет и их связи с современной наукой. Определяется место его работ в истории оптимизационных методов, связанных с математической экономикой, теорией экстремальных задач, функциональным анализом и дискретной математикой. Приводится теорема Хана – Банаха – Канторовича. Кратко описаны различные *численные методы* нахождения решений, часто применяемые для проведения исследований экономических моделей. Как показала практика, наиболее плодотворными среди них оказались следующие их группы: метод наискорейшего спуска и градиентные методы; методы ньютоновского типа; общая теория приближенных методов; принцип мажорант и методы последовательных приближений. Рассмотрены *K*-пространства Канторовича. Показано влияние экономических задач на математический аппарат. Дана оценка результатов работ довоенных лет с современной точки зрения.

Глава 3. Все последовавшие за опубликованными в 1939 г. в книге Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства» исследования в области математических методов экономики можно разделить на две группы: те, которые были ориентированы на практическое применение и носили более частный характер, и те, которые имели большее теоретическое значение, не относясь к конкретным экономическим примерам. Показано применение ЛП к частным задачам чисто прикладного характера: подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте и организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий.

Знаменитая работа Канторовича «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» 1959 года сочетает прикладные и теоретические исследования. Леонид Витальевич за этот результат был удостоен Ленинской премии в 1965 г. Эта работа подытоживает предыдущие исследования. В одной части она содержит анализ разработанных экономических приложений ЛП, в другой – наиболее полное изложение математической теории и вычислительных методов ЛП. Отмечено признание вклада Л. В. Канторовича в экономическую науку (Ленинская премия, международная оценка). Приведено полное математическое решение проблемы Монжа на основе линейного программирования.

Глава 4 целиком посвящена американскому ученому Дж. Б. Данцигу и его вкладу в разработку ЛП и СМ. Описана его биография (становление, годы учебы, работа в разных научно-исследовательских, военных и учебных организациях) на основе воспоминаний его самого и его соратников. Выделены основные жизненные решения, которые оказали кардинальное воздействие на научную деятельность Дж. Данцига. Показана его роль в развитии и обобщении СМ и ЛП, в создании электронных вычислительных машин.

Приведены разработанные Данцигом методы для нахождения решения крупномасштабных линейных программ, какие решались в военно-воздушных силах США: транспортная задача, задача расчета диеты Штиглера (определение необходимого количесва различных типов продуктов питания) и сопутствующая ей программа выбора приоритетов. В связи с этим рассмотрены специальные разновидности СМ: такие, которым для реализации требуется использование только «компактного» базиса, то есть такого, что симплексные итерации будут осуществляться, полагаясь на базис значительно уменьшенного размера.

Детально изложена решенная Данцигом совместно с Фулкерсоном и Джонсоном задача «турне коммивояжёра». Хотя число переменных и не чудовищно большое, однако задача 42-городов имеет 861 переменную, что очень много, если линейная программа решается вручную, как делалось тогда авторами. Они использовали пересмотренный СМ и, даже несмотря на то, что при использовании пересмотренного СМ необходимо только оценить столбцы, этот процесс может быть очень затруднительным, когда имеется 861 переменная, и расчёт производится вручную. По этой причине, возможность фактически отбросить в задаче многие из этих переменных давала несомненное преимущество.

Описана организаторская и преподавательская деятельность Данцига на протяжении всей его жизни. Показано математическое влияние Данцига и признание его заслуг.

В Глава 5 представлены работы других авторов, связанные с ЛП: ТИ фон Неймана и ее связи с ЛП, теорема Каруша – Куна – Таккера и принцип Лагранжа, а также алгоритмы, созданные в СССР и США. При рассмотрении работы Неймана приводятся основные понятия и результаты ТИ, имеющие прямое отношение к ЛП; раскрывается связь между ЛП и ТИ.

Описано развитие и обобщения СМ и ЛП, проведенное Х. У. Куном и А. У. Таккером в совместной работе «Нелинейное программирование». Описаны также исследования Каруша по НЛП, другие работы, выполненные в США и относящиеся к ЛП и ТИ, а также исследования выдающихся Советских математиков: А.Ю. Левина, А.С. Немировского, Ю.Е. Нестерова, Л.Г. Хачияна, Л.А. Левина и других, рассмотрены математические модели, связанные с классическими уравнениями Вальраса. Описана экономическая модель роста Дж. фон Неймана. Дана экономическая интерпретация общей ЗЛП.

В заключительной части работы подводятся итоги проведенного исследования и приводятся полученные диссертантом выводы.

В первом приложении приведены некоторые математические сведенения необходимые для полнимания основного текста, а во втором – интервью, взятое автором у академика А.Г. Аганбегяна.

Глава 1. Предыстория линейного программирования

Важнейший этап появления и развития ЛП пришелся на драматические с точки зрения истории человечества времена – Вторую мировую войну и послевоенные годы, когда шло открытое противостояние мировых систем. В это время математика как наука в целом к ставшим уже традиционным областям приложений (естествознанию и инженерии) прибавила ряд новых. Наиболее заметным из них стало применение математического аппарата для решения проблем управления (военными подразделениями, в экономике, производстве и других областях). Задачи данной области зачастую (особенно на Западе) объединяли под именем ИО. В этой зарождавшейся области приложений основополагающую роль было призвано сыграть незадолго до этого появившееся направление математики, названное ЛП.

Одно из отличий капиталистической экономики от социалистической состояло в том, что первая обладает естественным аппаратом, позволяющим определять цены и ренты на все виды товаров и услуг, а также наблюдать за тенденциями их изменений. Этим аппаратом являются рынки и биржи, которые считаются принципиально стихийными механизмами, параметры моделей которых характеризуют капиталистическую экономику и не регулируются искусственно. В социалистической экономике, таким аппаратом не обладавшей, возникала необходимость в некоторых показателях, которые могли служить ориентирами при осуществлении экономического управления. Требовалась разработка научных методов такого управления.

Имелось еще одно важное отличие капиталистической экономики от социалистической: для первой более характерна оптимизация работы одной отдельно взятой компании, а во второй чаще возникала задача оптимизации функционирования группы предприятий в составе целой отрасли или вообще всей системы взаимосвязанных объектов. Эти обстоятельства сыграли определенную роль в том, что модели и методы ЛП впервые появились в СССР. Они оказались эффективным средством решения экономических задач, что способствовало их разработке в качестве инструмента проведения плановых расчетов.

В данной главе проведен анализ путей рождения идеи ЛП из конкретных задач экономики 1930-х годов в контексте математических исследований Л. В. Канторовича (прежде всего, его работ по функциональному анализу) и исследований других ученых, имеющих непосредственное отношение к советской экономической школе.

1.1. Идеи Л. В. Канторовича в контексте экономических исследований советских ученых первой половины XX в. Для определения значения идей Канторовича для экономико-математических методов, надо понять их связь с работами других исследователей – ближайших предшественников и современников. В этой связи остановимся на анализе достижений некоторых ученых, оказавших большое влияние на внедрение математических идей и методов в область экономической науки. Несмотря на то, что проведенные в данной работеи сследования, безусловно, не могут полностью охватить всё разнообразие достижений и методов в данной области для рассматриваемого временного периода, они призваны дать правильное представление относительно особенностей того научного контекста, в рамках которого происходили последующие исследования Л. В. Канторовича.

Задолго до того, как Л. В. Канторович начал проводить свои научные изыскания в области экономики, в СССР уже существовал опыт отдельных попыток применения методов математического и статистического анализа для решения задач экономики: такие исследования стали предприниматься уже в 20-ые годы XX века.

Первые попытки использования математического и статистического анализа для решения экономических задач в нашей стране датируются 1910–1920-и гг.: среди этих работ необходимо отметить труды Е. Е. Слуцкого [239] и А. А. Конюса [63], в которых ученые изучали модели потребления, исследования Г. А. Фельдмана по моделям роста [92], труды Н. Д. Кондратьева по «длинным циклам»

[62], в ЦСУ СССР были выполнены работы по шахматному балансовому анализу экономики (см. в [57]). Впоследствии это направление получило дальнейшее развитее, было математизированно и усовершенствованно В. В. Леонтьевым с широким использованием сведений и материалов экономики США [74, 105]. В тот же временной период Л. Юшков [102] выдвинул идею сформулировать оптимальные подходы к понятию норматива эффективности, которая впоследствии получила чрезвычайно плодотворное развитие в творчестве В. В. Новожилова [81].

Первые исследования по ЛП можно отнести к 1938–1939 гг. Они были начаты в Ленинградском университете при решении Л. В. Канторовичем «задачи фанерного треста» [24]. Задача заключалась в оптимальном распределении работы по станкам. В процессе исследования было установлено, что критерием оптимальности плана является существование так называемых разрешающих множителей для всех ингредиентов продукции и ресурсов. Сами разрешающие множители получили экономическую интерпретацию и позднее были названы объективно обоснованными оценками (ООО) [52]. По-сути, Канторович проинтерпретировал разрешающие множители как цены.

Первой фигурой, к которой мы обратимся, будет Е. Е. Слуцкий. Этот выбор сделан в силу ряда причин. Деятельность Е. Е. Слуцкого в области экономики имеет особое значение для формирования правильного представления о характере научного контекста, в котором впоследствии предстояло работать Л. В. Канторовичу, что обуславливается двумя изложенными ниже факторами.

Во-первых, работы этого ученого составляют часть «предыстории» рассматриваемых Канторовичем вопросов в силу того, что и математическая постановка задач (экстремальная задача с ограничением типа равенств), на основании изучения которых были достигнуты одни из главных результатов (уравнение Слуцкого), и, соответственно, математический аппарат, который был применен для решения этих задач (метод множителей Лагранжа), могут быть названы в качестве главных результатов, которые были достигнуты к тому моменту, когда Канторович начал проводить свои изыскания в области экономической математики, плодом которых стало открытие линейного программирования (ЛП).

Во-вторых, Слуцкий – это советский учёный, и результаты его научной деятельности обладали достаточно широкой известностью и доступностью в СССР. Таким образом, Канторович имел хорошую возможность ознакомиться с ними, чего нельзя утверждать относительно более поздних исследований американских учёных, которые осуществляли изучение аналогичных вопросов в более поздний временной период и, не зная о достижениях Канторовича и проводя свои исследования, впоследствии «переоткрыли» в своих работах ЛП.

Две других фигуры – В. В. Новожилов и В. В. Леонтьев, также работавшие в одно время с Леонидом Витальевичем. Предложенные ими модели тесно связанны с исследованиями Канторовича и, более того, могут быть переформулированы таким образом, что будут частными случаями изучавшихся им проблем.

1.1.1. Исследования Слуцкого Евгения Евгеньевича (1880–1948). Работы Слуцкого оказали большое влияние на развитие эконометрики в двух важных областях: теории поведения потребителей и анализе временных рядов. Он вошел в историю математической экономики благодаря «уравнению Слуцкого». Изучая влияние изменения цены товара на спрос в работе 1915 г. [239], он первым рассмотрел общий эффект как составной, представив его в виде суммы двух независимых простых эффектов: эффекта дохода и эффекта замены. Первый – следствие влияния цены товара на реальный доход – отражает изменение спроса при изменении дохода и неизменных ценах; он может привести и к увеличению и к сокращению потребления товара. Второй – результат относительного изменения цен при неизменном реальном доходе – приводит к росту потребления относительно подешевевшего товара. Чтобы выделить один эффект, надо избавиться от влияния другого.

Существует два подхода к определению реального дохода: Дж. Р. Хикса и Е. Е. Слуцкого. По Хиксу, реальный доход одинаков, если достигается одинаковая линия уровня функции «удовлетворения»; по Слуцкому – если можно приобрести одинаковый набор товаров. Подход Хикса больше соответствует порядковой теории полезности, подход Слуцкого позволяет дать количественное решение на основе статистических данных.

Пусть p_i – цена *i*-го товара, x_i– его количество, *M* – бюджет, *u* – функция удовлетворения.

$$\begin{cases} u(x_1,...,x_n) \to MAX \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M - \textit{бюджетное ограничение} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} u(x_1,...,x_n) = \breve{u} = const \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M \to \min \end{cases} \tag{1.2}$$

Решение (1.1) – спрос по Маршалу $\hat{x}_i = \varphi_i(p_1,..., p_n, M)$, решение (1.2) – спрос по Хиксу $\breve{x}_i = \psi_i(p_1,..., p_n, \breve{u})$.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \psi_i}{\partial p_j} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial M}, \quad \textit{где}\, i, j = 1,..., n - \textit{уравнение Слуцкого.}$$

Обозначив функцию расходов через $M(\breve{x}_1,..., \breve{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \breve{x}_i = m(p_1,..., p_n, \breve{u})$, получим 2-ю версию *уравнения Слуцкого*: $\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial M} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_i} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial M}, \quad \textit{где}\, i, j = 1,..., n.$

Слуцкий также составил матрицу: $\left(\frac{\partial^2 m(p, \breve{u})}{\partial p_i \partial p_j} \right)_{i,j=1}^{n}$ и, показав ее отрицательную полуопределенность, описал динамику спроса в зависимости от изменения цен. Именно он сформулировал наиболее важное условие равновесия как равенство предельных норм замещения соотношению цен соответствующих благ.

1.1.2. Исследования Новожилова Виктора Валентиновича. В. В. Новожилов (1892–1970), представитель Ленинградской экономической школы, проводил свою исследовательскую деятельность примерно в одинаковый с Л. В. Канторовичем временной период. В 20-х гг. XX в. он участвовал в проведении экономических реформ в СССР. Он считал главной проблему измерения затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве, для решения которой использовал математические методы нахождения общего максимума от капиталовложений. Эти модели, выдвинутые в работах Новожилова, напрямую связанны с исследованиями Канторовича и, в дополнение к этому, часто их можно переформулировать в терминах ЛП, в результате чего эти модели можно будет рассматривать в качестве частного случая тех вопросов, исследованием которых занимался Канторович.

Новожилов сразу же, в отличие от Л. В. Канторовича, получил признание в СССР и заграницей как один из ведущих теоретиков оптимального планирования, разрабатывавший вопросы теории дифференциальных затрат (определение которых ввел впервые именно он), учитывающих ограниченность средств производства. В 1926 г. выходит его статья [82], содержавшая анализ проблемы диспропорции спроса и предложения товаров с точки зрения политики цен. Начиная с 1929 г. Новожилов в своей исследовательской деятельности сконцентрировался на изучении вопросов, связанных с проблемой создания математических методов, предназначенных для определения экономической эффективности, которые могут использоваться в процессе планирования. При продолжении исследований на эту тему, стала явно проявляться потребность применения более сильного математического аппарата, чем был в распоряжении исследователя до этого момента. Такое положение дел очень удачно совпало с появлением соответствующего метода в работах Канторовича, в которых он и был найден. Статья [81] подытожила предыдущие работы и была отмечена Ленинской премией (совместно с академиками В.С.Немчиновым и Л.В.Канторовичем). В этой работе результат использования каждого продукта характеризуется потребительской оценкой – величиной, на которую улучшается значение функционала плановой задачи при дополнительной единице продукта/ресурса (потребительские оценки получаются при составлении оптимального плана и являются по существу объективно обоснованными оценками Канторовича, то есть это частный случай ЛП с одним разрешающем множителем).

Суть рассмотренной в работе [82] проблемы заключается в том, что в капиталистической экономике продавец гонится за покупателем, производство ограничено не производственными силами, а сбытом. В социалистической экономике покупатель ищет товар. Автор пришел к выводу, что недостаток товаров не абсолютен, а относителен (в сравнении с денежным спросом) и возникает, когда цены не уравнивают спрос и предложение.

Новожилов показывает, как расширение безубыточного производства (пропагандировавшаяся тогда идея) лишь усилит товарный голод: только устранив избыток денежных доходов над реальным доходом (суммой цен произведенных потребительских благ) можно устранить недостаток товаров, но при росте производства растет сумма заработных плат, суммы за сырье и так далее, то есть растет денежный доход населения и, следовательно, спрос.

1.1.3. Исследования Леонтьева Василия Васильевича. В. В. Леонтьев (1906–1999), как и В. В. Новожилов, работал примерно в тот же временной период, что и Л. В. Канторович. И хотя наиболее известные результаты его научной деятельности относятся к тому времени, когда он уже работал в США, начинал он свой путь в науке в СССР в стенах Ленинградского государственного университета – то есть там же, где позднее учился Канторович.

Круг вопросов, к которым в своем творческом поиске обращался Леонтьев на стыке 1920-ых и 1930-ых годов, включал в себя темы эластичности спроса и предложения и кривые безразличия, а в используемом математическом аппарате, описывающем основную модель этих экономических процессов, главная роль принадлежала системе линейных уравнений и неравенств.

Началом научного поиска Леонтьева в направлении исследования метода «затраты – выпуск» в экономике можно назвать 30-е годы: в 1936 г. вышла его первая статья по этой тематике, отличающаяся высокой аналитической строгостью. Анализ по этому методу относится к проблемам, изучающим взаимосвязь отношений в экономическом пространстве, представленную системой уравнений, описывающей экономику как единое целое. Эта область экономики называют теорией всеобщего равновесия, создателем которой был французский экономист Леон Вальрас (Marie-Ésprit-Léon Walras, 1834–1910). Эту систему взаимозависимостей Вальраса как инструментарий первым на практике стал систематически примененять Леонтьев в процессе всестороннего формирования экономической политики государства.

Однако необходимо заметить, что главные идеи Леонтьева уже были им сформированы ранее: ещё в те годы, когда он был студентом в Европе (в 1925 г. он отправился из СССР в Германию, где проходил обучение в Берлинском университете и проводил научные изыскания для написания своей докторской диссертации), например, в статье 1925 г., темой которой был экономический баланс СССР. Что же касается математического аппарата, использованного в данной модели, то ученый снова обращается к СЛУ.

Большой интерес представляет модель Леонтьева для межотраслевого баланса, которая и получила название «затраты – выпуск» (вообще говоря, она есть частный случай ЗЛП). Она формулируется в терминах линейной алгебры и представляет СЛУ, где параметрами являются коэффициенты затрат на производство. Леонтьев показал, что коэффициенты, выражающие соотношения между секторами, оцениваемы статистически, устойчивы, прогнозируемы. Практическое применение метода отражено в [74].

Модель строится в предположении, что затраты потребляющей отрасли определяются выпуском ее продукции, то есть коэффициенты производства фиксированы.

Рассмотрев правительство и совокупность индивидуальных потребностей как отрасли, получают «замкнутую» модель. Если заданы общий объем выпуска и коэффициенты производства, можно определить объем спроса конечных потребителей на данную продукцию. Решив уравнение коэффициентов относительно вида затрат, можно получить структурное уравнение.

Предположив же, что ряд переменных системы определяется внешними обстоятельствами, получаем «открытый» вариант (он имеет место, если пренебречь одним из основных соотношений «замкнутой» системы, так что единственности решения уже нет). В этом случае сумма коэффициентов затрат хотя бы в одной отрасли производства будет меньше 1 (ей может быть любая отрасль, но наиболее вероятно – домашние хозяйства, так как здесь главное влияние – это количество поставляемого труда и могут быть рассчитаны разные варианты этого «выпуска», обеспечивающие полную занятость рабочей силы). В открытом варианте обратная последовательность анализа: конечный спрос определен заранее, значит, могут быть вычислены объемы выпуска, удовлетворяющие данному «товарному остатку».

Не все признали метод «затраты–выпуск» эффективным способом изучения экономики. Негативно были восприняты фиксированные коэффициенты. Но, модифицировав метод с учетом более поздних открытий в ЛП, можно обеспечить и анализ меняющихся производственных функций. В этом случае уровень использования производственных затрат станет переменным и можно установить критерии оценки метода производства, основанные или на минимальных издержках производства, или на максимальном «благосостоянии». Таким образом, систему, описываемую в работах Леонтьева, можно рассматривать в рамках общей теории ЛП в качестве особого случая.

В 1973 году за развитие метода «затраты–выпуск» и за его применение к важным экономическим проблемам Василий Васильевич был удостоен Нобелевской премии по экономике. Он также являлся членом академий многих стран, был президентом Американской экономической ассоциации, получил почетные докторские степени университетов Брюсселя, Йорка, Лувена, Парижа.

1.1.4. Исследования Крейна Марка Григорьевича. Крейн (1907–1989) (Украина, Харьков и Киев) – один из создателей теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Он со своей группой занимался исследованиями по обобщенной (тригонометрической и степенной) проблеме моментов, теорией продолжения положительно определенных функций и винтовых дуг. Результаты работ позволяют решать задачи оптимального управления систем с распределенными параметрами, ряд вопросов ЛП стационарных процессов. За фундаментальные достижения в функциональном анализе и его приложениях Крейну присуждена в 1983 г. Международная премия Вольфа (избранные труды Крейна были изданы в 1993 г. [64]).

1.2. Математические предпосылки возникновения линейного программирования. Несмотря на то, что открытие ЛП и методов решения его задач связываются в первую очередь с именами таких ученых, как Л. В. Канторович, Т. Купманс и Дж. Б. Данциг, они не были первыми, кто занимался этими вопросами. И хотя, насколько известно, они не были знакомы с исследованиями своих предшественников, последние представляют большой интерес с точки зрения истории развития математики, связанной с этим вопросом. Также необходимо заметить: как исследования, относящиеся непосредственно к ЛП, так и работы, изучающие полиэдры и линейные неравенства сами по себе – все их можно считать имеющими прямое отношение к интересующему нас предмету, в силу того, что эти три области являются ни чем иным, как взглядами с разных сторон (со стороны оптимизации, геометрии и алгебры, соответственно) на одни и те же вопросы. В силу этого в качестве предыстории ЛП рассмотрим важнейшие результаты во всех этих областях, родственная природа которых была замечена еще Ж. Б. Фурье. В принципе, если кратко перечислять основые вехи раннего развития ЛП, то можно назвать следующие достижения: метод Фурье для СЛН; принцип Лагранжа для решения оптимальных задач (при ограничениях равенствах представлен в [211]) и его развитие для применения к ограниченям неравенствам; теорема Фаркаша–Минковского о зависимых неравенствах; брошюра Канторовича 1939 г.; представленные в конце 1940-х гг. СМ Данцига и двойственность Неймана.

Вероятно, то, что именно работа Данцига смогла стать тем решающим моментом, после которого ЛП получило широкое признание, а созданный им СМ приобрел свою огромную популярность, произошло благодаря прозрачности предложенной геометрической иллюстрации (Данциг показал, что, когда мы рассматриваем полиэдральное множество допустимых решений задачи ЛП, СМ является алгоритмом перехода от одной вершины выпуклого многогранника к новой, в результате которого мы приходим к вершине, означающей решение поставленной задачи) и тому, что направленный перебор вершин был заключен в форму достаточно удобного для осуществления алгоритма.

1.2.1. Теоретическая механика. Увлечение исследованиями многомерных задачах поиска экстремума $||Ax - b||_\infty$ появилось ближе к концу XVIII-го столетия и возникло оно благодаря работе над созданием методов решения СЛН, предпринятой со стороны ученых, сфера научных интересов которых лежала в области проблем теоретической механики.

Более того, можно сказать, что ученые всерьез занялись изучением самих линейных неравенств, размышляя над вопросами, связанными с принципом виртуальных скоростей и теорией Лагранжа. Среди этих исследователей были: Ж. Лагранж, Фурье, К. Гаусс, М. В. Остроградский. Последнему удалось дать доказательство утверждения, названного впоследствии леммой Фаркаша, для частной ситуации: в предположении о линейной независимости неравенств. Так же можно отметить экономиста А. О. Курно, тоже обратившегося к вопросу ограничений неравенств в механике, который, пытаясь вывести то, что позднее получило название леммы Фаркаша, получил для частного случая некоторое ее «механическое доказательства».

Возвращаясь к вопросу о нахождении минимума величины $||Ax - b||_\infty$ для известных A и b, которая может быть интерпретирована в качестве ошибки измерений, необходимо сказать о вкладе, сделанном Шарлем Жаном де ла Валле Пуссеном (Charles de la Vallee Poussin), который, изучая этот вопрос, представил в итоге работу 1911 г. [230], посвященную теории неравенств и алгоритму поиска минимально отклоняющихся решений систем уравнений, который может быть расценен в качестве реализации в терминах алгебры идей, высказанных в работах Фурье, о которых сказано ниже. О данном алгоритме также справедливо говорить, как о предтече СМ.

1.2.2. Фурье Жан Батист Жозеф. Первым автором, имеющим достаточно близкое отношение к ЛП, можно, по-видимому, назвать Ж. Б. Фурье (1768–1830) (Jean-Baptiste Joseph Fourier): наиболее вероятно, что именно он был первым, кто рассмотрел (приметинельно к равновесию в механике) случай ограничений неравенств в 1798 г. [173]. Можно также сказать, что он, в определенном смысле, предвосхитил формулировку ЗЛП в 1824 г. [174], [176], [185]. В его труде [175] мы можем найти некий алгоритм, который с рядом допущений можно считать упрощенным вариантом будущего СМ, созданный с целью отыскания минимума величины z, являющейся одной из трех координат точки, которая по условию рассматриваемой им задачи должна лежать внутри полиэдра P (Фурье называет его «чашей). Полиэдр в свою очередь описывается СЛН. Данная задача записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & z \to \min \\ & (x, y, z) \text{ из } P \\ & z \geq a_i x + b_i y + c_i,\ i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Иными словами, в 1826 г. ученый изучал проблему отыскания для матрицы A из m строк и n столбцов и m-мерного вектора b минимума $\|Ax - b\|_\infty$, где $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ (такая же задача изучалась ранее П. С. Лапласом [212] и А. М. Лежандром [214]). Приведя для случая $m = 2$ ход решения, Фурье показал, что эта проблема эквивалентна отысканию самой нижней точки «чаши» (полиэдра), что он и реализовал в виде описания перемещения от одной точки «чаши» к другой по ребрам в сторону ее «низа» пока не будет достигнута оптимальная вершина (что и позволяет говорить о его процедуре, как о примитивном прообразе, появившегося более века спустя СМ), Фурье упомянул о возможности дальнейшего исследования при большей размерности выпуклой кусочно-линейной поверхности.

Фурье исходил из переопреденной СЛУ, в которой он переменные величины заменял числовыми и определял ошибки. Далее он искал такую систему чисел, в которой минимизируется абсолютная величина получающейся максимальной ошибки. Он преобразовал задачу аппроксимации в общую оптимизационную задачу.

Фурье понял, что множество решений образует выпуклый многогранник, z достигает минимума в специальной точке на краю многогранника, и неявно высказал утверждение о конечности метода, однако не заметил возможности образования циклов и вырождения.

Таким образом, к несомненным достижениям Фурье стоит отнести то, что он, по-видимому, явился первопроходцем в деле связывания воедино задач минимизации, СЛН и полиэдров, являющихся, как уже говорилось выше, тремя сторонами одного вопроса.

Годом позже ученый дал способ решения произвольных СЛН путем последовательного исключения неизвестных, который сейчас называется методом исключения Фурье-Моцкина.

Кроме того, будучи в числе первых, кто понял перспективность применения СЛН в исследовании прикладных задач, Фурье говорил о важности их применения к изучению вопросов механики, результатов голосования в процессе выборов. Однако, говорить о том, что ученому удалось получить более-менее общую теорию или законченные методы решения подобных задач, не представляется возможным.

1.2.3. Чебышёв Пафнутий Львович (1821-1894). Исследования, связанные с чебышёвским приближением (нахождние точки, наименее уклоняющейся по модулю от системы плоскостей), занимают важное место в вопросе появления идей, на которые опирается СМ. Данная задача эквивалентна ЗЛП определенного вида.

Вообще, многие задачи чебышёвского приближения, являясь задачами выпуклого кусочно-линейного программирования (минимизация выпуклой функции, склеенной из «кусков» линейных функций), могут быть приведены к ЗЛП. Зачастую задачу чебышёвского приближения можно привести к определенной задаче НЛП (когда минимизируемая функция или некоторые ограничения нелинейны), а уже для ее решения находится сходящийся алгоритм, на всякой итерации обращающийся к решению ЗЛП.

1.2.4. Геометрическая теория полиэдров и двойственность. Свое бурное продвижение геометрическая теория полиэдров получила в XIX-м веке. Среди наиболее значимых авторов были О. Коши, Я. Штейнер, Дж. Сильвестр, А. Кэли, А. Мебиус, Т. Кирман, А. Пуанкаре, Л. Шлефли, А. Тет.

Что касается самой концепции двойственности в геометрии (в соответствии с ней в большом количестве теоретических фактов относительно проективной плоскости понятия точки и прямой для пространства двух, и точки и плоскости для пространства трех измерений могут быть заменены одно другим), то она развивалась в работах Ж.-В. Понселе (J. V. Poncelet), Ж. Д. Жергонна (J. D. Gergonne), Я. Штейнера и фон Штаудт (von Staudt Ch.). А Ю. Плюккер указал на тот факт, что коэффициенты однородных СЛУ могут быть рассмотрены в качестве координат, что в свою очередь приводит к двойственности гиперплоскостей и прямых, которые проходят через начало координат. Таким образом, ему удалось внести ясность в происхождение данного явления.

1.2.5. П. Гордан, Дж. Фаркаш, Г. Минковский, Г. Вейль, Г. Ф. Вороной, А. Хаар. Есть основания полагать, что Гордан (P. Gordan), исследуя с алгебраических позиций СЛН, стал в 1873 году пионером в открытии необходимых и достаточных условий совместности СЛН.

Ближе к завершению XIX в. исследованием СЛН занялись также Минковский и Фаркаш (Julius/Gyula Farkas) и развили в своих работах базу алгебраического подхода к теории полиэдров. В 1939 г. Канторович использовал одну теорему отделимости (теорему Минковского) для доказательства существования введенных им «разрешающих» множителей, ведущих к решению оптимизационных задач.

Поскольку Фаркаш был физиком, то его изучение СЛН было инспирировано все теме же вопросами механики, на пути разработки которых хоть и были достигнуты значительные успехи в исследованиях его предшественников, в особенности Остроградского, однако картина все еще была не завершена и в 1894 г. Фаркашу удалось впервые дать законченное доказательство того утверждения, которое получило название леммы Фаркаша [165], для общего случая. Доказательство это нуждалось в уточнениях, пояснениях и упрощении, что было сделано автором позднее. Кроме того ему удалось установить, что любой полиэдральный конус конечно порожден.

Из утверждений явно сформулированных в работах Фаркаша, принимая во внимание принцип двойственности, тут же следует утверждение о том, что любой конечно порожденный конус является полиэдральным, которое в таком виде появилось в 1935 г. у Вейля (O. Hermann Weyl) [253]. В исследованиях Вейля, Минковского и Вороного удалось определить, каким образом связаны друг с другом многогранники и полиэдры. Теорема, носящая имена Вейля и Минковского, заключается в следующем: то, что некое множество есть ограниченный полиэдр эквивалентно тому, что оно есть многогранник.

Работая над задачами теории чисел, Минковский пришел к изучению СЛН и выпуклых тел и к 1896 году показал, что любой полиэдральный конус $\{x \mid Ax \leq 0\}$ конечно порожден; если матрица A имеет полный ранг по столбцам, то этот конус порожден лучами, каждый из которых определяется $(n - 1)$ линейно независимыми уравнениями из $Ax = 0$. Из чего он, предполагая полный ранг A по столбцам, получил лемму Фаркаша. Из хода доказательства видно, что он знал о двойственности лучей и неравенств и о возможности приведения неоднородного случая к однородному.

Изучение вопросов тории чисел привело Г. Ф. Вороного к исследованию в его работах свойств многогранников посредством решения конечной СЛН. Кроме выведения результатов Гордана относительно условий, при которых конус имеет полную размерность (иными словами, выяснив, когда системы строгих неравенств разрешима) и Фаркаша и Минковского относительно того, что любой полиэдральный конус конечно порожден, в его работах появилось понятие полярного конуса C^* полиэдрального конуса C и был выведен ряд его свойств.

А. Хаар (A. Haar) в своей работе 1918 г. [186] дал обобщение леммы Фаркаша для неоднородных систем.

Теория выпуклых множеств частисно развивалась в связи с новыми работами по ЛП.

1.2.6. Теория игр. В 1928 г. Дж. фон Нейманом было доказано равенство максимина и минимакса для произвольной матрицы [225], а это равносильно теореме двойственности ЛП, что было продемонстрировано Дж. Данцигом, а также Д. Гейлом, Х. У. Куном и А. У. Таккером. Причина же такого глубокого взаимопроникновения ЛП и теории матричных игр была вскрыта Нейманом и Данцигом, показавшим возможность приведения любой матричной игры двух лиц с ненулевой суммой и конечным числом стратегий к паре двойственных задач ЛП и наоборот. Подробнее этот вопрос рассматривается в разделе 5.2.

1.3. О математическом творчестве Л. В. Канторовича конца 1920-х и 1930-х годов. Первые шаги Л. В. Канторовича к разработке модели и методов ЛП были предприняты в качестве ответа на запрос о необходимости решения совершенно конкретной экономическо-производственной «задачи фанерного треста». Однако для понимания тех причин, по которым эти методы были предложены именно Канторовичем в тот самый момент времени и почему они получились такими, важно иметь представление об истоках и линии его научной жизни, которые предшествовали периоду обращения направления его творческого поиска в сторону вопросов экономического характера и началу работ над математическими методами в экономике. Именно для формирования такой картины приводится обзор тех математических исследований, в контексте которых (прежде всего, его работ по функциональному анализу) ученый начал свой анализ путей решения поставленной перед ним частной задачи, что, в конечном счете, привело к рождению идей ЛП в исследовательской деятельности Канторовича.

Исследовательская деятельность Л. В. Канторовича началась очень рано. Будучи еще студентом 1-го курса и участвуя в семинаре Г. М. Фихтенгольца, он должен был подготовить доклад об условиях интегрируемости функции по Риману.

Канторович, ознакомившись с имеющейся на эту тему в доступных ему учебниках информацией, не ограничился пересказом готовых результатов, но задался вопросом об условиях совпадения верхнего и нижнего римановых интегралов с лебеговым. Отвечая на этот вопрос, он получил ряд новых результатов (включавших в себя определение полунепрерывной функции и ряд утверждений). Так образом, ему удалось ответить на сформулированный им же вопрос (искомым условием оказалось следующие: функция должна быть почти везде полунепрерывной, соответственно, сверху и снизу.) Вполне закономерно выяснилось, что полученные им результаты уже были получены ранее. Это же относится и к еще одному результату, который появился в процессе данного исследования, – характеристике функций, которые могут являться колебаниями функции одной переменной (таковой может быть любая полунепрерывная сверху функция). Выяснилось, что данный результат двумя годами ранее уже был получен Е. М. Ливенсоном, совместная с которым статья по этому вопросу планировалась для публикации в бюллетене студенческого научного кружка, чего, правда, не состоялось по причине окончания работы последнего.

Так начались его исследования по дескриптивной теории функций, получившие успешное продолжение [28, 31, 194, 197, 193].

1.3.1. Дескриптивная теория функций. Как уже было сказано, упомянутый выше семинар вскоре прекратил свое существование, а студент Канторович сделался участником только что открытого также Г. М. Фихтенгольцем семинара по дескриптивной теории функций, который начался с темы о классификации функций Бэра и Юнга. Именно эти вопросы легли в основу первых трудов Канторовича, который в качестве основной темы исследования выбрал задачу получения дескриптивной характеристики четвёрки функций, которые могут являться обобщёнными производными непрерывной функции. В процессе изучения этого вопроса появилась задача, которая ставилась для функций любых классов, в том числе и трансфинитных, выявления тех функций Юнга второго класса, которые могут являться верхним и нижним пределами последовательности непрерывных функций. В результате исследований в течение 1928–1929 гг. ему удалось получить результаты как по вспомогательному, так и по основному вопросу. В тот самый момент, когда результаты по вспомогательному вопросу должны были быть опубликованы, вышли статьи В. В. Степанова [242] и Ю. А. Гольдовского [183], содержавших решение этих проблем для функций Юнга второго класса. В итоге Канторовичу пришлось переработать статью, сосредоточившись на обобщении вышеобозначенных работ, в результате чего появилась публикация [195]. Результаты же по общей проблеме были опубликованы в 1932 г. в [28].

После этого в круг внимания Канторовича попали сформулированные Г. М. Фихтенгольцем вопросы об универсальных функциях, которые Канторовичу также удалось успешно решить, и о чём он сделал первое в его жизни выступление перед Ленинградским физико-математическом обществом. В этом исследовании он обратился к абстрактному понятию аналитической операции над множествами, которое тесным образом связано с тем рядом исследовании, которому ему предстояло посвятить следующий период своего научного творчества.

1.3.2. Функции над множествами, аналитические и проективные множества. Когда в 1928–1929 годах опять же под руководством Г. М. Фихтенгольца начал существовать семинар, целью которого было объявлено исследование *A*-множеств и смежных вопросов. Канторович стал принимать в его жизни активное участие. В силу того, что степень разработанности вопросов, касающихся аналитических множеств была уже весьма высокой, участники семинара сосредоточили свои творческие усилия на изучении проблем, связанных преимущественно с проективными множествами, о которых в то время было известно намного меньше. Канторович достаточно быстро получил важные результаты, опубликованные в «Докладах Академии наук Франции» [193].

Канторович в результате своей совместной с Ливенсоном исследовательской деятельности сумел установить ряд закономерностей, одна из которых давала описание того, каким образом для δs-операций Хаусдорфа ведут себя множества индексов, то есть системы последовательностей, по которым производится суммирование множеств, в случае объединения множеств. Оказалось, что их удобно изучать с помощью изображения на вещественной прямой, рассматривая их не как множество последовательностей, а как подмножества множества рациональных чисел.

Продолжая работу в рамках этой области, Канторовичу удалось решить и ряд других вопросов, среди которых можно, во-первых, отметить то, что он смог получить представление для проективных множеств второго класса. Для *A*-множеств оно было известно: через *A*-операцию с кортежами. Для проективных множеств ничего подобного не существовало. Работа была опубликована в 1929 г. [193]. А, во-торых, годом позже Канторовичу удалось найти решение проблемы Лузина о том, что все множества системы Е. А. Селиванова (полученные аналитическим путём) принадлежат пересечению проективных множеств не выше второго класса и дополнительного класса и показать, что множества, полученные в результате борелевской надстройки над системой *A*-множеств и *CA*-множеств также укладываются в этот класс.

1.3.3. Конструктивная теория функций. Следующая смена предмета научного поиска произошла, когда в быстро расширявшемся круге интересов Л. В. Канторовича оказалась конструктивная теория функций и он обратился к исследованию полиномов С. Н. Бернштейна. В 1930 г. в Докладах Академии Наук были опубликованы первые результаты ученого [40, 44, 27] полученные в этом направлении, среди которых наиболее важным в свете изучаемого нами вопроса о его последующей деятельности экономической направленности представляется то, что Канторович выдвинул предложение об использовании вместо значений функций в отдельных точках более устойчивых средних значений функции в соответствующем интервале и показал, что такая замена возможна. После этого стало возможным написать полиномы не только для непрерывной, но и для любой суммируемой по Лебегу функции, и доказать их сходимость почти везде к значениям порождающей функции. Канторович построил подобного рода полиномы для функций первого класса Бэра и установил их сходимость всюду, за исключением множества точек первой категории. Эти результаты были опубликованы в двух заметках в Докладах Академии Наук СССР за 1930 г. [194, 40] и были доложены на Первом всесоюзном математическом съезде в Харькове, в них же было отмечено следствие о почленном дифференцировании последовательности полиномов Бернштейна абсолютно-непрерывной функции. С этой же темой Канторович выступил на Первом Всесоюзном математическом съезде в Харькове.

Вслед за этим были получены результаты относительно приближения непрерывной функции многочленами с целыми коэффициентами [27]. Наиболее интересной, по мнению Канторовича, была работа по сходимости полиномов Бернштейна за пределами основного интервала [44].

Интерес к этой теме оказал большое влияние на научное творчество ученого последующих периодов, так как к полученным в его результате знаниям и опыту в области конструктивной теории функций Канторович не раз прибегал в своих будущих исследованиях, касающихся как «чистой», так и прикладной математики.

1.3.4. Приближённые методы анализа. Увлечение Л. В. Канторовича другой областью – приближенными методами анализа -которую он успешно разрабатывал в начале 1930-х гг., началось с собственного изложения результатов А. Н. Крылова [65] по-новому: в интегралах Стилтьеса обычных несобственных и интегралах Стилтьеса высшего порядка [47]. С этим же связано несколько работ об интеграле Стилтьеса, относящихся уже к теории обобщённых функций (или теории распределения конечного порядка). Одновременно с этим Канторович занимался составлением совместно с В. И. Крыловым курса по вариационному исчислению [88], который опирался преимущественно на материалы лекций Н. Г. Чеботарёва и В. И. Смирнова.

Многие из полученных в эти годы результатов вошли в написанную им совместно с В. И. Крыловым книгу «Методы приближенного решения уравнений в частных производных» [56], в которой, среди прочего, рассмотрен метод коллокации в применении к уравнениям с частными производными. Метод основан на идее замены исходного уравнения системой уравнений, заданных на отдельных линиях, что равносильно требованию удовлетворения приближенного решения исходному уравнению только на указанных линиях.

Однако к 1932 г. Канторовичем был разработан новый вариационный подход, который значительно обобщил метод Ритца (см., например, [32], [98]). В то время как метод Ритца предполагает поиск решения в виде линейной комбинации определенных априорно заданных функций с неопределенными коэффициентами, определяемых с помощью условия минимизации некоторого интеграла (иными словами, поиск решения уравнения в частных производных либо проблемы об экстремуме двойного интеграла сводится к матричной задаче), в методе Канторовича форма разыскиваемого решения включает и произвольные функции одного переменного (то есть часть структуры приближённого решения имеется в заданном виде, а другая часть находится из самой задачи о минимизации интеграла, превращающейся в одномерную задачу) и, более того, в некоторых ситуациях появляется возможность отыскивать не просто численное решение задачи, а приближенное аналитическое. Данный подход позднее были использованы в создании алгоритмя, аналогичного методу Галёркина – Бубнова, и базирующемуся не на вариационных принципах, а на моментных уравнениях [22].

Также в этой области Канторовичем были получены значительные результаты по приближённым методам применительно к конформному отображению близких областей [38], [33], где были использованы идеи отыскания отображающей функции в виде ряда по степеням малого параметра, а сами члены ряда находились или из бесконечной СЛУ или последовательными приближениями. Была доказана сходимость метода в определенных границах изменения параметра. Разработка такого метода стимулировалась разработкой и применения методов ТФКП в работах по гидродинамике, решению уравнений в частных производных. В совместной с В. И. Крыловым книге 1936 г. «Методы приближённого решения уравнений в частных производных» [56] впервые опубликованы многие новые результаты, касающиеся исследования погрешности и сходимости известных ранее методов. Также был развит метод решения граничной задачи, основывающийся на сведении её к бесконечной СЛУ и интегральных уравнений, а также по изучению погрешности и сходимости уже имеющихся методов. Дается первое систематическое изложение различных приближенных методов решения интегральных уравнений. Рассматриваются применения вариационных методов к приближенному решению уравнений в частных производных, а также методы приближенного конформного отображения; изучаются приложения методов приближенного конформного отображения к нахождению решений основных краевых задач.

В работе был рассмотрен метод коллокации в применении к уравнениям с частными производными. Основой этого метода является замена исходного уравнения системой уравнений, заданных на отдельных линиях. Фактически требовалось, чтобы приближенное решение удовлетворяло исходному уравнению только на указанных линиях (например, учитываются данные эксперимента).

Как впоследствии отмечал, Канторович: «В исследованиях сходимости приближённых методов были существенно использованы методы конструктивной теории функций» [72, с.59].

1.3.5. Теория полуупорядоченных пространств. В начале 1930-х гг. Канторович приступил к исследованиям по функциональному анализу – области математики, в которой впоследствии он стал одним из крупнейших в мире авторитетов. Началось это увлечение в 1933 г. Как только открылся научный семинар по функциональному анализу, Л. В. Канторовичу сразу удалось добиться больших результатов в этом направлении, среди которых первыми стали следующие. Первыми плодами его научной деятельности стала теорема об общей форме линейного функционала в пространстве всех измеримых ограниченных функций, полученная в совместном с Г. М. Фихтенгольцем исследовании, вместе с параллельным установлением мощности множества функционалов в данном пространстве, которые были изданы в 1935 г. [168, 93]. Следующим достижением стало определение Канторовичем того, что возможность распространения любого функционала с подпространства на всё пространство с сохранением аддитивности является отличительной характеристикой, делающей Гильбертово пространство уникальным среди всех нормированных (см. [43]).

После этого к 1935 году интерес ученого перешел к изучению объектов, известных сегодня как обобщенные функции, оформившийся в виде работ [39] и [26]. Предметом научных изысканий Канторовича 1935–1936 годов стала его мысль о необходимости добавления к аппарату функционального анализа таких пространств, где есть порядок, в результате разработки которой появились полуупорядоченные пространства, линейные полуупорядоченные пространства, иначе – векторные решётки, то есть пространства, наделённые определённым образом согласованными векторной и порядковой структурами [42] (см. также определения 1.1 – 1.5 в Приложении 1), ставшие объектом активных изысканий как в СССР, так и за рубежом.

Впоследствии данным направлением активно занялись Дж. Фон Нейман, Г. Фрейденталь и Г. Биркгоф, также во второй половине 1930-х гг. смежные исследования проводил М. Г. Крейн, в работах которого изучались нормированные пространства с конусами положительных элементов. Сам же Канторович занялся вопросами аналитического представления линейных операций, которые преобразуют одно пространство в другое, и вопросами, связанными с функциональными уравнениями в линейных пространствах, в ходе разработки которых ему, во-первых, удалось представить в терминологии полуупорядоченных пространств принцип мажорант, а также ряд связанных с этой темой фундаментальных теорем, а, во-вторых, пришлось сделать дальнейшее обобщение – так появились пространства, которые нормируются элементами полуупорядоченных пространств (например, для банаховых пространств – пространства-$\boldsymbol{B}_K$). Применив принцип мажорации к численным методам (к бесконечным линейным системам), Канторович получил новые результаты, относящиеся к сходимости, оценкам приближённого решения и его характеристикам [45, 196].

1.3.6. Функциональный анализ и приближенные методы. Эта тематика получила особенно активную разработку в творчестве Л. В. Канторовича уже позднее – в послевоенные годы. Очень значимая работа этого периода «Функциональный анализ и прикладная математика» [51], вышедшая в 1948 г., демонстрирует варианты различных приложений функционального анализа к исследованию вопросов вычислительной математики. Вместе с исследованием различных типов методов в данной статье была изложена и общая теория приближенных методов. К другим особенно значимым статьям по последней теме необходимо отнести [23]. Канторович получил методы, которые, исходя из разрешимости приближенного уравнения, отвечают на вопрос о существовании точного решения исходной задачи и нахождении области, где оно лежит. Данные работы привели к тому, что появилась новая область исследований, которую стали называть «доказательные вычисления» [35, 36, 37].

Метод имеет многочисленные применения, в том числе для понижения размерности систем, в частности – при применении метода агрегирования экономических систем. Интересным также является подход – нормировка исходного пространства элементами полуупорядоченных пространств [48, 25]. Например, функция может быть нормирована не просто своим максимумом на интервале, а набором максимумов на подынтервалах. Таким образом, занимая одно из центральных мест в математическом творчестве Канторовича, теория *K*-пространств позже нашла свое применение в экономике.

К концу 1930-х годов Леонид Витальевич Канторович вырос в математика с широким диапазоном исследований, получивших известность в научных кругах всего мира, а также и признание международной общественности.

В данной главе показана в историческом аспекте значимость работ, повлиявших на зарождение ЛП в исследованиях Л. В. Канторовича. Дается описание его математического творчества конца 1920-х и 1930-х годов. Отмечается большая ценность его работ для развития приближенных методов вычислений, получивших впоследствии широкое распространение и проименение в различных математических методах экономики.

Глава 2. Развитие линейного программирования в ранних работах Л. В. Канторовича.

Анализ ранних работ Канторовича проведен автором в [*7, 10, 11*].

2.1. О начале творчества Л. В. Канторовича в области экономики. 2.1.1. Зарождение интереса Л.В.Канторовича к экономике. Хотя интерес Л. В. Канторовича к экономике проявился еще в студенческие годы, весь первый период своего научного творчества, он был увлечен преимущественно математикой.

Широкой публике Канторович известен больше не как математик, а как экономист. По словам самого Леонида Витальевича, интерес к экономике у него был всегда: он с большим интересом слушал лекции по политэкономии, после 3-го курса проходил практику экономистом. Естественно, выбор научных тем определяется не только персональными интересами, но и внешними факторами. В 1936–1937 годах, работая над вопросами теории полуупорядоченных пространств, он почувствовал некоторую неудовлетворенность математикой. Конечно, его работы были интересными и успешными, но мир находился под угрозой фашизма. Канторович вспоминал: *«Было ясно, что через несколько лет наступит тяжелейшая война… И я почувствовал ответственность… У меня было ясное ощущение, что слабым местом… было состояние экономических решений»* [72, с. 50].

2.1.2. Начало исследований. Канторович начал заниматься вопросами линейной оптимизации в 1938 г. в связи с задачей оптимальной загрузки станков фанерного треста. Он сразу заметил, что многие другие экономические проблемы приводят к аналогичным математическим задачам – максимизации функции при многих ограничениях. Следует заметить, что в ряде практических задач не могут непосредственно быть применены методы математического анализа, так как при этом возникают десятки тысяч или даже миллионов систем уравнений, что совершенно не применимо практически. Сначала для решения стоящей перед ним задачи Канторович предложил геометрический метод, о котором, по воспоминаниям автора, впервые был сделан доклад на Октябрьской научной сессии Ленинградского педагогического института им. Герцена в 1938 г., но он не был достаточно алгоритмичен. В конце того же года в связи с некоторыми идеями функционального анализа Канторович предложил общий метод решения подобных задач, метод разрешающих множителей, показавшийся ему перспективным благодаря алгоритмичности и содержательному экономическому значению этих множителей, в течение нескольких месяцев выявленному автором. Он оказался одним из самых простых и эффективных численных методов ЛП, сделав решение задач такого рода осуществимым практически.

Соответствующие исследования были оформлены в виде работы «Математические методы организации и планирования производства» [24], вышедшей в 1939 г., ставшей первым трудом Канторовича по экономической тематике. (Сохранилась рукопись 1938 г. (см.: [72, с.52]), соответствующая докладу. *«По существу, в этой работе описывается симплекс-метод. То, что работа не была тогда же опубликована, связано с очевидной неэффективностью симплекс-метода при счете вручную для сколько-нибудь реальных задач… Как вспоминает Леонид Витальевич, уже в январе 1939 года им был предложен метод разрешающих множителей…»* [72, с.52].) Работа 1939 г. является 70-й в его научном творчестве.

2.1.3. Общая характеристика работы 1939 года. Дается общее описание и анализ работы «Математические методы организации и планирования производства», ее ценности с точки зрения математики и приведенных в ней конкретных примеров, иллюстрирующих применения математических методов для организации производства. Приведены основные типы задач ЛП, сформулированных и решенных автором, и их важнейшие применения.

Ценность работы [24] с математической точки зрения состоит в изложенном в ней методе решения задачи на экстремум, выходящем за рамки классического математического анализа. Также интересно описание применения математических методов для организации производства на конкретных примерах. Это первая публикация на тему ЛП, как в творчестве Леонида Витальевича, так и в мире. В ней поставлены основные задачи ЛП и перечислены его важнейшие применения на примере девяти экономичемских задач, описан метод их решения. Три приложения к работе содержат изложение и обоснование разрабртанного автором процесса решения указанных экстремальных задач – метода разрешающих множителей. Сначала приводится алгоритмический способ решения проблемы, а в заключении описаны два подхода к доказательству существования решения. В книге рассмотрены три типа задач.

Задача А. Есть n станков, вырабатывающих изделия из m деталей. При обработке k-ой детали на i-ом станке, в день производится $a_{i,k}$ штук деталей. Обозначим через $h_{i.k}$ время для обработки k-ой детали на i-ом станке. Надо определить $h_{i.k}$ так, чтобы получить наибольшее число комплектов.

Решение этого вопроса приводит к задаче определения $h_{i,k}$ $(где\, i = 1, 2, ..., n;\ k = 1, 2, ..., m)$ из условий:

1) $h_{i,k} \geq 0;$

2) $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1;$ (2.1)

3) если положить $\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} h_{i,k} = z_k$, то $h_{i.k}$ должны быть подобраны так, чтобы величины $z_1, z_2, ..., z_m$ были равны между собой, и их общее значение $z := z_1 = z_2 = ... = z_m$ было максимально.

Задача В. Найти числа $h_{i,k}$ $(где\ i = 1, 2, ..., n;\ k = 1, 2, ..., m)$ из условий

1–3) задачи А и условия

4) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{i,k} h_{i,k} \leq C.$ (2.2)

Задача С. Наиболее общая – задача С. Найти числа $h_{i,l}$ из условий:

1) $h_{i,l} \geq 0;$

2) $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1;$ (2.3)

3) если положить $\sum_{i,l} \gamma_{i,k,l} h_{i,l} = z_k$, то должно быть $z_1 = z_2 = ... = z_m$ и их общая величина z должна получить максимальное возможное значение.

Все три задачи легко модифицируются. Возможен вариант, допускающий некомплектное производство, например некомплектные детали надо докупать по более высокой цене, или сверхкомплектные детали дешевле оцениваются, чем общий комплект, и потому для оценки стоимости продукции играет существенную роль число полных комплектов. Возможны и другие постановки задачи. Дан способ сведения к этим задачам вопросов, возникающих при требованиях:

– наиболее полного использования механизмов;

– максимального уменьшения отходов;

– максимального использования комплексного сырья;

– наиболее рационального использования топлива;

– наилучшего выполнения плана строительства при наличных материалах;

– наилучшего распределения посевной площади;

– наилучшего плана перевозок.

2.1.4. Значение работы 1939 года. В [24] дан метод решения класса задач выбора самого выгодного из огромного числа вариантов. Он делает решение вопроса осуществимым даже в сложных случаях, когда выбор производится из миллиардов возможностей с учетом дополнительных условий. Также выяснен экономический смысл разрешающих множителей, рассмотрены вопросы их использования при вариации плана, определения показателей эффективности продукции и кооперирования предприятий.

Конечно, работа являлась далеко не законченной, но ее можно считать базой последующих исследований. Вскоре после нее было проведено глубокое изучение экономического смысла разрешающих множителей, опубликованное, однако, лишь в 1959 г. в работе [52]. В этой работе дана постановка экстремальных задач с ограничениями в функциональных пространствах как в линейном, так и нелинейном случаях. Намечены задачи нелинейного программирования, а также его применения к экстремальным математическим задачам. В конце 1940-х гг. сделано много расчетов без применения вычислительных машин [55].

2.1.5. Математическая часть работы 1939 года. Остановимся подробнее на идее предложенного метода. Для определенности, рассмотрим задачу *A*. Метод основан на следующем факте: оказывается, существуют такие множители $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, отвечающие каждой детали, что их нахождение почти сразу приводит к решению задачи. Если для каждого *i* рассмотреть произведения $\lambda_1 \cdot \alpha_{i,1}, \lambda_2 \cdot \alpha_{i,2}, ..., \lambda_m \cdot \alpha_{i,m}$ и выделить *k*, для которых оно максимально, то для всех прочих *k* можно принять $h_{i,k} = 0$. Немногие выделенные $h_{i,k}$ легко определить из условий (2.1, 1–2) задачи *A* и условия $z_1 = z_2 = ... = z_m$. Найденные $h_{i,k}$ дают максимум *z* – решение задачи. Таким образом, вместо поиска *n x m* неизвестных $h_{i,k}$, надо найти *m* неизвестных λ_k. Сами λ_k легко находятся последовательными приближениями. Решение осуществимо практически, контролировать его правильность легко. Большинство $h_{i,k}$ равны 0, то есть производство осуществимо практически: большинство станков работает с одним видом деталей, и только на некоторых происходит одна замена в течение дня, необходимая для комплектности.

В [24] подробно изложен этот метод, являющийся одним из наиболее эффективных для решения задач такого рода. При этом рассматривается в основном применение метода к задаче *A*, хотя далее говорится и о других задачах. Сначала приведены идея и алгоритм решения задачи *A* для *m* = 2, затем путь распространен на любое *m*. Даны примерная схема вычислений конкретной простой задачи и указания действий в вырожденных случаях, описан алгоритм контроля решения, соображения о нахождении приближенного решения для ускорения поиска, применение метода к задачам *B* и *C* с примерами, подробно решена задача *A* в сложном случае фанерного треста. В дополнении приведены аналитическое и геометрическое доказательства существования разрешающих множителей и геометрическая интерпретация задач ЛП.

Идеи, изложенные в этой работе, и сам метод разрешающих множетелей можно законно назвать предтечей созданного вскоре Дж. Данцигом СМ, и концепции двойственности в ЛП, которая оформилась позднее в работах Дж. Данцига и книге фон Неймана [78].

Интересно замечание Канторовича о важной роли разрешающих множителей. В ходе решения они выступали только как техническое средство, и могло показаться, что метод не имеет особых преимуществ по сравнению с другими, кроме простоты и краткости. Но это не так: λ_k имеют гораздо большее значение – они дают не только решение, но и позволяют указать ряд его важных характеристик (тут важна локальная устойчивость λ_k). Дело в том, что λ_k являются показателями производительности станков при оптимальном распределении. С их помощью решается, например, вопрос об изменениях решения при небольших вариациях условий, о целесообразности кооперирования, об оценке потерь при отступлении от оптимального плана.

2.2. Экономические исследования Л. В. Канторовича в довоенные годы. Ученик и соратник Канторовича А. Г. Аганбегян в своих воспоминаниях писал: *«Меня всегда поражало, что человек, не имевший систематического экономического образования, не связанный с решением экономических проблем даже эпизодически, будучи профессиональным математиком, причем не прикладником, а очень крупным теоретиком, исключительно глубоко разбирался в экономике, видел причины многих явлений – глядел вглубь. Его суждения иногда были парадоксальны... Он, возможно, благодаря своему математическому мышлению или природному складу ума как-то проникал внутрь проблем и это давало блестящий результат. Идеи Канторовича осуществили в экономической науке огромный прорыв и положили начало очень широкому направлению исследований. Он дал совершенно новый инструментарий исследований как теоретических экономических проблем, прежде всего, связанных с экономическим равновесием, с экономической динамикой, так и прикладных вещей, связанных с эффективностью»* [72].

Как уже говорилось, книга [24] содержала постановку задачи минимизации линейной функции на множестве, задаваемом линейными ограничениями типа равенств и неравенств. Леонид Витальевич разработал теорию этих задач и предложил методы их решения. После работы [24] Канторович продолжил исследования математических методов экономики, и уже через год были готовы две работы. Первая работа – заметка [30] – содержала наиболее общую математическую трактовку предложенного автором вариационного принципа и метода разрешающих множителей, и также общую формулировку условий экстремума при наличии ограничений в бесконечномерном пространстве. Вторая – статья [54], которая была впервые доложена в 1940 г. Хотя эта работа и носила чисто прикладной характер, она также содержала постановку и решение ставшей классической транспортной задачи. Продолжением последней стала статья 1942 г. [41], рассматривающая бесконечномерный аналог транспортной задачи.

2.3. Исследования Л. В. Канторовича довоенных лет и современная наука. 2.3.1. Положение работ Канторовича в истории оптимизационных методов экономики. В классической математике задачи на условный экстремум рассматривались только для ограничений типа равенств, и в этом случае в качестве аппарата для их решения использовалось правило множителей Лагранжа. Сам Лагранж, если бы исследовал неравенства, то, вероятно, мог бы получить результаты и для общего случая, однако он их не рассматривал: у него были исключительно равенства и для них – правило множителей Лагранжа. Когда все фигурирующие в задаче объекты удовлетворяли условиям гладкости и условия представлены только в форме равенств, то нужно было поступать с $\mathcal{L}$, как будто бы переменные независимы, то есть просто дифференцировать $\mathcal{L}$ по x. Если же рассматривается выпуклая экстремальная задача с неравенствами, то здесь уже необходимым условием является следующее. Во-первых, сама $\mathcal{L}$ достигает минимума: если $\hat{x}$ – решение, то существует такое $\hat{y}$, что выполнено условие минимума: $\min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \mathcal{L}(x, \hat{y}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y})$. Во-вторых: $\hat{y} \geq 0$, и должно быть выполнено условие дополняющей нежесткости: $\langle \hat{y}, A\hat{x} - b \rangle = 0$. Необходимое условие получил Каруш (о нем чуть ниже).

В то же время изучением собственно систем неравенств в отрыве от задач минимизации занимались Ж. Фурье, Г. Минковский, Г. Вейль и другие. И хотя ими были достигнуты значительные успехи, и созданный во время их исследований аппарат позволяет получить условия экстремума в задачах с ограничениями–неравенствами, первые работы по экстремальным задачам с ограничениями общего вида появились только в конце 30-х – начале 40-х гг. XX в.

К следующему периоду можно отнести исследования Чикагской школы (Г. Блисс, О. Больца, Е. Макшейн, Л. М. Грейвс, М. Р. Хестенс и др.), для представителей которой характерен интерес к возможно более широкой постановки вариационных задач. В этой связи надо упомянуть исследования Ф. Валентайна 1937 г. по условиям экстремума для задач вариационного исчисления при наличии разного рода ограничений типа неравенств; В. Каруша, исследовавшего гладкие конечномерные задачи минимизации с общими ограничениями и пришедшего в 1939 г. к условиям экстремума I и II порядков, и Ф. Джона, который в качестве темы исследования избрал экстремальные проблемы в геометрии и получил сходные результаты.

Интерес к данному направлению появился не сразу. Так, например, Каруш, получив результаты, написал диссертацию, защитил ее в Чикаго, но она нигде не была опубликована, и никто про это, соответственно, не узнал. И потом, когда вдруг выяснилось, что это направление действительно очень важно, это же (необходимые условия) разработали Х.У. Кун (*H. W. Kuhn*) и А.У. Таккер (*A. W. Tucker*).

В СССР, как уже было сказано, пионером в этой области был Л. В. Канторович. Первая его работа этой тематики вышла в 1939 г. и содержала постановку задачи минимизации линейной функции на множестве, задаваемом линейными ограничениями типа равенств и неравенств. Он разработал теорию этих задач и предложил некоторые методы их решения. В 1940 г. появилась его заметка, содержавшая общую формулировку условий экстремума при наличии ограничений в бесконечномерном пространстве. Но эти работы, как и те, что упоминались в связи с исследованиями чикагской школы, не получили единодушного признания и широкого распространения.

Значительно позднее, в конце 1940-х гг., в США вновь возвращаются к этим вопросам. Основными действующими лицами здесь стали Дж. Б. Данциг и, частично, фон Нейман. Тогда же вошло в употребление название "линейное программирование". О рождении названия «ЛП» Данциг в своих воспоминаниях говорил так: «Военные свои различные планы или намечаемые графики учений, снабжения и развертывания воинских подразделений называют программами. Впервые проанализировав задачу планирования из Военно-воздушных сил и увидев, что она может быть сформулирована в виде СЛН, я дал моей первой статье название «Программированиев линейной структуре» («Programming in a linear structure»). Летом 1948 г. мы с Купмансом посетили корпорацию RAND. В один из дней мы прогуливались вблизи побережья Санта-Моника. Купманс спросил: «Почему бы “программирование в линейной структуре” не сократить до “линейного программирования”?». Я ответил: «Отличная идея! Начиная с этого момента, так и будет». Очень важную роль сыграл именно Данциг, так как под воздействием его исследований и организационной деятельности выяснилось, что данное направление имеет очень большое значение, в результате чего ученые из разных других областей стали проявлять большой интерес к этой области), и туда направили свои усилия люди, которые не имели отношения ни к экстремальным задачам, ни к теории неравенств. . Появились работы Д. Гейла, Г. Куна, А. У. Таккера; затем присоединились и другие ученые (например, Ки Фань). Они все работали в рамках одного временного промежутка и в сходных ведомствах.

Естественным развитием ЛП стало его обобщение на нелинейный случай, получившее в общем случае название математического программирования, а при выпуклых минимизируемой функции и ограничениях – выпуклого программирования. Основными авторами, после работ которых по условиям экстремума и методам его нахождения эти направления стали широко известны и начали активно разрабатываться, были Г. Кун, А. У. Таккер и Р. Курант.

Также прослеживается родство этих вопросов с теорией задач оптимального управления, которая появилась в результате взгляда на них с несколько иных позиций. Здесь необходимо отметить достижение таких ученых как Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и Р. В. Гамкрелидзе, сформулировавших и доказавших необходимые условия оптимальности в форме так называемого принципа максимума. Сходными вопросами занимался так же Р. Беллман, а позднее появился и цикл работ А. Я. Дубовицкого и А. А. Милютина, Б. Н. Пшеничного, Л. Нейштадта, Г. Халкина, Дж. Варги и др., в которых были предложены общие схемы получения условий экстремума для абстрактных задач оптимизации с ограничениями, позволяющие охватить и теорему Куна–Таккера, и принцип максимума, в то время как в исследованиях Р.Рокафеллара получил завершенную форму выпуклый анализ, оказавшийся исключительно удобным аппаратом исследования экстремальных задач.

2.3.2. Связи с экстремальными задами, функциональным анализом, дискретной математикой. Канторович уже перед войной стал создателем замечательной школы в области функционального анализа. Он часто упоминал о большом влиянии этих идей на его творчество при разработке ЛП, поэтому видится уместным показать некоторые связи этих областей. Сходным образом понимал ситуацию Дж. фон Нейман; его основная теорема теории игр, модели экономического поведения и другие экономико-математические результаты несут явный отпечаток идей функционального анализа и двойственности. При таком подходе, двойственность естественно рассматривается в терминах функционального анализа. Разрешающие множители представляют, по существу, решение двойственной задачи (эта терминология появилась значительно позднее).

Как пишет А.М.Вершик: «*Теория двойственности линейных пространств с конусом* (здесь и деле в этой цитате курсив наш. – *А.А.*) дает естественный язык для задач линейного программирования в пространствах произвольной размерности… *Теорема Хана–Банаха и теоремы линейной отделимости* – фундаментальные теоремы классического линейного функционального анализа – есть чистейший выпуклый геометрический анализ. То же относится и к общей *теории двойственности линейных пространств.*

Классическая теория линейных неравенств Г. Минковского – Г. Вейля в современной форме появилась в работе Г. Вейля тридцатых годов чуть раньше работ Л. В. Канторовича – эта связь особенно прозрачна. *Теорема об альтернативах, леммы Фаркаша и т.д., двойственность Фенхеля–Юнга в теории выпуклых функций и множеств* – все это объединилось с теорией ЛП уже в пятидесятые годы. Однако заслуга Леонида Витальевича, по-видимому, не сразу узнавшего обо всех этих связях, в том, что он нашел единый подход, базирующийся на идеях функционального анализа и вскрывающий идейную суть вопроса. Это одновременно давало и базу для численных методов его решения. Не преувеличивая можно сказать, что функциональный анализ стал фундаментом всей математической экономики» [72, с. 141].

Если смотреть хронологически, то взгляды Канторовича прежде всего перекликается с теорией наилучшего приближения, и, в первую очередь с исследованиями Крейна по L-проблеме моментов. Сам «Крейн одним из первых обратил внимание на это» [72, с.141].

Хотя экономические проблемы, по своему существу, являются конечными (так как имеется лишь ограниченное множество продуктов и ресурсов, а время можно считать дискретным), конечные модели получаются слишком громоздкими и, соответственно, необозримыми для анализа и для расчета. По этой причине гораздо эффективнее вместо них оказывается использовать родственные им непрерывные континуальные модели. Такова, например, модель развития (роста) при техническом прогрессе с вмененными основными фондами (Р.Солоу, Л.В.Канторович), которая описывается функциональным уравнением, в свою очередь хорошо поддающиеся не только общему теоретическому анализу, но и практическому расчету.

Для проведения исследований экономических моделей часто применяются различные *численные методы* нахождения решений. Как показала практика, наиболее плодотворными среди них оказались следующие их группы:

1. Метод наискорейшего спуска и градиентные методы.
2. Методы ньютоновского типа.
3. Общая теория приближенных методов.
4. Принцип мажорант и методы последовательных приближений.

Сейчас эти методы хорошо изучены, они широко представлены в литературе по функциональному анализу и во многих работах по различным разделам прикладной математики. С их помощью часто можно установить на основании проведенных расчетов существование решения, область, в которой оно единственно, а также и некоторые другие свойства этого решения. Как известно, Леонид Витальевич в свое время сам очень многое сделал для развития данного направления. Так, например, в работах [51, 23] разрабатывается общая теория методов приближенных вычислений (демонстрируются различные варианты применения функционального анализа для изучения проблем вычислительной математики), основанная на следующей идее: пространство, в котором задано исходное уравнение, отображается на более простое пространство; а уже в этом более простом пространстве ведется исследование приближенного уравнения. Канторович доказал достаточно общие теоремы, дающие возможность установить разрешимость приближенного уравнения, а также сходимость приближенного решения к точному решению в зависимости от свойств исходного уравнения. Также Леониду Витальевичу удалось получить ряд результатов, который позволяет на основе разрешимости приближенного уравнения устанавливать существование точного решения исходной задачи и даже определять область его расположения.

Данная тематика напрямую связана со следующей – *теорией K-пространств*, которая является одним из основных достижений Леонида Витальевича в функциональном анализе. Среди прочих она имеет и такое значение: При построении банаховых пространств в качестве нормы вместо чисел можно использовать элементы такого пространства, конечномерного или бесконечномерного. Например, в качестве нормы функции берется не ее максимумом на интервале, а набор локальных максимумов на подынтервалах, что дает значительно более точное описание. Применительно к экономике этот подход оказался полезен при агрегировании, если оно делается более детальным, чем обычная стоимость, образом. Так при применении метода агрегирования экономических систем появляется возможность понижения размерности и при этом – исследования близости приближенного решения (расположенного в аппроксимирующем пространстве, которое получается агрегированием переменных), принимаемого при использовании агрегированной модели, к искомому решению (в исходном пространстве).

С другой стороны важно заметить, что ЛП тесно связанно и с дискретной математикой**.** Так основную задачу теории антагонистических матричных игр с нулевой суммой (а именно теорему о минимаксе) связал с ЛП (теоремами двойственности) еще фон Нейман (см. воспоминания Данцига, цитированные в работе [12]). Более того, в итоговом доказательстве теоремы фон Неймана о минимаксе фактически содержалась теория двойственности. По этой причине, можно сказать, что оба эти подхода чрезвычайно полезно рассматривать в их взаимосвязи, так как в этом случае полнее раскрываются идеи каждого из них, а изучаемая задача и пути ее решения становится более ясными.

Приближенные методы находят в экономике естественное применение: сложной модели, расположенной в некотором пространстве, сопоставляется более простая, с меньшей размерностью модель в этом же или другом пространстве посредством однозначного или одно-многозначного соответствия. При этом, как уже говорилось, принципы и теоремы общей теории часто дают возможность на основе исследований более простой системы дать точные заключения о начальной системе: устанавливать существование решения, его единственность, асимптотические свойства и т.д.

Теорема Хана – Банаха – Канторовича. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейных функционалов в аналитической и геометрической формах ((см., соответственно, Теорему 2.1 и Теорему 2.2, а так же Определение 2.1 в Приложении 1)), имеющая особое значение для выпуклого анализа (ВА), относится к основополагающим: на этой базе были разработаны теоремы об отделимости (см. Теорему 2.3 и Теорему 2.4 в Приложении 1), являющиеся неотъемлемой частью ВА. На них строится весь дальнейший аппарат, в частности, важнейшая теорема о достижении минимума выпуклом функционалом на выпуклом множестве, замкнутом относительно сходимости по мере (см. Теорему 2.5 в Приложении 1). Важнейший шаг при исследовании экстремальных задач для выпуклых числовых функционалов – применение теорем отделимости [50, Т. III, §2], основанных на теореме Хана–Банаха о продолжении линейных функционалов (см. [50, Т. II, §4.1]). Очень ценным для разных приложений оказалось то, что теорема Хана–Банаха обобщается на случай продолжения мажорируемых линейных операторов со значениями в *K*-пространстве [42]. Вот этот результат [53]:

Теорема: Пусть X – произвольное векторное пространство а Y – *K*-пространство. Пусть $p: X \to Y$ – отображение, обладающее свойствами калибровочной функции относительно порядка в Y, т.е. $p(x_1 + x_2) \le p(x_1) + p(x_2);\quad p(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot p(x),\quad \lambda \ge 0.$ Предположим, что X_0 – линейное подмножество в X и что линейный оператор $U_0 : X_0 \to Y$ удовлетворяет неравенству

$$U_0(x) \le p(x) \tag{2.4}$$

для всех $x \in X_0$. Тогда оператор U_0 может быть распространён на всё пространство X с сохранением линейности и вышеназванного условия, то есть существует линейный оператор $U: X \to Y,$ совпадающий с U_0 на X_0 и удовлетворяющий неравенствам $-p(-x) \le U(x) \le p(x),\quad x \in X$.

Эта теорема позволяет изучать выпуклые операторы $F: X \to Y$, где X – векторное пространство, а Y – *K*-пространство, то есть операторы, для которых справедливо неравенство Йенсена:

$$F(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \le \alpha \cdot F(x) + \beta \cdot F(y),\quad \alpha, \beta \ge 0;\quad \alpha + \beta = 1;\quad x, y \in X.$$

Таким образом, теория *K*-пространств нашла широкое применение в выпуклом анализе при исследовании экстремальных задач и в экономико-математических моделях.

Теория выпуклых операторов и её приложения к исследованию задач выпуклого программирования в *K*-пространствах подробно изложена в книге [2] (см. также обзор [67]. Также об этих вопросах можно прочесть в монографии [50].

2.3.3. Влияние экономических задач на математический аппарат. Особый интерес представляет «*обратная связь*» математических методов экономики и чистой математики, когда разработанный в связи с запросами экономики математический аппарат позволил получить существенное продвижение и в рамках самой математики.

Во-первых, теория СЛН развилась на сто лет позже, чем теория СЛУ, и инициировано это было именно необходимостью решения задач, продиктованных потребностями экономики того времени.

Во-вторых, приведем другой важный пример – транспортную задачу. Эта задача была математически оформлена и получила эффективные методы решения (например, метод потенциалов) около 1940 г. Первоначальное ее изложение под названием задачи о перемещении масс было дано в 1942 г. Л. В. Канторовичем в статье [41], в которой исследуется бесконечномерный аналог транспортной задачи, которая была изучена в работе [54]. Возникнув сначала из экономики, в данной статье задача уже формулировалась в абстрактном виде для произвольного метрического пространства, то есть получила значительные обобщения. Более того, в данной работе естественным образом введено понятие расстояния между двумя множествами одинаковой массы в компакте как минимальный объем затрат по перемещению одной массы из одного места в другое. Эта метрика впоследствии нашла свое применение как в теории вероятностей для распределений, так и собственно в функциональном анализе, приведя к ряду новых результатов.

На этом значение данной работы не ограничивается. Так на основе работы 1942 г. Леониду Витальевичу в 1948 г. в статье [29] удалось получить более полное решение проблемы Монжа. Таким образом, мы видим, как математические методы, рожденные в качестве ответа на запрос со стороны экономики, пройдя некоторый путь развития, оказались способными дать сильный толчок для развития других, не связанных с ними напрямую, областей чистой математики и позволили решить давние чисто математические задачи, подойдя к ним с новой стороны. Более подробно это описано в пункте 3.4 (другие примеры применения ЛП к проблемам чистой математики см.в [14], [18]).

Как уже говорилось в пункте 1.3. о математическом творчестве Л. В. Канторовича конца 1920-х и 1930-х гг, многие из методов функционального анализа, разработанных Канторовичем в 1930-е гг., со временем нашли свое применение в экономических моделях и, более того, во многом определили их дальнейшее развитие. В первую очередь к ним относятся идеи нормировки исходного пространства элементами полуупорядоченных пространств и сведения исходной задачи к исследованию приближенного решения в более простом пространстве (понижение размерности при агрегировании).

2.4. Результаты работ довоенных лет с современной точки зрения.

1) Поставленна задача ***C*** при условии исключения особых случаев эквивалентна основной задаче ЛП. Ее можно также сформулировать следующим образом:

Задано выпуклое многогранное множество M и направленная прямая (ось) B. Тогда прямая задача звучит так: найти точку из M, лежащую на оси B и притом как можно выше. А двойственная задача – так (по существу, эта формулировка содержится в [86]): найти гиперплоскость, пересекающую ось B как можно ниже и разделяющую M и положительную часть оси B.

2) Для этой задачи, которую можно трактовать как задачу об экстремуме линейных форм, связанных линейными соотношениями и ограничениями, или как задачу о нахождении максимума вогнутой кусочно-линейной функции на выпуклом множестве (задачи ***A*** и ***C***), найдены необходимые и достаточные условия оптимальности решения, основанные на существовании в максимальной точке (в

«пространстве продукции») опорной гиперплоскости, коэффициенты которой (разрешающие множители) есть решение двойственной задачи. То есть, дана характеристика оптимального решения через двойственные переменные (разрешающие множители), но в этом знании нет необходимости – достаточно использовать свойство опорной гиперплоскости.

3) На основании необходимых и достаточных условий были получены методы решения. Эти конечные процессы, названные методами разрешающих множителей, по своей эффективности и универсальности не уступают разработанным позже методам, например, СМ. Метод корректировки множителей [24], входящий в эту группу методов, совпадает, по существу, с методами одновременного решения прямой и двойственной задач. Он ближе всего к разработанному в 1957 г. методу Данцига–Форда–Фулкерсона [19]. В 1940 г. издана статья Канторовича [30] – чисто математическая версия работы, выраженная в терминах функционального анализа и алгебры.

4) Для транспортной задачи разработана эффективная модификация метода разрешающих множителей – *метод потенциалов*, описанный в работах [54, 41] и распространенный позже под названием *метода последовательного улучшения плана* на другие задачи в работе [55]. Он наиболее близок к пересмотренному (revised) СМ. Также в [54] дан критерий оптимальности решения, поставлены более общие задачи. В 1942 г. вышел абстрактный вариант этой работы [41] с бесконечномерными обобщениями задачи и методов ее решения (подробно о взаимоотношении разных методов см. [75, с. 403–419]).

Глава 3. Линейное программирование в работах Л. В. Канторовича 1930–1950-х годов.

Все последовавшие за опубликованными в книге [24] исследования Канторовича в области математических методов экономики можно разделить на две группы: те, которые были ориентированы на практическое применение и носили более частный характер, и те, которые имели большее теоретическое значение, не относясь к конкретным экономическим примерам (см. также [8], [9]).

3.1. Применение ЛП к частным задачам. К работам чисто прикладного характера-относятся две статьи 1949 г.: работа [46], содержащая решение задачи сочетания максимальной эффективности распиловки деревоматериалов с получением заданного ассортимента продукции, и вторая работа [54] уже упоминалась выше в пункте 2.3. К сказанному можно добавить только, что в ней содержится также анализ задач о наиболее эффективных перевозках грузов и алгоритмы решения этих задач в виде созданного авторами метода потенциалов.

В 1951 г. вышла книга [55], в которой содержится отчет о применении ЛП к вопросу рационального раскроя материалов, даны новые приемы решения задач ЛП и на этой базе – подробный анализ проблем экономии материала при раскрое.

Еще одной работой экономического направления стала работа 1958 г. [21], разъясняющая связи ЛП с оптимальным решением задач оперативно-производственного плаунирования.

Столь широкий круг применений разработанных Канторовичем методов является лучшей иллюстрацией одного из творческих принципов Петербургской–Ленинградской школы, ярким представителем которой являлся Леонид Витальевич: «Нет ничего практичнее хорошей теории».

3.2. Методы и их применение к математическим проблемам. Как уже говорилось, творчеству Канторовича присуще взаимопроникновение прикладных и теоретических исследований. Это произошло и с экономико-математической тематикой. Так ранее уже упоминалась работа 1940 г. [30]; а в статье 1957 г. [34] дана постановка и анализ общей задачи производственного планирования.

Знаменитая работа [52] 1959 г., за которую Леонид Витальевич был удостоен Ленинской премии в 1965 г., также сочетает прикладные и теоретические исследования, которые были, по возможности, отделены друг от друга и изложены в разных частях книги. Эта работа подытоживает предыдущие исследования. В одной части она содержит анализ разработанных экономических приложений ЛП, в другой – наиболее полное изложение математической теории и вычислительных методов ЛП.

Продолжением упомянутой выше работы [54] стала статья 1942 г. [41], которую необходимо выделить особо, так как в ней был рассмотрен бесконечномерный аналог транспортной задачи, и которая примечательна еще и тем, что, основываясь на ней, в 1948 г. [29] Канторовичем было получено более полное решение известной проблемы Монжа.

Особняком стоят еще две работы, выполненные совместно с Г.Ш. Рубинштейном: статьи 1957 г. [59] и 1958 г. [58]. Они посвящены обобщениям ЗЛП на пространства вполне аддитивных функций множеств.

3.3. Признание вклада Л.В. Канторовича в экономическую науку. Сегодня авторитет Канторовича в качестве одного из людей, основавших школу функционального анализа, и родоначальника ЛП общепризнан и не вызывает никаких сомнений. Изданная в 1948 г. его большая статья [51] отмечена Сталинской премией. Несмотря на то, что само название статьи звучало тогда парадоксально – в сознании большинства ученых того времени между функциональным анализом и прикладными задачами лежала пропасть – развитые в ней идеи стали классическими. Как отметил С.Л.Соболев : «Уже через несколько лет представить вычислительную математику без функционального анализа было так же невозможно, как и без вычислительных машин» [72, с.3].

Канторович всегда опережал свое время, что вызывало трудности восприятия и продвижения его идей. Такая ситуация сложилось и вокруг работ в области экономики, только в этом случае она усугублялась тем, что надо было иметь дело не с абстрактной математической материей, а с ортодоксальными и политизированными взглядами консервативно и враждебно настроенных людей.

В 1959 г. вышла книга [52], вызвавшая резкие нападки ортодоксальных экономистов и острые дискуссии, продолжавшиеся до середины 1960-х гг. Впрочем, последние имели и положительный эффект: за ними следили ученые в СССР и на Западе. Тогда же переводились, получая всемирную известность, ранние работы Канторовича по ЛП, обеспечившие его приоритет (например, [191]). Вскоре пришло признание в СССР: 1964 г. – избрание действительным членом Академии наук по Отделению математики, 1965 г. – Ленинская премия. Заключительная точка в вопросе признания его работ в мире была поставлена в 1975 г. вручением ему совместно с Т.Купмансом Нобелевской премии «за вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике». К сожалению, это мало помогло его попыткам внедрения новых идей в экономическую практику: «XX век» в виде политической ситуации в СССР постоянно препятствовал. Его противники использовали все доступные им методы нападения, однако Канторович не сдавался. Тем ни менее, надо отметить, что он умел ладить с властью и был достаточно гибок: он отступал на время, но затем возвращался к продвижению своей позиции.

Иногда критика доходила до абсурда. Пояляющиеся в ходе применения предложенного Канторовичем метода множители лагранжа он сам называл разными словами (сейчас они называются двойственными оценками и отражают, насколько важны данные ресурсы) и развил на их основе теорию дифференциальной ренты. Однако, на Западе они чаще фигурировали под именем «теневых цен» ресурсов, а Марксизм-Ленинизм ни с чем теневым даже в терминологии ничего общего иметь не мог. Сам Канторович чаще всего назывл их «объективно обусловленными оценками», чтобы отвести претензии, но противники продолжали атаковать: «Это против Маркса!», а он старался убеждать, что это – лишь оценки.

Потом, когда умер И.В.Сталин, было совещание, где были Соболев, Ляпунов, а также Колмогоров А.Н. и прочие. И они действительно защищали Канторовича, но все говорили что-то общее: «Да, Канторович – великий…», а Андрей Николаевич, что было для того времени поразительно, говорил по-существу и сказал (он иногда говорил вещи тогда невозможные), что вообще не надо бояться слов: у Маркса – одни слова, у Канторовича – другие, но и те, и другие могут отражать какую-то истину, поэтому нельзя прицепляться.

3.3.1. Ленинская премия. Чтобы понять тяжесть пути при продвижении и внедрении в практику экономических идей Леонида Витальевича в СССР, обратимся к истории получения им Ленинской премии. В первый раз Канторовича выдвигали в 1962 г. за работы по ЛП. Но тогда признанию не было суждено осуществиться. Следующее выдвижение состоялось в 1964 г., когда были представлены работы: Л. В. Канторовича [52], В. С. Немчинова [80], В. В. Новожилова [81]. Это были основополагающие труды тогда нового направления. Газета «Известия» опубликовали статью А. Г. Аганбегяна, А. Л. Вайнштейна и Ю. А. Олейника «Первооткрыватели» [1] о достижениях кандидатов. Но сразу нашлись противники: «Верные слуги «марксистской» экономики А. Боярский и Я. Кронрод направляют в газету «Известия» письмо «По поводу книги Л. В. Канторовича «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов», в которой они обвиняют Канторовича в преступлениях против «марксистской трудовой теории стоимости» и т. д. Одновременно Боярский и Кронрод направляют аналогичную кляузу в Комитет по Ленинским премиям. На это А. Н. Колмогоров даёт достойный ответ в публикуемом письме от 2 апреля 1964» [73].

Через некоторое время война за истину подошла к своей кульминации: в газете «Правда» была подготовлена большая статья с громким названием «В плену теоретических ошибок», которая была подписанная четырнадцатью апологетами «единственно верной» экономической теории. Среди них были академики С. Г. Струмилин и К. В. Островитянов. Статья повторяет слово в слово обвинения вышеупомянутого письма. Отметим, что критике подверглась только работа

Канторовича. К счастью, серьезный ответ С. Л. Соболева и А. А. Ляпунова не заставил себя ждать: в «Правду» пришла статья «Математика и экономика».

Две эти статьи были готовы к печати, но все же не были опубликованы. Возможно, по причине указания «сверху». Ленинская премия по экономике была вручена всем трем авторам, но только в 1965 г. Вероятно, это было связанно с изменением политической ситуации: Председатель правительства А. Н. Косыгин наметил программу экономических реформ, в которой работы Канторовича могли быть использованы. Возможно также, что на решение Комитета по Ленинским премиям повлияли академики М. В. Келдыш и В. А. Кириллин.

Сначала официальной мотивировкой выдвижения на премию была «разработка математических методов решения задач планирования и управления народным хозяйством», но к 22 апреля 1965 г. она изменилась: в «Правде» опубликовано постановление о присуждении трем ученым Ленинской премии «за научную разработку метода линейного программирования и математических моделей экономики». Формулировку изменили, чтобы исключение Канторовича из списка награждаемых стало невозможным.

3.3.2. Международное признание. Международное признание пришло не сразу, были и неприятные моменты. Зарубежные ученые узнали о трудах Леонида Витальевича с большим запозданием. Отчасти причиной этому стало тяжелое время: перед Великой Отечественной войной и во время нее Канторович написал около 20 работ экономико-математической тематики, но лишь две из них были своевременно напечатаны. Первая – заметка 1942 г. [41]. Из нее и узнали на Западе о работах Канторовича по ЛП. Случилось это лишь в 1953 г., когда в работе М. М. Флуда (M. M. Flood) [169] по транспортной задаче появилась ссылка на единственную доступную зарубежному читателю упомянутую выше статью. Вторая – «Рациональные методы раскроя металла» [49], опубликованная в 1942 г. под грифом ДСП (для служебного пользования). Работа Канторовича и Гавурина 1940 г. [54] по транспортной задаче, опубликована лишь в 1949 г. уже после переоткрытия этих результатов на Западе. Так же и знаменитая работа [52] была направлена в Госплан в 1942 г., а издана только в 1959 г.

Эти причины затруднили мировое признание приоритета советской науки в разработке методов ЛП. Но научная значимость и приоритет Канторовича все же были признаны мировой общественностью, о чем свидетельствует, например, переписка Леонида Витальевича с Т. Купмансом, который сыграл огромную роль в «открытии» советских работ на Западе (см.: [73]). В письме от 12 ноября 1956 г. он пишет: «Недавно мне представился случай познакомиться с экземпляром Вашей статьи «О перемещении масс»… Мне сразу стало ясно, что частью Вы развивали параллельно, но в большей части предвосхитили развитие транспортной теории в США, разработка которой началось в период с 1941 г… Ваша краткая статья в замечательно сжатой форме содержит математическое существо того, что содержится в этих работах» [73].

В 1958 г. работа [41] была перепечатана в «Management Science»; в 1960 г. там же был опубликован [191] – перевод книги [24]. Вводную заметку к этому переводу писал Т. Купманс. С последней публикацией связан неприятный инцидент, напоминающий историю присуждения Ленинской премии и заключающийся в публикации профессорами Чарнсом и Купером статьи «весьма странного тона и содержания» (см.: [73, с. 330]).

Об успешном завершении признания роли и приоритета работ Канторовича в развитии ЛП говорят многочисленные почетные степени и звания в наиболее уважаемых организациях всего мира. А в довершение – присуждение ему совместно с Т. Купмансом Нобелевской премии 1975 г. по экономическим наукам «за вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике».

3.4. Полное решение проблемы Монжа на основе линейного программирования. Мы покажем очень интересное явление: ситуация, когда у метода, разработанного с целью решения достаточно конкретной практической задачи, сфера применения оказалась намного больше, чем первоначально планировавшаяся; и, более того, в дополнение к этому, метод оказался в состоянии оказать влияние на область чистой математики посредствам демонстрации совершенно нового (и значительно более простого, чем ранее) способа для решения классических математических задач, которые были сформулированы несколькими столетиями ранее. Речь идет о линейном программировании и его связи с полным решением известной проблемы Монжа, имеющей более чем 200-летнюю историю.

В 1781 г. выдающийся французский математик Гаспар Монж (Gaspard Monge, 1746–1818), изучая вопрос о том, как можно при строительстве военных укреплений самым рациональном образом переместить землю из насыпи в выемку, сформулировал в [218] следующую задачу: необходимо разделить два равновеликих объема на бесконечно малые партии и согласовать их друг с другом таким образом, чтобы перевозимые объемы земли и суммарные интервалы перевозки продукции были минимальны.

Несмотря на то, что данной проблемой занимались многие известные математики, строгое доказательство гипотезы было дано П. Аппелем (Paul Appell) только в 1884 г. в его 200-страничном мемуаре (см. теорему Аппеля-Монжа в [108]). Первичное доказательство Аппеля было чрезвычайно сложным и пространным, хотя позже автору удалось сделать его проще и доступнее [107]. Тем не менее, оно продолжало оставаться весьма сложным и основывалось на продвинутых теоремах из вариационного исчисления, которое уже было хорошо развито к тому моменту.

Однако, доказательство гипотезы получается (причём для более широкого класса задач перемещения масс) в виде простого следствия признака оптимальности перемещения, разработанного Л.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным в [54] в связи с решением транспортной задачи и обобщённого затем Канторовичем в работе [41]. В итоге формулировка этой задачи в терминах непрерывных распределений масс стала называться задачей Монжа-Канторовича (см. также [106]).

Мы собираемся начать с терминологии и формулировки двух главных проблем: Транспортной задачи и Задачи перемещения масс. Затем вернемся к основному аспекту данного параграфа, заключающемуся в анализе связей двух этих проблем с задачей Монжа. (Если быть более точными, мы покажем, каким образом возможно применить знания, накопленные в ходе исследования этих двух проблем, для того, чтобы получить решение проблемы Монжа в качестве простого их следствия).

3.4.1. Транспортная задача. Проблема, которая представляется особенно важной для нас в связи с рассматриваемой в данной работе темой – задача перемещения масс – имеет прямую связь с такой простейшей задачей ЛП, нашедшей огромное число приложений при проведении планирования для железнодорожного, автомобильного, воздушного и водного транспорта.

Пусть компоненты данного вектора

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \tag{3.1}$$

(точнее, их абсолютные значения) обозначают объемы производства (в случае $\varphi_k \leq 0$) или потребления (в случае $\varphi_k > 0$) некоторого однородного продукта в заданных m пунктах (например, городах или станциях) с номерами k из множества $K = \{1\ , 2, \ldots, m\}$. Кроме того, предполагается, что общий объем потребления совпадает с общим объемом производства, другими словами:

$$\textstyle\sum_{k \text{ из } K} \varphi_k = 0. \tag{3.2}$$

План перевозок определяется выбором матрицы

$$\psi = [\psi_{ij}]_{\,i,\, j \text{ принадлежат } K}, \quad \psi_{ij} \geq 0, \quad i \text{ принадлежит } K, j \text{ принадлежит } K, \tag{3.3}$$

элементы которой задают объемы перевозок из каждого пункта i в каждый пункт j в соответствии с этим планом. Очевидно, что в ходе осуществления выбранного плана перевозок в каждом пункте k их K импортируется $\sum_{i \text{ из } K} \psi_{ik}$ и экспортируется $\sum_{j \text{ из } K} \psi_{kj}$ единиц рассматриваемого продукта, что в свою очередь означает, что матрица (3.3) определяет допустимый план транспортировки, если отношения баланса удовлетворяют таким условиям:

$$\textstyle\sum_{i \text{ из } K} \psi_{ik} - \sum_{j \text{ из } K} \psi_{kj} = \varphi_k, \ k \text{ принрадлежит } K. \tag{3.4}$$

Что касается общей стоимости, отвечающей осуществлению каждого такого плана транспортировок (3), она в данной модели определяется следующим образом:

$$\tau(\psi) = \sum_{i \text{ из } K} \sum_{j \text{ из } K} r_{ij}\ \psi_{ij}, \qquad (3.5)$$

где r_{ij} – данные фиксированные неотрицательные значения, которые показывают необходимые затраты на транспортировку единицы продукции из пункта i к пункту j.

В результате получаем, что система допустимых планов перевозки определяется множеством Ψ_φ, состоящим из неотрицательных решений (3.3) системы линейных равенств (3.4). Для того чтобы план являлся наиболее экономичным (такой план принято, как правило, называть оптимальным планом транспортировки φ из $\Psi_{\varphi)}$, требуется, чтобы он обладал таким свойством: общая стоимость (3.5) должна быть при его реализации наименьшей.

Используя общие результаты теории линейного программирования (или прямые рассуждения), легко проверить, что сформулированная выше задача экстремума всегда разрешима. И допустимый реальный план перевозок (3.3) является оптимальным тогда и только тогда, когда существует такой вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, что:

$$u_j - u_i \leq r_{ij},\ i \text{ принадлежит } K,\ j \text{ принадлежит } K, \qquad (3.6)$$

причем $\psi_{ij} \cdot (u_j - u_i - r_{ij}) = 0,\ i$ принадлежит K, j принадлежит K, (3.7)

Требование (3.7) означает, что если в допустимом плане, который мы рассматриваем, планируется ненулевая транспортировка ψ_{ij} из пункта i к пункту j, тогда соответствующее неравенство (3.6) можно рассматривать как равенство (подробнее в [50, с. 294–297]).

3.4.2. Задача перемещения масс. Бесконечномерный аналог (лучше сказать – обобщение) для транспортной задачи, который описан ниже, изучался впервые в 1942 г. Л. В. Канторовичем и получил обобщение в [41], см. также [29, 58, 59], где он рассматривает общую проблему оптимального перемещения массы в компактном метрическом пространстве.

В данной задаче мы имеем, в отличие от первой проблемы, конечное число пунктов, которые заменены произвольным метрическим компактом K с метрикой $r(t, s)$, которая характеризует затраты, связанные с перемещением единицы массы из любого пункта t, принадлежащего компакту K, в любой пункт s, принадлежащий компакту K. Аналогом вектора (3.1), удовлетворяющего условию (3.2), является счётно-аддитивная функция φ, заданная на системе B борелевских множеств компакта K и положительная вариация которой $\varphi_+(K)$ совпадает с её отрицательной вариацией $\varphi_-(K)$. Другими словами, входящий и выходящий потоки равны, то есть

$$\varphi(K) = \varphi_+(K) - \varphi_-(K) = 0, \qquad (3.8)$$

Здесь стоит напомнить, что для e, принадлежащего B:

$\varphi_+(e) = \sup\{\varphi(e'): e'$ принадлежит B, e' – подмножество $e\}$,

$\varphi_-(e) = \sup\{-\varphi(e'): e'$ принадлежит B, e' – подмножество $e\}$.

Для каждого e, принадлежащего B, значения $\varphi_+(e)$ и $\varphi_-(e)$ интерпретируются, соответственно, как требуемое и существующее количество массы на e. Таким образом, условие (3.8) имеет такое же значение, как и условие (3.2) в случае конечного числа пунктов.

План перемещения массы на компакте K определяется выбором конечной меры ψ, которая определена на σ-алгебре $B^{\sim}$ борелевских множеств компакта $K^{\sim} := K \times K$. В этом случае мера множества $e \times e'$, где e и e' принадлежат B, указывает на количество массы, которое планируется перемещать из e в e'. В дальнейшем эту меру обозначим как $\psi(e, e')$. Такой план является возможным, если он удовлетворяет балансовым отношениям:

$$\psi(K, e) - \psi(e, K) = \varphi(e), \text{ где } e \text{ принадлежит } B, \qquad (3.9)$$

и является аналогом соотношения (3.4) в транспортной задаче.

Совокупность допустимых перемещений ψ, аналогичную описанной выше, будем обозначать через Ψ_φ. А общий объем затрат, связанных с реализацией каждого такого перемещения ψ, можно вычислить с использованием двойного интеграла:

$$\tau(\psi)=\int_{K^\sim} r(t, s)\, d(\psi(t, s)). \qquad (3.10)$$

Таким образом, необходимое оптимальное перемещение характеризуется функцией ψ, принадлежащей Ψ_{φ}, для которой соответствующее значение (3.10) достигает минимума.

Иногда удобнее думать об этой проблеме в несколько других терминах следующим образом.

Пусть R есть метрическое компактное пространство, хотя некоторые из следующих определений и результатов могут быть установлены также для пространств более общего вида. Пусть $\Phi(e)$ является распределением массы, то есть является функцией с набором свойств:

1) определена для борелевских множеств,

2) неотрицательна $\Phi(e) \geq 0$,

3) абсолютно аддитивна: если $e = e_1 + e_2 + \ldots$; $e_i \cap e'_{\mathrm{k}} = 0$ для $i \neq \mathrm{k}$,

то $\Phi(e) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2) + \ldots$.

Пусть $\Phi'(e')$ есть еще одно распределение масс и $\Phi(R) = \Phi'(R) = 1$.

Мы определим как перемещение масс такую функцию $\Psi(e, e')$, определенную для пары (B)-множеств e, e', принадлежащих R:

1) неотрицательны и абсолютно аддитивные по каждому аргументу,

2) такие, что $\Psi(e, R) = \Phi(e)$; $\Psi(R, e') = \Phi'(e')$.

Функция $\Psi(e, e')$ характеризуется объемом массы, которая перемещается из множества e в множество e'. В соответствии с этим здесь стоит также упомянуть, что $\Psi(e, R) = \Phi(e)$; $\Psi(R, e') = \Phi'(e')$.

Пусть $r(x, y)$ является известной непрерывной неотрицательной функцией – работой, необходимой для перемещения единицы массы из пункта x в пункт y.

Мы определим также работу, необходимую для осуществления перемещений данных распределений массы, как следующую функцию, значение которой находится с помощью вычисления двойного интеграла:

$W(\Psi, \Phi, \Phi') = \iint_{KR} r(x, x')\, \Psi(de, de') = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1,\ldots,n;k=1,\ldots,m} r(x_i, x'_k)\, \Psi(e_i, e'_k)$,

где $\{e_i\}$ ($i = 1, \ldots, n$) есть дизъюнкты и $\sum_{i=1,\ldots,n} e_i = R$, $\{e'_k\}$ для $k = 1, \ldots, m$ есть дизъюнкты и $\sum_{i=1,\ldots,m} e'_k = R$, x_i принадлежит e_i, x'_k принадлежит e'_k, а λ есть максимальное из следующих чисел diam e_i ($i = 1, \ldots, n$) и diam e'_k ($k = 1, \ldots, m$).

Данный интеграл существует.

Обозначим минимальную работу, необходимую для перемещения массы при следующих значениях $W(\Phi, \Phi') = \inf_{\Psi} W(\Psi, \Phi, \Phi')$. Так как множество функций Ψ компактно, то очевидно, что существует функция Ψ_0, принимающая минимум, другими словами, – такая функция, для которой мы имеем:

$$W(\Phi, \Phi') = W(\Psi_0, \Phi, \Phi').$$

Однако эта функция не является уникальной. Такое перемещение Φ_0 мы определим как минимальное или оптимальное перемещение.

Мы также будем говорить, что перемещение Ψ из пункта x в пункт y не равно нулю, и будем обозначать это как $x \to y$, если существует перемещение массы из x в y, – другими словами, если для любой окрестности U_x и U_y точек x и y будет верно, что $\Psi(U_x, U_y) > 0$.

Перемещение Ψ называют потенциальным, если существует такая функция $U(x)$, для которой:

1) всегда $U(x) - U(y) \le r(x, y)$,

2) $U(y) - U(x) = r(x, y)$, если $x \to y$.

Можно показать, что описанная проблема экстремума всегда разрешима. И критерий оптимальности перемещения в этом случае не отличается существенно от того, что получен на основе общих результатов ЛП и показан ранее для случая транспортной задачи. Из этого следует, что возможные перемещения ψ, принадлежащие Ψ_φ, являются оптимальными тогда и только тогда, когда существует такая функция $u : K \to R$, что:

$u(s) - u(t) \le r(t, s)$ для t, принадлежащему K, и s, принадлежащему K,

(3.11)

и $u(s) - u(t) = r(t, s)$, если (t, s) принадлежит носителю supp ψ меры ψ, другими словами, если для любых окрестностей e_t и e_s точек t и s имеются строгие неравенства $\psi(e_t, e_s) > 0$.

Следовательно, минимальное перемещение может быть характеризовано следующим образом (с помощью свойства существования особого потенциала для такого перемещения) на основе теоремы, доказанной Л. В. Канторовичем и опубликованной в 1942 г. в статье [41].

Теорема: Для того чтобы перемещение Ψ_0 было минимальным, необходимо и достаточно, чтобы она была потенциалом. Л. В. Канторович установил, что исследование пространственного распределения масс представляет особый интерес, если значение $W(\Phi, \Phi')$ рассматривается как расстояние (для случая, когда $r(x, y) = \rho(x, y)$ есть расстояние). И такой подход представляется в некотором смысле наиболее естественным для исследования метрики в текущем пространстве. Данная теорема представляет большой интерес для нас и является очень полезной, поскольку она может быть успешно применена для решения двух практических задач, описанных ниже.

Задача 1. *Транспортная задача*.

Задача 2. *Планирование территории*. Мы предполагаем, что рельеф местности до планировки – это уравнение поверхности земли $z = f_0(x, y)$,
а $z = f_1(x, y)$ – после планировки (с условием, что $\iint f_0(x, y)\, dx\, dy = \iint f_1(x, y)\, dx\, dy$) и затраты на перемещение кубометра земли из пункта (x_0, y_0) в пункт (x_1, y_1) заданы.

Необходимо определить такой план перемещения масс земли, в котором общая сумма расходов на перемещение будет минимальной.

Задача перемещения массы может быть получена (и была исследована Л. В. Канторовичем) как обобщение рассмотренных ранее практических задач по нахождению способа подключения пункта производства товара, расположенного на железнодорожной сети, к местам потребления этих товаров таким образом, чтобы обеспечить минимальные общие затраты на транспортировку этих товаров. Очевидно, что Транспортная задача есть частный случай описанной выше общей проблемы.

Только через некоторое время после выхода в свет его исследования [41] Канторович заметил, что эта же общая проблема сдержит, как частный случай, еще одну важную проблему, которая гораздо раньше была исследована Г. Монжем в работе о «разрезании и заполнении». И вышеупомянутая теорема может быть с успехом применена для ее анализа.

Формулировка в терминах непрерывного распределения массы стала назваться «Задача Монжа-Канторовича».

3.4.3. Проблема Монжа. Формулировка Монжа Задачи перемещения массы приведена в начале пункта 3.4. В связи с ее исследованием Монж разработал геометрическую теорию конгруэнтности. Что касается самой проблемы, он высказал гипотезу (но не дал строгое доказательство), что необходимые способы переноса массы представляют собой семейство нормальных линий, относящихся к определенному однопараметрическому семейству поверхностей.

Как было сказано выше, классическими методами проблема решается очень сложно. Тем не менее, решение более широкого класса задач получается как следствие признака оптимальности перемещения, разработанного Л.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным (вышеупомянутая абстрактная теорема) в [54, 41].

Лемма: Пусть функция u: $K \to R$ удовлетворяет условию (3.11), и точки t_0, s_0 и z_0 из K такие, что:

$$u(s_0) - u(t_0) = r(t_0, s_0) = r(t_0, z_0) + r(z_0, s_0). \quad (3.12)$$

Путь далее множество

$$Uz_0 = \{z, \text{принадлежащие } K \mid u(z) = u(z_0)\} \quad (3.13)$$

находится между двумя сферами, которые проходят через z_0, и их центры находятся в точках t_0 и s_0. Другими словами, для любой точки z, принадлежащей $U(z_0)$, возникают следующие неравенства:

$$r(t_0, z) \geq r(t_0, z_0),\ r(z, s_0) \geq r(z_0, s_0). \quad (3.14)$$

Принимая во внимание критерий оптимальности, описанный выше, мы можем утверждать, что теорема Монжа-Аппеля справедлива для любой задачи перемещения массы на выпуклых компактах в произвольном евклидовом или гильбертовом пространстве. И если возможные перемещения, определенные мерой ψ, принадлежащей Ψ_{φ}, – оптимальны, то в качестве необходимого может быть принято однопараметрическое семейство эквипотенциальных поверхностей (или другими словами, поверхности уровня) $u(z) = C = \text{const}$, соответствующее функции $u\colon K \to R$ из критерия оптимальности и необходимые способы перемещения массы должны быть нормальными линиями к ним.

Действительно, если такой путь xy из x в y перехватить в точке z эквипотенциальной поверхности, то эта поверхность, в соответствии с первым требованием из определения потенциальности, должна лежать между двумя сферами (с центрами в точках x и y), которые пересекаются в точке z, и тем самым должна быть нормальной к пути xy.

Иными словами: в действительности, если у нас есть перемещение, производимое из пункта t_0 до пункта s_0, то есть (t_0, s_0) принадлежит $\operatorname{supp} \psi$, то открытый отрезок (t_0, s_0) для любого z_0, принадлежащего отрезку (t_0, s_0), в силу леммы совпадает с соответствующей нормалью к поверхности (3.13).

Другая особенность (в доказательстве теоремы Монжа–Аппеля не использовалась) рассмотренной Г. Монжем задачи перемещения массы состоит в том, что в качестве исходной счётно-аддитивной функции $\varphi\colon B \to R$, удовлетворяющей (7), в ней принимается

$\varphi(e) := \mu(e \cap N) - \mu(e \cap M)$ при e, принадлежащим B, где μ – некоторая фиксированная мера (лебегова), а M и N – заданные измеримые множества такие, что $\mu(N) = \mu(M)$.

Подробнее доказательство разобрано в [50, с. 294–311].

Глава 4. Дж. Б. Данциг и линейное программирование.

Джордж Б.Данциг (George Bernard Dantzig, 1914–2005) известен прежде всего как создатель ЛП и СМ. Эти два метода оказали столь большое влияние как на науку, так и на повседневное применение в практических решениях, что выдвинули Данцига в число наиболее значимых математиков XX в. Однако Джорджа Данцига надо воспринимать не только как создателя ЛП и СМ, но и как многостороннего исследователя, организатора, человека, постоянно ведущего преподавательскую деятельность и пр.

Прежде всего Данциг оказал большое влияние на военное и индустриальное планирование и производство, экономику, математику, ИО, теорию вычислительных машин и систем, различные области прикладной науки и технологии. Как отклик на результаты указанного развития произошел рост соответствующих образовательных программ. Кроме того, Данциг и сам был профессором в течении более чем половины своей профессиональной жизни. И в этом качестве он, бесспорно, оказывал глубокое влияние на творческую жизнь, профессиональную позицию и научные вклады более чем пятидесяти его непосредственных студентов и докторантов.

Через шестнадцать лет после того, Данциг сформулировал ЗЛП и создал СМ ее решения, в предисловии к своей книге [133] (ставшей, как известно, классической работой) пишет следующие три знаковых фразы:

«Решающим критерием при оценке той или иной теории является ее способность решать те проблемы, которые послужили исходным толчком для ее развития…

Эта книга посвящена теории систем линейных неравенств и их решению…

Эта книга основана на конструктивном рассмотрении исследуемых проблем. Она отражает начальную стадию развития теории, достаточно могущественной для того, чтобы справиться с теми трудностями, которые возникают при решении задач, лежащих в основе этой теории» [17, с. 7–8].

Эти высказывания дают четкое представление о взглядах Данцига как на математику в целом, так и на ЛП в частности. Первый отрывок выражает его веру в важность реальных задач в качестве источника для развития математической теории не ради ее самой, но в качестве средства для решения важных практических задач. Второе утверждение основано на теоретическом факте: хотя задача линейного программирования, на первый взгляд, связана с оптимизацией в условиях ограничений, в действительности она целиком состоит в решении СЛН. Третье высказывание показывает убежденность Данцига в необходимости разработки конструктивного подхода (и в особенности - алгоритмического) для отыскания именно тех решений, которые требуются в практических задачах принятия решений.

Как уже было сказано выше, Дж. Данциг страстно верил в важность задач реального мира в качестве неиссякаемого источника математических задач. Сложно точно сказать, откуда именно появилась такая вера: родилась ли она в результате особого жизненного опыта или он приобрел ее намного раньше – уже в период ранней зрелости – и впоследствии уверенно сохранял, но служила она ему очень хорошо на всем протяжении его длинной и продуктивной жизни. (см. [3], [4])

4.1. Творческий путь Дж. Данцига. 4.1.1. Начало биографии. Подробную информацию, касающуюся детства Джорджа Данцига, можно почерпнуть из проведенного в ноябре 1984 г. Дональдом Альберсом (Donald Albers) интервью [105] или из во многом аналогичной статьи, которая доступна в [104]. Мы же здесь отметим и пройдемся лишь по тем основным фактам, которые, на наш взгляд, представляют наибольший интерес для понимания дальнейшей судьбы ученого. Для начала отметим, что отцом Данцига был математик Тобиас (Tobias) Данциг, а матерью – Аня Оуриссон (Anja Ourisson). Родители ученого встретились во Франции в Сорбонне, когда оба изучали там математику. Во время обучения Тобиас был сильно увлечен Генри Пуанкаре (Henri Poincare) и впоследствии даже написал о нем книгу [128] (хотя больше известна его книга «Number, The Language of Science» [134]).

Джордж Данциг родился уже не в Европе, а в США. Интересно, что младшему брату Джорджа, Генри дали второе имя Пуанкаре, и он впоследствии стал математиком-прикладником, работающим в Bendix Corporation, а самому Джорджу его родители дали второе имя «Бернард» в честь Джорджа Бернарда Шоу (George Bernard Shaw) в надежде, что Джордж, подобно ему, станет писателем. Однако Джордж выбрал для себя совсем иную судьбу.

Из собственного признания Данцига известно, что ему не доставало интереса в школьных занятиях вплоть до седьмого класса, когда он увлекся естественными науками и математикой. Тем не менее, изучение Данцигом первого в его жизни курса по алгебре, который появился у него в девятом классе, началось довольно-таки плохо: как потом вспоминал учёный, он буквально провалился на экзамене. Но здесь Данциг проявил твердость характера и-энергично взялся за дело и преуспел, стал отличником по математическим и естественно-научным дисциплинам. В то время он серьезно увлекся и был чрезвычайно поглощен изучением проективной геометрии и проработал огромное количество задач этой области, которые давал ему отец, работавший в то время на математическом факультете университета штата Мэриленд.

4.1.2. Годы учебы. 4.1.2. Годы учебы. Дж. Данциг поступил в этот же университет, где решил сосредоточиться на математике и физике. После получения в 1936 г. степени A.B., он отправился в Мичиганский университет, где в 1938 г. им была получена степень M.A. в математике. В Эн Арборе (Ann Arbor) он изучил курс статистики у Г. С. Карвера (Harry C. Carver) – учредительного редактора Annals of Mathematical Statistics, а также основателя Института математической статистики (Institute of Mathematical Statistics). Однако, остальная часть учебного плана показалась Данцигу чрезмерно абстрактной, и по этой причине после окончания своей магистерской программы в 1938 г. он решил найти работу.

Данциг остановил свой выбор на работе в качестве служащего по статистике в Бюро по трудовой статистике (Bureau of Labor Statistics – BLS). Впоследствии оказалась, что этот шаг оказался воистину судьбоносным как для его жизни, так и для математики в целом. Эта работа оказала важное влияние на жизнь Данцига в двух аспектах. Во-первых, он получил обширные знания многих практических приложений. А, во-вторых, Данциг был назначен обозревателем статей, написанных выдающимся математическим статистиком Ежи Нейманом (Jerzy Neyman), который работал в то время в университетском колледже в Лондоне, а вскоре переехал в Калифорнийский университет, расположенный в Беркли. Данциг потом вспоминал, что он очень заинтересовался статьей Е. Неймана, потому что увидел в ней логически обоснованный подход к статистике, вместо набора уловок, которым в его представлении до этого она являлась. Поэтому его интерес к академической науке оживился, и он пересмотрел свои планы относительно продолжения академической карьеры; он написал Нейману письмо, в котором решительно выражал свое желание закончить обучение и получить докторскую степень под руководством Неймана (что, в конечном счете, и произошло).

Е. Нейман дал согласие, и в 1939 г. Данциг записался в докторантуру на математический факультет в Беркли, где к тому моменту расположилась профессура Е. Неймана Там с Данцигом произошел случай, который впоследствии слал известной легендой. Данциг опоздал на одно из групповых занятий, проводимых Нейманом. В результате, когда он зашел в аудиторию, то увидел, что на доске написаны две задачи, и принял их за задание для домашней работы. Когда он приступил к решению этих задач, они показались ему более сложными, нежели обычно; но, несмотря на это, Данцигу удалось-таки их решить, и он представил свои решения на рассмотрение напрямую Е. Нейману. Как оказалось, повышенная на взгляд Данцига трудность в выполнении домашнего задания, объяснялась тем, что обе эти задачи были, на самом деле, двумя открытыми проблемами в теории математической статистики. В результате такое интересное стечение обстоятельств определило ход будущей научной деятельности Данцига под руководством Неймана: так 57-страничная докторская диссертация Данцига [123] состояла именно из его решений этих двух задач. Одно из них было немедленно предложено для публикации и появилось уже в 1940 г. ([135]). Второе, по не понятным причинам появилось значительно позже – только в 1951 г. – причем как совместная статья с А. Вальдом (Abraham Wald) [156].

Последняя работа посвящена теме, которая напрямую вела Данцига к развитию ЛП. Впоследствии он так описывал ситуацию: в [229] авторы построили «…наилучший критерий проверки простой гипотезы, имеющей единственную альтернативу. Для более общего класса гипотез авторы показали, что если существует критерий, удовлетворяющий их лемме в обобщенной форме, то он будет оптимальным.» ([17, с. 30]). В 1939 г. (и в [123]) Данциг впервые доказал существование данного критерия при достаточно слабых предположениях. В результате он получил первое доказательство теоремы двойственности ЛП и, сверх того, такого же утверждения применительно к случаю со счетным (и при использовании интегралов даже с несчетным) множеством переменных» ([17, с. 30]).

К лету 1941 г. было окончательно определено содержание диссертационной работы Данцига. В основу этой работы легли решения вышеупомянутых задач. Для получения степени Данцигу необходимо было выполнить ряд технических процедур, но он, почувствовав (как и Канторович по другую сторону океана) свой гражданский долг и страстное желание внести вклад в военные работы, решает поступить в Управление статистического контроля (Office of Statistical Control) военно-воздушных сил США. Там ему было поручено Отделение боевого анализа (Combat Analysis Branch), где он создал специальную систему, при помощи которой боевые единицы докладывали данные по миссиям. Часть этой работы также включала в себя планирование и, следовательно, моделирование. Если учесть примитивное состояние, в котором в те дни находилось вычислительные машины, то становится очевидной сложность этой задачи. Данциг успешно справился с заданием: Военный департамент (War Department) признал его достижения и присудил ему в 1944 г. очень почетную награду – Exceptional Civilian Service Medal.

Весной 1946 г. Данциг вернулся в Беркли, для защиты диссертации. Приблизительно в это же время ему предложили должность в Беркли; однако Данциг предпочел отклонить данное предложение, сделав выбор в пользу математического руководителя патентного ведомства военно-воздушных сил

США. Как будет показано далее, данный выбор стал вторым судьбоносным решением, которое направило Данцига на дорогу к открытию ЛП и СМ в 1947 г.

4.1.3. Данциг в RAND. С 1952 г. Джордж Данциг сотрудничает с Корпорацией RAND (RAND Corporation) (в Санта Монике, Калифорния), занимая должность математика-исследователя.

Корпорация RAND была основана в качестве Проекта RAND военно-воздушных сил, созданного в 1945 г. на базе специального контракта с авиастроительной компанией Дуглас (Douglas Aircraft Company). Проект RAND в то время подчинялся непосредственно генерал-майору военно-воздушных сил К. ЛеМэю (Curtis LeMay), заместителю начальника кадров военно-воздушных сил по исследованию и развитию). В 1948 г. Корпорация RAND стала независимой частной некоммерческой организацией, но не прерывала связи с военно-воздушными силами; о ней часто говорили, что она является «мозговым центром», исследовательским и научным центром военно-воздушных сил.

Не ясно, почему Данциг поменял работу математического советника в Пентагоне на математика-исследователя в RAND, но атмосфера в Математическом отделе RAND его устраивала, коллеги Данцига были отличными, организационная структура – понятной [105]. Руководителем Математическим отделом RAND был Дж. О. Вильямса (John O. Williams). Однако не последними причинами перехода в RAND, очевидно, были свобода проведения исследований по выбранной им тематике и наличие времени для написания книги [133].

В 1950-е гг. при проведении исследовательской работы в математическом отделе RAND Данциг имел два преимущества: с одной стороны – чрезвычайно плодотворное стимулирующее сотрудничество с превосходными математиками, с другой – щедрость спонсоров отдела.

За восемь лет (1952–1960), которые Данциг провел в RAND им было написано множество плодотворных статей и заметок на следующие темы: ТИ, ЛП и различные варианты СМ, крупномасштабное ЛП, ЛП в условиях неопределенности, сетевая оптимизация, включая задачу коммивояжера, целочисленное ЛП и многообразные приложения. Большая часть этих работ вошла позднее в [133].

Еще работая в Пентагоне Данциг исследовал методы нахождения решения крупномасштабных линейных программ; а затем – в RAND. Данциг всегда очень серьезно относился к подобным задачам. В своей речи на «Первой международной конференции по исследованию операций» (1957 г.) он заявил: «…в то время как первоначальным предложением было использовать модель линейного программирования для того, чтобы совершенствовать программы военно-воздушных сил, вскоре было осознано, что даже по самым оптимистическим оценкам эффективности будущих компьютерных процедур и мощностей оборудования не будет достаточно, чтобы подготовить детализированные программы военно-воздушных сил…» [126]. И Данциг постоянно стремился улучшить возможности математического программирования, особенно СМ ЛП.

4.1.4. Данциг в Беркли. В 1960 г. Джордж Данциг перешел в Калифорнийский университет (Беркли) на должность профессора в Департаменте промышленного производства (Департамент был основан четырьмя годами ранее). Когда Альберс (J. Albers) и Рейд (C. Reid) в их интервью 1984 г. спросили Данцига, почему он решил покинуть RAND для возвращения в академическую науку, Данциг ответил: «Мой уход был связан с той манерой, в которой проходило взаимодействие и объединение в команды для проведения нашей исследовательской работы… Каждый из нас занялся своим делом… Там не было новых людей, приглашенных на работу вместе с нами в качестве учеников… Мой побудительный мотив исходит от студентов и тесного сотрудничества с исследователями в других местах» [105, с. 311]. Как впоследствии оказалось, у Данцига было большое количество последователей в Беркли (и позднее в Стэнфорде).

4.1.5. Данциг в Стэнфорде. В 1966 г. Данциг переходит из Калифорнийского университета в Беркли в Департамент теории вычислительных машин и систем для участия в Программе по ИО в Стэнфордском университете. Данциг всегда избегал обсуждения мотивировов его карьерных решений. При объяснении этого последнего перехода он говорил, что председатель Программы по ИО, Г. Либерман (Gerald J. Lieberman), пообещал ему парковочное место рядом с офисом. Потом Департамент перебазировался в другое помещение, однако Данциг все же остался в Стэнфорде.

В 1985 г. Данцигу было присвоено почётное звание заслуженного профессора в отставке, хотя он этому и не очень-то радовался. Но его попросили остаться, и он еще тринадцать лет занимался преподавательской и исследовательской деятельностью. В этот период усилился его давний интерес к стохастической оптимизации.

4.2. Линейное программирование и симплекс метод. 4.2.1. Истоки появления линейного программирования и симплекс метода. Необходимо отметить, что когда Данциг только начинал вести свои исследования по ЛП, уже существовали работы двух основных авторов, сделавших существенный вклад в разработку ЛП: первый - Леонид Витальевич Канторович и второй – математический статистик-экономист Тьяллинг Купманс (Tjallig Charles Koopmans). Можно утверждать наверняка, что работы этих ученых Данцигу не были известны.

Вклад Канторовича в ЛП описан в главах 2 и 3. Здесь же заметим, что две статьи по ЛП написаны Канторовичем на английском языке (во время Второй мировой войны) и были рецензированы Г. Г. Гольштейном (H. H. Goldstine) [184] и М. Шифманом (Max Shiffman) [238], соответственно. Следовательно, нельзя говорить, что они были совершенно неизвестны на Западе.

Теперь что касается Т. Купманса. Купманс эмигрировал во время Второй мировой войны из Нидерландов в США в 1940 г. и находился на службе в Combined Shipping Adjustment Board – агентстве, базирующемся в Вашингтоне. Это агентство занималось в то время координированием торговых флотилий союзнических правительств, главным образом, США и Великобритании. Первая статья Купманса, касающаяся ЛП, датируется 1942 г. В целях безопасности данная статья была засекречена и была опубликована в открытой печати (сборник статей) лишь в 1970 г. [205]. В статье 1947 г. [206] Купманс смотрит на эти вопросы через призму полученного в военное время опыта, и, опираясь на него, развивает то, что в последствии получило название транспортной задачи [124]. Необходимо отметить, что все вышеназванные работы Купманса не были алгоритмичны: в них основной акцент сделан на моделировании для того специфического случая морских перевозок, на который Купманс был ориентирован во время своих исследований и написания данных работ.

Позднее Купманс обнаружил, что в 1941 г. алгебраист из Массачузетского технологического института (MIT) Фрэнк Л. Хичкок опубликовал статью [189], описав модель и некоторый метод для специального класса задач ЛП –транспортной задачи. Как уже было сказано ранее, первая работа Купманса по этой тематике вышла годом позже. Хороший обзор истории этой проблемы можно найти в [236]. Статья Хитчкока называлась «Распределение продукта из нескольких источников по многочисленным местам» [189] (хороший обзор статьи [189] опубликован в [202]). Это название абсолютно точно очерчивает круг рассматриваемых в тексте вопросов, в том числе постановку транспортной задачи и ее важный критерий минимальной стоимости. С точки же зрения того вопроса, освещению которого посвящена текущая работа, важнее всего отметить то, что Хичкок в своем труде от 1941 г. делает только самые незначительные предложения относительно применимости тех модели и метода, которые он продвигает в этой статье. Подробный разбор рассматриваемой проблемы с математической точки зрения и эффективные алгоритмы появились на Западе существенно позже ([206], [208], [125]). Важно отметить, транспортная задача (равно как и основная задача теории матричных игр) были выжным стимулом для развития алгоритмов ЛП на Западе.

Так же как статья Хичкока была неизвестна Купмансу (и Данцигу), точно также, когда Хичкок писал свою статью, он не знал о работе Канторовича по транспортной задаче. Вообще, критерий на основе циклов для оптимальности в транспортной задаче рассматривался кроме Хичкока также Канторовичем самостоятельно [41] и совместно с Гавуриным [54], Купмансом [206] (и [208]), Фулкерсоном [178], а также в работах некоторых других ученых.

Здесь же необходимо упомянуть еще несколько авторов, не рассмотренных выше, которые внесли вклад в «предысторию» ЛП. В знаменитой статье Джона фон Неймана по ТИ [225] 1928 г., и его книге [226], написанной совместно с О. Монгенштерном (Oscar Morgenstern) и опубликованной в 1944 г., рассматриваются конечные игры с участием двух лиц с нулевой суммой. Эта теория глубинно связана с ЛП; вследствие этого работа фон Неймана [223] представляет особый интерес. Следует назвать еще диссертацию Т. Моцкина (Theodor Motzkin), защищенную в 1933 г. в университете Базеля и опубликованную тремя годами позже [219]. Не считая приведенного в ней исследования общих вопросов существования (или несуществования) решений СЛН, Моцкин тамже дал метод решения типа исключения, аналогичный способу, использованному ранее Фурье и Динесом (Dines) [157] (последний сконцентрировался на строгих неравенствах).

Интересно, что несмотря на такое большое количество предшественников, чьи исследования потенциально могли вдохновить Данцига на его открытие, совсем не их работы стали отправной точкой для его исследований. Изначально Данциг ничего не знал об этих трудах; однако произошло событие, которое послужило катализатором для его бурной исследовательской деятельности. Им стала работа Василия Леонтьева (W. Leontief) [215] по структуре американской экономики. Примечательно, что внимание Данцига к этой работе привлек его бывший коллега по Бюро трудовой статистики (Bureau of Labor Statistics) и друг, Д. Эванс (Duane Evans). Здесь мы в очередной раз убеждаемся, насколько важную роль в жизни Данцига сыграл сделанный им когда-то выбор места работы во время перерыва в его академической карьере. По всей видимости, Данциг обсуждал с Эвансом эту работу достаточно детально. По мнению Данцига [133, с. 17], огромным вкладом Леонтьева стало то, что им была создана количественная модель, предназначенная для отслеживания влияния государственной политики и потребительских тенденций на большое количество разнообразных отраслей промышленности, которые были при этом встроены в очень сложную последовательность взаимосвязанных отношений. Именно использование Леонтьевым эмпирической модели, в отличие от чисто формальной модели, произвело наибольшее впечатление на Данцига. Данциг был также впечатлен организационным талантом Леонтьева, который решал ряд сложных вопросов, связанных с добыванием данных для своего исследования, а потом «торговал» результатами своей исследовательской деятельности. Данциг хорошо понимал и впоследствии заявлял, что эти два шага совершенно необходимы и их обязательно надо пройти для достижения успешных приложений. И, как впоследствии Данциг сказал в своем интервью: «Леонтьев предпринял их все. Вот почему в моей книге он – герой» [105, с. 303].

Когда мы рассуждаем о той роли, которую Данциг сыграл в процессе открытия ЛП и создания СМ, как и всегда в подобной ситуации, необходимо понимать, что данные события глубоко связаны с историческими обстоятельствами, на фоне которых они происходили. В данном контексте надо особенно отметить значимость влияния Холодной войны и начала первых дней Компьютерного века. Хорошо известно, что значительный вклад в оборонные работы, предпринятые во время Второй мировой войны и после нее, был внесен широким кругом, многие из которых бежали от ужасов нацизма. Эта тенденция лишь усилила и подкрепила признание силы и пользы, которую математическое моделирование и анализ приносят для решения практических задач, порождаемых реальной действительностью. Те обязанности, которые начиная с 1946 г. были возложены в Пентагоне на Данцига, включали в себя «механизацию» процедур планирования для осуществления поэтапного развертывания тренировочной и снабженческой деятельности военно-воздушных сил. Подход Данцига к математизации этой практической задачи возвестил о новой научной эпохе и одновременно прославил автора.

Как уже было сказано выше, в 1946 г. Данциг сделал выбор в пользу должностить математического руководителя патентного ведомства военно-воздушных сил США, предпочтя эту позицию предложенной ему должности в Беркли, и занялся механизацией планирования поэтапного развертывания тренировочной и снабженческой деятельности. Для этого Данцигом была создана линейная математическая модель, отражающая, какие запасы были доступны и какой выпуск был необходим в течение многопериодного временного промежутка. Такие условия в большинстве случаев приводят к недоопределённый системе, даже если на переменные накладывается дополнительное условие, согласно которому они должны принимать только неотрицательные значения, так как интерпретируются как физические количества. Для выделения «наилучшего» решения, Данциг предложил линейную целевую функцию, и именно эту линейную величину необходимо минимизировать или максимизировать. Именно введение целевой функции стало инновацией в области планирования и тем самым достижением, которым Данциг чрезвычайно гордился. Сам он выразил это в 1957 г., сказав: «линейное программирование является анахронизмом»; в этом заявлении он указывал на деятельность экономистов Ф. Квеснея (Francois Quesnay), Л. Варласа (Leon Walras) и Василия Леонтьева, а вмести с ними также и на математика Джона фон Неймана, каждый из которых мог (и, более того, по мнению Данцига, должен был) ввести целевую функцию в своих работах [233, с. 102].

Открытие Данцигом ЗЛП и СМ для ее решения было сделано совершено независимо от [24, 205, 189, 175, 230]. Тем не менее, как часто рассказывал сам Данциг, «независимо» отнюдь не означает, что это открытие было сделано в изоляции. На каждом его этапе имел место ряд событий, способствовавший тому, чтобы оно произошло. Так в самом начале в том, что касается формулировки, Данциг имел плодотворное общение со своими коллегами по военно-воздушным силам, особенно необходимо отметить М. Гейслера (Murray Geisler) и М. К. Вуда (Marshall K. Wood), также как и полезные обсуждения этого вопроса с персоналом Национального бюро стандартов (National Bureau of Standards – NBS).

Исключительно важно было общение с А. Каном (Albert Kahn) из NBS, по предложению которого Данциг решил впервые проконсультироваться с Купмансом, который был в то время в Комиссии Коулса (Cowles) по исследованиям в экономике (Cowles–Commission for Research in Economics), базировавшейся вплоть до 1955 г. в Чикагском университете. В июне 1947 г. произошел визит, который, как выразился Купманс, закончился «неспешным началом». Однако, вскоре что-то побудило Купманса раскрыть информацию о его работе 1942 г. по транспортной задаче и статье Хичкока 1941 г. Возможно, все дело было в том, что Купманс просто оценил и осознал то широкое экономическое значение, которое несет в себе основная модель (ЛП), представленная Данцигом.

Еще один исключительно важный визит имел место в октябре 1947 г. Во время этой поездки Данциг побывал в Институте перспективных исследований (Institute for Advanced Study – IAS), где произошла его очень важная встреча с Дж. фон Нейманом. Данциг был впечатлен произошедшим разговором и написал по его следам очень интнрнсный отчет (см. [105]), где описывает встречу и ее результаты и рассказывает, как начал обсуждение с объяснения формулировки модели ЛП, описав ее Нейману так, как он сделал бы это «простому смертному». Но Нейман отреагировал на это вступление в манере, которая, как полагает сам Данциг (и с чем соглашается большинство людей, имевших удовольствие быть знакомыми с Нейманом), была совершенно нехарактерной для него: он отрывисто сказал, чтобы Данциг «переходил к сути дела». После этого Данциг менее чем за минуту набросал геометрическую и алгебраическую версии своей задачи на классной доске. Тогда Нейман встал и сказал: «А, вот что». После чего, по словам Данцига, в течение следующих полутора часов Нейман продолжал читать ему лекцию на тему математической теории ЛП. Здесь необходимо заметить, что только несколькими годами ранее фон Нейман опубликовал монографию [226]. Кроме вышеперечисленных моментов фон Нейман (согласно Данцигу) указал ему на лемму Фаркаша (Farkas), понятия двойственности и теорему двойственности ЛП, перевод на язык СЛН главных результатов ТИ и выдвижение гипотезы об эквивалентности ЗЛП и матричной игры двух лиц с нулевой суммой (фон Нейман сопоставил задачу поиска оптимальной стратегии в матричной игре с ЗЛП и в силу наличия двух игроков в первой предположил двойственность в ЛП).

В июне 1948 г. Данциг посетил Принстон, где встретился с А. У. Таккером, который вместе со своими студентами Харольдом Уильямсом Куном и Дэвидом Гейлом дал первое строгое доказательство той самой теоремы двойственности [180], которую фон Нейман и Данциг обсудили во время их первоначальной встречи (см.также [248], стр. ix и стр. 206).

Что касается алгоритма для решения ЗЛП, то Данциг предложил свой СМ летом 1947 г., то есть за месяцы до его первого знакомства с фон Нейманом. В процессе этого открытия Данциг обсуждал версии своего алгоритма с экономистами Л. Гурвицем (Leonid Hurwicz) и Т. Купмансом. Во время этих бесед пришло осознание, что предложенный метод по своей сути равнозначен прохождению по пути, состоящему из граней многогранника. Однако по этой причине Данциг отверг данный метод, так как считал, что он будет слишком неэффективным, чтобы быть использованным в практическом применении (как отмечено в 2.1.2, Канторович пришел к точно таким же выводам в 1939 г.). К счастью для математики и, в особенности, для многочисленных приложений, эти первоначальные сомнения были в конечном счете преодолены, когда Данцигу удалось проинтерпретировать данный метод в виде того, что он называл «геометрией столбцов». Можно сделать предположение, что такая интерпретация вполне могла быть навеяна первой частью его докторских тезисов [123, 156, 137], потому что там представлен аналог так называемого ограничения выпуклости.

При ограничениях вида

$x_1 + \ldots + x_n = 1; \quad x_j \geq 0, j = 1, ..., n$ (4.1)

(которые является распространёнными, но ни в коем случае не общими и не основополагающими) остальные ограничения

$A_{\bullet 1}x_1 + \ldots + A_{\bullet n}x_n = b$

(4.2)

эквивалентны требованию представления столбца b в виде выпуклой комбинации столбцов $A_{\bullet 1}$, …, $A_{\bullet n} \in R^m$. Заметим, что, конечно, решения (4.1) сами по себе образуют (n – 1) симплекс в R^n, но это не совсем та причина, по которой алгоритм получил свое название «СМ» – оно, по словам самого Данцига, появилось в его дискуссиях с Т. Моцкиным.

Теперь присоединим коэффициенты целевой функции c_j к столбцам $A_{\bullet j}$ и сформируем посредством этого векторы ($A_{\bullet j}$, c_j) и одновременно с этим присоединим переменную компоненту z к вектору b для того, чтобы получить (b, z). Поступив именно таким образом, Данциг получил возможность для рассмотрения соответствующей задачи ЛП в качестве задачи отыскания положительно взвешенного среднего векторов ($A_{\bullet 1}$, c_1), …, ($A_{\bullet n}$, c_n), которое равняется (b, z) и доставляет максимальное (или минимальное) значение z.

Было известно, что если линейная программа (в стандартной форме) имеет оптимальное решение, то она должна иметь оптимальное решение, которое также одновременно является угловой точкой области допустимых решений (то есть набора всех векторов, которые удовлетворяют ограничениям данной задачи). И более того, угловые точки области допустимых решений соответствуют (хотя и не обязательно взаимно однозначно) базисным допустимым решениям при ограничениях, представленных в виде СЛУ. В условиях обоснованного предположения, что система (4.1) – (4.2) имеет полный ранг, приходим к рассмотрению невырожденных матриц следующего вида

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ A_{\cdot j_1} & A_{\cdot j_2} & \cdots & A_{\cdot j_{m+1}} \end{bmatrix}$$

(4.3)

таких, что

$$B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \geq 0. \qquad (4.4)$$

Легко видеть, что столбцы $A_{\cdot j_1}, A_{\cdot j_2}, \ldots, A_{\cdot j_{m+1}}$, рассмотренные в качестве точек в R^m, находятся в общем положении. Таким образом, их выпуклая оболочка является m-симплексом.

Чрезвычайно важным шагом было то, что Данциг осмыслил n точек $A_{\bullet j}$ как лежащие в «горизонтальном» пространстве R^m и затем изобразил каждый (m+1)-кортеж ($A_{\bullet j}$, c_j) в качестве точки на линии, ортогональной к R^m и проходящей через $A_{\bullet j}$ с c_j измеряющей вертикальное расстояние точки выше или ниже горизонтальной «плоскости», в соответствии со знаком c_j. *Линия требований,* состоящая из точек (b, z), где $b \in R^m$ – такая же, как выше, а z есть (переменное) значение целевой функции, так же ортогональна по отношению к горизонтальной плоскости. Для любого допустимого базиса линия требований пересекается с σ – выпуклой оболочкой соответствующих точек $\left(A_{\cdot j_1}, c_{j_1}\right), \left(A_{\cdot j_2}, c_{j_2}\right), \ldots, \left(A_{\cdot j_{m+1}}, c_{j_{m+1}}\right)$ – в точке (b, z), ордината z которой является значением целевой функции, заданным ассоциированным базисным решением. (m+1) вершина симплекса σ определяет гиперплоскость в R^{m+1}. Вертикальное расстояние от точки ($A_{\bullet j}$, c_j) до этой гиперплоскости показывает, улучшила ли бы эта точка значение целевой функции базисного решения, которое было бы достигнуто, если бы она заместила один из базовых столбцов. Выпуклая оболочка этой новой точки и σ является (m+1)-симплексом τ в R^{m+1}. Линия требований пересекает границу τ в двух точках: предыдущем решении и ~~одной~~ другой точке с лучшим значением целевой функции. В (невырожденном) случае, когда новая точка лежит в относительной внутренности грани (m+1)-симплекса τ, назовем ее ρ, существует единственный (в настоящее время базисный) столбец, для которого соответствующий вес (барицентрическая координата) равен нулю. Эта точка расположена напротив новой грани ρ, где линия требований пересекает границу (m+1)-симплекса τ. Заметим, что ρ является m-симплексом и соответствует новому и улучшенному допустимому базису. Данный процесс осуществления смены базиса называется *вращением симплекса*.

Даже если не рассматривать тот факт, что не все задачи линейного программирования включают ограничения выпуклости, было понятно, что без значительных продвижений в развитии автоматических вычислительных машин этот алгоритм – в какой бы форме он ни брался – не соответствовал размеру задач планирования, для которых требовались численные решения: в том смысле, что он был слишком трудоемок для получения решений в разумные сроки. Типичным примером одной из таких задач, требовавших численного решения, служит важная ситуация, которая возникла меньше чем через год после совершения Данцигом своих открытий, – этой задачей стал Берлинский воздушный мост. Эта программа продолжалась 463 дня и требовала планирования авиационной и снабженческой деятельности, включая тренировку пилотов, и имела при этом очень большой, причем динамический, масштаб. Во время этого кризиса Британия, Франция и США перевезли по воздуху более чем два миллиона тонн продуктов питания и других запасов для жителей Западного Берлина, чьи автодорожные, железнодорожные и водные контакты с Западной Европой были отрезаны по инициативе СССР.

4.2.2. Последующие расширения линейного программирования и симплекс метода. В 1947 г. на заседании объединенного ежегодного собрания Американской ассоциации по статистике (American Statistical Association – ASA) и Института математической статистики (Institute of Mathematical Statistics – IMS) состоялась презентация, заключавшаяся в прочтении короткой лекции с названием «Математическая техника планирования программ», в которой Данциг публично доложил о своем открытии СМ [162, с. 134]. Дорфман об этом рассказывает [160, с. 292] следующее: «Нет никакого подтверждения, что статья Данцига привлекла какой-либо особенный интерес или внимание». Данное мнение, помимо его слов, подтверждается еще и тем, что статья не была опубликована. Год спустя произошло следующее появление метода в рамках заседания (под председательством фон Неймана) на объединенном национальном собрании IMS и Экономического общества (Econometric Society). Речь Данцига, озаглавленная «Программирование с линейной структурой», пробудила больше интереса, нежели ее предшественница. Краткий обзор этого события [138] замечателен в первую очередь своим фантастическим размахом. В нем мы находим упоминания о модели ЛП, представление о динамических системах, связи с теорией игр, ссылки на вычислительные процедуры для «крупномасштабных цифровых компьютеров» и даже очень смелое предположение о том, что решения таких задач вполне могут быть осуществлены практически, а не только обсуждены в рамках развития теории. О значительно большем резонансе, который удалось возбудить на этот раз по отношению к данным вопросам, после этого, второго уже их освещения, свидетельствует, в том числе, и энергичная дискуссия, которая последовала непосредственно за речью Данцига. В дальнейшем он участвовал в круглом столе рядом с такими выдающимися фигурами, как Г. Хотеллинг (Harold Hotelling), И. Каплански (Irving Kaplansky), С. Карлин (Samuel Karlin), Л. Шарлей (Lloyd Shapley) и Дж. Тукей (John Tukey). Теперь дело, наконец, сдвинулось с мертвой точки.

Т. Купманс в автобиографической работе [207], написанной приблизительно в то время, когда он вместе с Канторовичем получил Нобелевскую премию по экономике 1975 г., рассказывает от том, как в 1944 г. из-за ряда организационно-бюрократических моментов его деятельность в Merchant Shipping Mission закончилась неудачей. Возобновляя свой контакт с экономистом Я. Маршаком (Jacob Marschak), Купманс добился должности в Комиссии Коулса (Cowles Commission) в Чикаго. В той же работе он продолжает повествование, говоря «моя работа по транспортной модели расширилась в изучение анализа видов деятельности в Комиссии Коулса в результате короткого, но важного разговора с Джорджем Данцигом, вероятно в начале 1947 года. За этой беседой последовали регулярные контакты и обсуждения, продолжавшиеся впоследствии на протяжении нескольких лет. В некоторых из этих дискуссий участвовал Альберт Уильямс Таккер из Принстонского университета, который внес очень большой вклад в мое понимание математической структуры двойственности».

В качестве одного из наиболее важных событий в развитии линейного (и нелинейного) программирования можно рассматривать конференцию "Conference on Activity Analysis of Production and Allocation", которая проводилась в Чикаго под покровительством Комиссии Коулса по исследованиям в экономике (Cowles Commission for Research in Economics) в июне 1949 года. Представляется несколько странным то, что довольно подробная в остальных отношениях автобиографическая заметка Купманса не делает никакого упоминания о его важной организаторской роли в данном весьма примечательном событии. И это несмотря на то что, роль его была на самом деле более чем значительной: так, вышедший под редакторством Купманса, том Трудов деятельности этой конференции [103] содержит двадцать пять статей, авторством четырех из которых является сам Данциг, а еще одна выпущена в соавторстве с ним. Докладчики и остальные участники, число которых насчитывало в сумме приблизительно пятьдесят человек, являли собой более чем впечатляющий набор личностей, представляющих мир университетской науки, государственные агентства и военные учреждения. Представляет определенный интерес то, что том Трудов деятельности этой конференции не упоминает ни одного участника со стороны промышленности. Представители в точности тех же групп людей были докладчиками на Симпозиуме по линейным неравенствам и программированию (Symposium on Linear Inequalities and Programming), прошедшем в Вашингтоне в 1951 г. Из девятнадцати представленных на этом симпозиуме статей двенадцать были связанны с математической теорией и вычислительными методами, в то время как остальные семь работ имели дело с приложениями. В дополнение к статье Дж. Данцига и А. Ордена (Alex Orden), предлагающей «Теорему двойственности, основанную на симплекс методе» [149], первая часть Трудов содержит статью М. Флуда (Merrill Flood) [169] о транспортной задаче. Флуд собирает предшествующую литературу по этому вопросу, включая статью Канторовича 1942 г., хотя без статьи Монжа 1781 г. Среди статей в той часть Трудов, где собраны труды по приложениям, обнаруживается краткий обзор (хотя и не статья) А. Чарнеса (Abraham Charnes), В. Купера (William Cooper) и Б. Мелона (Bob Mellon, служащий Gulf Oil Co.) по «Смешиванию авиационных бензинов». Как нам теперь известно, этот конкретный вопрос и, если говорить более обобщенно, данный тип вопросов (смешивание в нефтехимической и других индустриях) стал очень важной областью для ранних приложений только что появившегося ЛП. Из этой группы статей можно почувствовать переключение внимания исследователей от сферы военных приложений ко многим плодотворным приложениям, лежащим в гражданской области. Вскоре труды Данцига и других исследователей привлекли внимание широкого круга ученых-прикладников, многие из которых работали в промышленности (подробнее см. в [234]).

Кроме транспортной задачи, которая продолжала быть полезной в судоходстве и распределении промышленных предприятий, ранняя область применения прикладного ЛП находится в сфере сельского хозяйства, которая, как хорошо известно, является древнем предметом интереса для экономики. В качестве отличного примера, способного замечательно проиллюстрировать применение ЛП в этой области, мы обратимся к одной исторически важной статье, которая предоставила в свое время естественную основу для начала внедрения ЛП. Этой работой стала опубликованная в 1945 г. Дж. Ж. Штиглером (George J. Stigler) статья [243], где развивалась модель определения наиболее дешевой «диеты», которая будет предоставлять, по меньшей мере, заданный набор питательных потребностей (см. [179]). Данциг рассказывает в своей книге ([133, с. 551], [17]), как в 1947 г. СМ был испытан на модели питания Штиглера (или «задаче диеты», как она сейчас называется) ([243], [228]). Ограничения включали девять уравнений с семьюдесятью семью неизвестными – в то время это рассматривалось в качестве большой задачи. В процессе решения задач ЛП с помощью СМ вычисления в то время проводились на управляемых вручную настольных калькуляторах. В соответствии с тем, что Данциг описывает в книге, этот процесс занял приблизительно 120 человеко-дней для получения решения. Такого было положение дел в вычислениях в те дни, когда ЛП только начинало делать свои первые шаги. Спустя некоторое время, а именно в 1953 г., такая задача была решена и распечатана компьютером IBM 701 всего за двенадцать минут. А если мы будем говорить об этой задаче в контексте сегодняшнего дня, то она будет считаться маленькой и решится уже менее чем за секунду на простом персональном компьютере. Конечно, вкусовая привлекательность диеты, основанной на принципах ЛП, как и сам термин «диета» в качестве обозначения найденного результата, для потребления человеком могут быть подвергнуты сомнению. Однако в действительности, основные приложения данной методологии находятся в сфере промышленности животных кормов, и там она, несомненно, представляет огромный интерес, что и подтверждается многочисленными ее применениями в реальной практике.

Кроме разработки математической модели и методов для нахождения ее решения, а также их внедрения в промышленную практику, здесь необходимо отметить еще одно чрезвычайно важное влияние, которое оказала деятельность Данцига в этой области на дальнейшее развитие науки в целом. Желание военно-воздушных сил механизировать процедуры планирования и вклад Дж. Данцига в эту попытку посредством создания им ЛП и СМ имели большое влияние на развитие вычислительных машин. Данцигом и его коллегами были получены весьма обнадёживающие результаты, которые сами по себе сразу убедили инспектора военно-воздушных сил, генерал-лейтенанта Эдвина В. Роулингса, что очень многое может быть достигнуто при наличии более мощных компьютеров. Соответственно, он перевел сумму в размере 400’000 американских долларов (а потом и более большую) на счет Национального бюро стандартов, которое в свою очередь профинансировало исследования в области математики и электронных компьютеров (всё собственными силами), так же как и развитие нескольких компьютеров, таких как UNIVAC, IBM, SEAC и SWAC. Произнося свою речь перед военной аудиторией в 1956 г., генерал Роулингс сделал следующее замечание: «Я верю, что можно справедливо сказать, что интерес военно-воздушных сил в реальном финансовом инвестировании в развитие электронных компьютеров был одним из важных факторов их быстрого развития в этой стране» [163]. Данциг всегда испытывал гордость за то, что ЛП сыграло важную роль в развитии компьютеров.

Возвращаясь к вопросу о промышленных применениях ЛП, можно смело утверждать, что даже в самом начале перечень сфер применения ЛП был поистине поразителен и простирался далеко за границы названных выше областей. Чтобы получить представление, насколько бурным был этот процесс, достаточно заглянуть в учебник С. Гасса (Saul Gass) 1958 г. [181] – одного из первых, появившихся по этой тематике. Кроме обширного материала по приложениям ЛП в этом учебнике содержится впечатляющая библиография всевозможных приложений ЛП (она выбрана из более обширной работы [182] и сгруппирована тематически). Под заголовком «Промышленные приложения», Гасс составляет список публикаций, имеющих отношение к следующим производствам: химическому, угольному, железу и стали, бумаги, нефти, а также к коммерческим авиалиниям, коммуникациям и железной дороге. Бесспорно, на Западе ЛП было принято с куда большим энтузиазмом, нежели в СССР.

В том же 1958 г. была опубликована книга Дорфмана, Самуэльсона (Samuelson) и Солоу (Solow) «Линейное программирование и экономический анализ (Linear Programming and Economic Analysis)» [161]. По словам авторов, она планировалась как общее описание взаимосвязи линейного программирования со стандартным экономическим анализом, однако, как показало время, она была успешно использована для университетских курсов по экономике. В ее предисловии провозглашается, что «линейное программирование было одним из наиболее важных послевоенных результатов в экономической теории». Авторы книги подчеркивают взаимосвязь ЛП с теорией игр фон Неймана, с экономикой благосостояния и с равновесием Вальраса. Эрроу (Arrow) в работе [109] дает перспективное изображение той роли, которую Данциг сыграл в развитии экономического анализа.

4.2.3. Методы для нахождения решения крупномасштабных линейных программ. Некоторое общее представление о видах задач, какие решались в военно-воздушных силах, может быть получено из речи, которая была произнесена М. Вудом (M. K. Wood) и стала открытием дискуссии на Симпозиуме по линейным неравенствам и программированию в 1951 г. Он говорит в Трудах этого симпозиума следующее: «Только для того, чтобы обозначить общий размер тех задач программирования, с которыми мы сталкиваемся, я хочу привести немного статистики. Мы обсуждаем организацию более чем миллиона людей, которые классифицированы по приблизительно тысяче различных профессиональных навыков. Эти люди организованы в приблизительно десять тысяч отдельных организационных подразделений, каждое из которых обладает своими собственными имуществом и функциями, расположенных в немногим более, чем трех сотнях головных предприятий. Организуемые подразделения используют приблизительно один миллион различных типов запасов и оборудования, с полной ежегодной стоимостью более пятнадцати миллиардов долларов» [232].

Проблема решения задач столь грандиозного масштаба была одной из тех, к которым Данциг относился с особенной серьезностью. Произнося свою речь в рамках «Первой международной конференции по исследованию операций», проходившей в 1957 г., он признал, что «в то время, как первоначальным предложением было использовать модель линейного программирования для того, чтобы совершенствовать программы военно-воздушных сил, вскоре было осознано, что даже по самым оптимистическим оценкам эффективности будущих компьютерных процедур и мощностей оборудования не будут достаточно для того, чтобы подготовить детализированные программы военно-воздушных сил» [126]. Тем не менее, он посвятил себя улучшению возможностей математического программирования, особенно СМ ЛП.

Для того чтобы правильно описать работу Данцига по крупномасштабным системам, и более точно, по крупномасштабным линейным программам, на нее имеет смысл посмотреть, как на разработку специальных разновидностей СМ: таких, которым для реализации требуется использование только «компактного» базиса, то есть такого, что симплексные итерации будут осуществляться, полагаясь на базис значительно уменьшенного размера. Вскоре было замечено, что если дана линейная программа в стандартной форме, то есть: $\begin{cases} c \cdot x \to \min \\ \text{при условии } Ax = b, x \geq 0, \end{cases}$

то эффективность СМ в большей степени связана с количеством линейных ограничений ($Ax = b$), которое определяет размер базиса, нежели, чем с числом переменных. Есть мнение (которое можно воспринимать в качестве «фольклора» ЛП), которое утверждает, что «на практике» число шагов, необходимых для решения линейной программы будет порядка $3m/2$, где m является числом линейных ограничений. Кроме того, работа с компактным базисом (то есть, базисом маленького размера), который будет существенным образом инвертирован, сделает метод значительно более надежным с численной точки зрения.

Первое испытание СМ на «крупномасштабной» задаче, которое можно было назвать настоящим вызовом, произошло во время рассмотрения задачи диеты Штиглера; введение верхних ограничений на количества различный типов продуктов питания сильно увеличило общее число ограничений, и, таким образом, дополнительно усложнило и без того уже более чем сложную задачу. Потребность в специализированной версии СМ, для того чтобы эффективно работать с верхними ограничениями, вновь всплыла на поверхность и усилилась в RAND. Дело в том, что исследователи не были удовлетворены временем выполнения итерации для заданий, представляемых на рассмотрение в их компьютерный центр, главным образом потому, что некоторые проекты, которые имели наивысший приоритет, должны были поглотить все доступные вычислительные ресурсы на недели вперед. Именно тогда был разработан более гибкий метод планирования приоритетов, в котором важность, устанавливаемая для каждого задания, уменьшалась по мере того, как дата завершения этого задания отсрочивалась. Формулировка этой задачи составления расписания сама по себе оказалось линейной программой, имеющей особую (подобную назначению) структуру и следующее ограничение: число часов x_{ij}, которое должно быть назначено каждому проекту i на неделе j, не может превышать определённый верхней границы, например, α_{ij}. В терминах линейного программирования, это была задача следующего типа:

$$\begin{cases} \qquad\qquad c \cdot x \to \min \\ \text{при условиях: } Ax = b,\ lb \le x \le ub, \end{cases}$$

с m линейными ограничениями ($Ax = b$) и большими, чем только неотрицательность, ограничениями на x-переменных: векторы lb и ub налагали нижнюю и верхнюю границы на переменные x. В данном случае после соответствующей замены переменных и добавления фиктивных переменных, эта задача преобразуется из задачи с m линейными ограничениями в задачу с по крайней мере $m + n$ такими ограничениями. Процесс решения задачи планирования (которая, очевидно, является лишь вспомогательной задачей по отношению к основным, представляемым на рассмотрение в компьютерный центр) вполне мог в свою очередь превратиться в источник дальнейших задержек, что, конечно же, совсем не соответствовало цели, ради решения которой задача планирования появилась! Это стало тем самым моментом, когда Данциг предложил новую вычислительную схему, которая впоследствии будет интегрирована в любые дальнейшие реализации СМ. Она будет, по существу, подходить к данной задаче, как будто в ней всего лишь m линейных ограничений и при этом требует очень малого количества дополнительно учитываемой и хранимой информации для того, чтобы отслеживать и переменные на их нижних границах, и базисные переменные, и те, которые находятся на их верхней границе, а не только базисные и небазисные переменные, как это делалось в первоначальной версии СМ.

Работа Данцига по транспортной задаче и некоторым сетевым задачам дала ему определенную осведомлённость относительно того, что СМ становится чрезвычайно эффективным, когда базис имеет или треугольную, или почти треугольную структуру. Кроме того, по мере того, как СМ использовался для решения все более сложных моделей, в особенности затрагивающих динамические системы, необходимость в наличии вариантов СМ для того, чтобы справляться с такими задачами более крупного масштаба, становилась все насущнее. Несмотря на то, что симплексные базисы таких задач не являются строго треугольными, они имеют блочную треугольную структуру, например,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ A_{T1} & A_{T2} \cdots & & A_{TT} \end{bmatrix},$$

которая может быть использована для "компактифицирования" численных операций, требующихся для СМ. Все современные, коммерческого уровня, эффективные реализации СМ пользуются ускоренными (требующими наименьших затрат времени и сил) методами, предложенными Данцигом в [142]. Эти методы имеют особенно большое значение в самом начале (при выборе эвристик), когда необходимо определить хороший начальный базис.

В конце 1950-х Данциг и Вольф предложили принцип декомпозиции и прочли о нём специальную лекцию в рамках Симпозиума RAND по математическому программированию в 1959 г. Их подход был навеян идеями Форда (Ford) и Фулкерсона (Fulkerson) по многоэтапным сетевым задачам потребления [170]. На самом деле методология базируется на фундаментальных результатах, историю которых можно начинать датировать с новаторской работы Минковского и Вейля по выпуклым многогранным множествам. К середине 1950-х Данциг, отчетливо осознав–необходимость в таком методе для действительно больших (уже в современном понимании) ЗЛП, уже написал несколько статей по стохастическому программированию, и наметил интересное применение этого метода в [131].

В этот период Данциг стал соавтором еще одного значительного вклада в науку: решения большой (по стандартам того дня) задачи коммивояжёра (TSP). Эта работа стала для исследователей значительно большим достижением, нежели только путем к нахождению оптимального решения для отдельный задачи. Она указала конкретный путь к нескольким подходам для комбинаторной оптимизации и задачам целочисленного программирования.

Во-первых, задача коммивояжёра состоит в нахождении пути с наикратчайшим расстоянием, проходящим через заданный набор городов таким образом, чтобы посетить каждый город один раз и вернуться в начальную точку.

На эту задачу обратили внимание после статьи Данцига, Фулкерсона и Джонсона (Johnson) [144]. В ней также было дано подстрочное примечание по истории этой задачи, которая включает привлечение М. Флудом интереса к ней, предположительно чтение лекций Х. Витни (Hassler Whitney) и исследование Г. Куном (Harold Kuhn) связи между задачей коммивояжёра и ЛП. Резюме состоит из одного предложения: "Показано, что определённое путешествие, состоящее из сорока девяти городов, по одному в каждом из сорока восьми штатов и Вашингтона, имеет наикратчайшее расстояние." Расстояния были взяты из дорожного атласа. Авторы смогли уменьшить эту задачу до сорока двух городов, показав, что их решение даже при удалении из списка семи северо-восточных городов все равно будет проходить через эти семь городов. Таким образом, метод решения применяется к задаче с сорока двумя городами.

Данный метод решения приводит к решению линейной программы с переменными *0-1* для каждого ребра (это терминология, использованная авторами для неориентированных дуг) полного графа на сорока двух вершинах. Первый набор ограничений, например, сумма переменных на ребрах, инцидентных данной вершине, должен равняться двум. Всего таких ограничений сорок два, для задачи с 42-я городами. Второй набор ограничений состоит из того, что называется ограничения исключения под-турне. Ограничения из этого набора выражают требование того, чтобы сумма переменных на ребрах, один конец которых лежит во множестве вершин S, а другой конец лежит за пределами этого множества S, должна быть больше или равна двум. Всего количество этих ограничений порядка 2^{42}. Несмотря на это, авторы были вынуждены добавить лишь семь из них к линейной программе для задачи с 42-я городами, и на этом этапе все остальные были удовлетворены. Таким образом, несмотря на тот факт, что существует поистине огромное число таких ограничений, только немногие были использованы, когда они по мере необходимости были присоединены к линейной программе.

Данциг неоднократно рассказывал о пари, которое было заключено между ним и Рэем Фулкерсоном. Данциг был убежден, что, несмотря на большое общее количество ограничений исключений, под-турне в конечном итоге потребуется не очень много. Более того, он был настолько в этом уверен, что предложил пари, в котором утверждал, что их будет не более двенадцати (точное число, вероятно, потеряно навсегда), но Рэй, который был хорошим игроком в покер, сказал, что пари должно быть наиболее близким к фактическому числу; и он начал понижать это число далее, сказав, что их будет еще меньше – одиннадцать. В действительности оказалось, что, необходимы были только семь и дополнительно еще два, добавленные в данном случае только для того, чтобы сделать оптимум ЛП целочисленным.

Эти два дополнительных неравенства коротко обоснованы и признаны в подстрочном примечании: «Мы находимся в долгу у И. Гликсберга (I. Glicksberg) из RAND за обращение нашего внимания на зависимости этого типа». Большая часть более поздних исследовательских работ по комбинаторной оптимизации направлена на отыскание таких неравенств, которые могут быть быстро установлены, если нарушаются. Например, отыскание нарушенного ограничения исключения под-турне эквивалентно отысканию "минимального разреза" в графе, где в качестве весов на ребрах служат переменные x_{ij}, не являющиеся двойственными, которые могут быть дробными. Минимальным разрезом является тот разрез, который минимизирует сумму x_{ij} через все ребра в этом разрезе; это значение потом сравнивается с 2.

Использованный метод заключается в том, чтобы начать с турне, которое может быть найдено с помощью какой-нибудь одной из нескольких эвристик. Затем могут быть найдены двойственные переменные в вершинах, и статья объясняет, как именно это может быть сделано. После этого могут быть оценены небазисные ребра и найдено изменение базиса. Если решение переходит к другому турне, то этот шаг повторяется. Если оно переходит к под-турне, то добавляется ограничение исключения под-турне. Если оно переходит к дробному решению, то авторы ищут такое ограничение (чтобы его добавить), которое проходит через текущей вектор решения и отсекает упомянутое дробное решение. Таким образом, это является целочисленным прямым СМ, который остается в целочисленных точках с помощью добавления разрезов при необходимости.

Метод, который применятся в статье, – использование "исправления на основе сниженной цены" переменных. Как только найдены хорошее турне и оптимальная линейная программа, использующая допустимые разрезы, такие как разрезы исключения под-турне, разница между ценой турне и оптимумом линейной программы дает значение, которое может быть использовано для исправления небазисных переменных при их текущих небазисных значениях. Хотя число переменных и не чудовищно громадное, однако задача 42-городов имеет 861 переменных, что много, если линейная программа решается вручную, как делалось тогда авторами. Они использовали пересмотренный (revised) СМ, поэтому было необходимо только оценить все эти столбцы и регистрировать лучший. Следовательно, даже несмотря на то, что при использовании пересмотренного СМ необходимо только оценить столбцы, этот процесс может быть очень затруднительным, когда имеется 861 переменных, и расчёт производится вручную. По этой причине, фактическое отбрасывание многих из этих переменных из задачи давало несомненное преимущество.

Статья также имеет отношение к «комбинаторному подходу», который критически зависит от уменьшения числа переменных. Этот подход связан с вышеуказанным методом исправления на основе сниженной цены. Несмотря на то, что данная статья слегка поверхностна относительно этого подхода, можно сделать вывод, что по мере того, как количество переменных уменьшается до небольшого числа, необходим некоторый перебор без повторного решения рассматриваемой ЗЛП (но, возможно, используя исправление на основе сниженной цены). В результате него можно вычислить остававшиеся свободными выборы и прийти тем самым к оптимальному решению.

Как написали Бранд (R. Bland) и Орлин (J. Orlin) [111]: «журнал *Newsweek* опубликовал рассказ об этом «оригинальном приложении линейного программирования» в выпуске, датированным 26 июля 1954 года. Тем не менее, нам представляется весьма маловероятным, что даже Данциг, Фулкерсон и Джонсон могли предвидеть эффект в приложениях, которое эта работа, в конечном счете, произведет». Это воздействие проявилось в целочисленном программировании в целом, где сильные формулировки ЛП широко используются. Данциг был убежден, что ЛП было ценным инструментом при решении задач целочисленного программирования, причем даже сложных – наподобие задачи коммивояжёра. Фактически, все успешные современные работы, авторы которых рассматривают все более большие задачи такого рода, основаны на подходе Данцига, Фулкерсона и Джонсона.

Необходимо отметить важную работу [136], основанную на потоке в сети и ставшую значимым вкладом Данцига в комбинаторную оптимизацию. Р. Фулкерсон и А. Хоффман (Alan Hoffman) были двумя из его коллег и соавторов. Ключевое наблюдение, которое легло в основу работы, заключалось в том, что этот класс линейных программ дает целочисленные базисные решения, когда правая часть и ограничения являются целочисленными; таким образом, целочисленная программа решается СМ. Кроме того, и двойственная задача является целочисленной, когда цены целочисленные. В частности, теорема двойственности дает доказательство нескольких результатов комбинаторной оптимизации, на которые иногда ссылаются как на «теоремы о минимаксе». Примером весьма сложного применения этой теоремы является доказательство Данцигом и Хофманом теоремы Дилворта (Dilworth). Эта теорема говорит о том, что для частичного порядка минимальное число цепочек, покрывающих все элементы, равно максимальному числу попарно несвязанных элементов.

Конечно, Джордж Данциг, который всегда проявлял огромный интерес к приложениям, развил богатый набор приложений целочисленного программирования. Одним из этих приложений является то, что сегодня называется «моделью распределения флотилий». Современные модели этой задачи широко используются в планировании функционирования авиалиний. По мере роста размеров этих задач и включения в эти модели все большего количества деталей, множится и число вычислительных проблем, связанных с их решением. Тем не менее, эта модель в целом доказала, что является вполне пригодной для обработки, несмотря на то, что она является большой частично-целочисленной программой. В сущности, вторая из двух статей [166] по этой теме была одним из первых примеров задачи стохастического целочисленного программирования. Суть этой задачи заключается в том, чтобы распределить (провести назначение) самолёты по маршрутам для данного числа самолётов и маршрутов. Главной целью этой задачи является максимизация чистого дохода при помощи назначения более крупных самолетов на рейсы, которые имеют больший спрос, или посредством использования большего числа самолетов на таких маршрутах. Стохастический вариант данной задачи имеет возможность оставить свободные места или оставить спрос неудовлетворённым в зависимости от реализовавшегося спроса.

Связанная с вышеописанной задача была сформулирована в следующем виде: необходимо отыскать минимальное число танкеров для покрытия расписания. Эта задача используется сегодня, например, компаниями с чартерными авиалиниями для покрытия требуемого числа полётов с помощью минимального числа самолётов. Расписание требуемых полетов в чартерной деятельности обыкновенно не сбалансировано, в силу чего требуются перегонные полёты или порожняковые полеты для того, чтобы покрыть необходимые рейсы. Данциг и Фулкерсон [143] смоделировали это в виде задачи о потоках в сетях. С большим, чем минимальное, числом самолетов совокупное расстояние перемещения порожняком может быть уменьшено с помощью использования более чем минимального числа самолетов. В принципе, задачи распределительные, транспортные и о потоках в сетях имеют очень много родственного. Более того, в своей первоначальной работе о максимальном потоке в сети (опубликованной стачала в 1954 г. как доклад в RAND) Форд и Фулкерсон

[172] упоминают, что задача о максимальном потоке была сформулирована Харрисом (T.E. Harris). В своей более поздней книге Форд и Фулкерсон [171] дали более точную ссылку на происхождение этой задачи, сказав, что изначально она была поставлена перед авторами Т.Харрисом (T.E. Harris), который совместно с генералом Ф.Россом (F.S. Ross) сформулировал упрощенную модель потока в железнодорожной сети и поставил задачу о потоке. Сделано это было в [188] – секретном докладе Т.Харриса и Ф.Росса 24.10.1955 для ВВС США, рассекреченном 21.05.1999. Что интересно, задача о максимальном потоке родилась из рассмотрения железнодорожной сети СССР. Более того, в своём докладе Харрис и Росс решали относительно крупномасштабную задачу о западной части СССР и Восточной Европе. Вопреки комментариям Форда в Фулкерсона, Харрис и Росс искали не максимальный поток, а наоборот – минимальный разрез – сети СССР.

Замечательная прикладная статья Дж. Данцига и Ж.Рамсера (J.H. Ramser) [151] представила то, что сейчас называется проблемой маршрутизации автотранспорта (Vehicle Routing Problem – VRP) – область, которая имеет свою собственную обширную литературу и методы решения. Эта задача является обобщением задачи коммивояжера, имеющим много вариаций. Как сказано в [245], VRP «требует определения оптимального набора маршрутов, которые должны быть выполнены парком транспортных средств для того, чтобы обслужить данный набор потребителей, и она является одной из наиболее важных и изученных задач комбинаторной оптимизации. Более чем сорок лет прошло с того момента, как Данциг и Рамсер представили эту задачу в 1959 году».

В дополнение к уже названным надо обратить внимание на статью Данцига [136], которая указывает на богатое множество задач, которые могут быть смоделированы в виде программ целочисленных вычислений. Эта статья побудила такие вычислительные достижения, как методы разрезающей плоскости, перебора и алгоритм метода ветвей и границ для того, чтобы эффективно решать эти разнообразные задачи. Работы и достижения в этом направлении продолжаются вплоть до сегодняшнего дня.

Данциг часто говорил о стохастическом программировании как о «настоящей проблеме». Он был чрезвычайно хорошо осведомлён относительно того, что почти все важные задачи принятия решений являются задачами принятия решений в условиях неопределённости, то есть такими, где, по крайней мере, некоторые из параметров в лучшем случае известны в статистическом смысле, а иногда нет даже доступной надёжной статистической информации. Значимый вклад Данцига в изучение этого важного класса задач восходит к середине 1950-х гг. Вероятно, импульсом, давшим начало исследованиям, стала практическая задача распределения самолетов по путям в условиях неопределённого спроса, которой занимался один из коллег Данцига в RAND – А. Фергюсон [167]. После того, как они разработали элегантную процедуру для решения этой конкретной задачи, Данциг, не остановившись на достигнутом, вернулся к своему рабочему столу и написал фундаментальное исследование, в котором он не только ввел фундаментальную модель стохастического программирования, известную сегодня в качестве стохастической программы с рекурсией, но также начал выводить ее основные свойства. И совершенно естественно, что это вновь подтвердило большую необходимость в том, чтобы уметь эффективно работать с крупномасштабными математическими программами.

Если допустить всего лишь небольшое переформулирование, то можно сказать, что у Данцига была следующая модель: $\begin{cases} c \cdot x + E\{Q(\xi, x)\} \to min, \\ \text{при условии } Ax = b, x \geq 0, \end{cases}$ где $E\{\cdot\}$ обозначает взятие математического ожидания, и $Q(\xi, x) = inf\{q \cdot y \mid Wy = \xi - Tx, y \geq 0\}$.

Здесь ξ является случайным вектором со значениями ξ в $\Xi \subset \mathbb{R}^d$; обобщение этой модели позволит учитывать случайный характер параметров (q, W, T), в дополнение к только правым частям, при определении функции $Q(\cdot, x)$. Данциг доказал, что в действительности эта задача является вполне определенной задачей выпуклой оптимизации, не накладывающей ограничений на закон распределения случайных элементов, за исключением того требования, чтобы задача, определяющая Q, была разрешима для всех x и $\xi \in \Xi$ (сейчас это требование носит название условия *полной рекурсии)*. Это означает, что стохастические программы с рекурсией, несмотря на то, что в общем случае не являются линейными, попадают в следующий «хороший» класс, а именно, в класс выпуклых программ. Однако, если случайный вектор $\boldsymbol{\xi}$ имеет конечный носитель, например $\Xi = \{\xi^l, l = 1, \dots, L\}$ с вероятностями $\{\boldsymbol{\xi} = \xi^l\} = p_l$, или если эта дискретизация появляется только в качестве аппроксимации для задачи, чьи случайные компоненты в действительности являются непрерывно распределёнными, ее решение x^* может быть найдено посредством решения соответствующей крупномасштабной линейной программы:

$$\begin{cases} c \cdot x + \sum_{l=1}^{L} p_l \cdot q \cdot y^l \to min, \\ \text{при условии:} \\ Ax = b \\ Tx + Wy^l = \xi^l, l = 1, \dots, L \\ x \geq 0, y^l \geq 0, l = 1, \dots, L \end{cases}$$

«крупной», конечно, в зависимости от величины L.

Здесь мы предлагаем, лишь чуть-чуть уклонившись от теоретического характера нашего описания, на мгновение обратиться к числовым характеристикам. И сделаем это с той лишь целью, чтобы можно было хотя бы немного более осязаемо представить размеры тех задач, о которых в настоящий момент идет разговор. Поэтому предположим, что ξ состоит всего-навсего из десяти независимых случайных переменных, а каждая из этих переменных, в свою очередь, принимает всего-навсего десять возможных значений. В таком случае в рассматриваемой нами линейной программе имеется, по крайней мере, 10^{11} линейных ограничений. Поясним, каким именно образом получается данное число: это 10^{10} возможных реализаций случайного вектора ξ, которые в свою очередь порождают 10^{10} систем, состоящих из 10 линейных уравнений каждая. Совершенно очевидно, что в итоге перед нами предстает поистине устрашающее задание.

Однако, к счастью, не все так безысходно, как могло бы показаться на первый взгляд. И благодарить за это нужно два метода, которые призваны прийти нам на помощь в данной ситуации. Во-первых, это метод декомпозиции Данцига-Вольфа, а, во-вторых, это метод статистического обучения Данцига.

Можно проверить, что, вплоть до замены знака в целевой функции, задача, двойственная для предыдущей, может быть выражена следующим образом:

$$\begin{cases} b \cdot \sigma + \sum_{l=1}^{L} p_l \xi^l \cdot \pi^l \to min \\ \qquad \text{при условии:} \\ A^T \sigma + \sum_{l=1}^{L} p_l T^T \pi^l \leq c, \\ W^T \pi^l \leq q, l = 1, \dots, L, \end{cases}$$

- то есть, задача с несколькими связывающими ограничениями и подзадача, которая сама может быть разложена на L относительно небольших (отделимых) подзадач. Метод декомпозиции Данцига-Вольфа был в полной мере приспособлен к структурированной задаче этого типа, что было использовано и объяснено в работе [147]. Тем не менее, этот элегантный подход требовал на каждой основной итерации решения (многократного) огромного числа «обычных» линейных программ. Именно из размышлений над этим вопросом выдвинулась на первый план идея решения только выборочного количества этих подзадач (дискретизации). Конечно, как только мы прибегаем к этой идее, больше нельзя быть уверенным относительно того, что в результате будет получено абсолютно оптимальное решение, однако из математической статистики хорошо известно, как следует поступать в таком случае. Данциг, Глин и Инфангер [145, 146] положились на тест Student-t [135] для того, чтобы оценить надёжность решений, которые получаются при использовании такого подхода. Они также предложили схему, основанную на выборке по значимости, которая уменьшает дисперсию выборки.

Исследование на тему метода компактного базиса для крупномасштабных линейных программ, которое Данциг начал в RAND, привело в Беркли к развитию обобщённого метода верхней грани (GUB). Как и всегда в творчестве Данцига, главным стимулом стала конкретная практическая задача, с которой ученый столкнулся во время того, как проводил консультирование корпорации Zellerbach. Вместо обычных нижних/верхних ограничивающих условий, m связывающих ограничений $Ax = b$ и ограничения неотрицательности расширены набором из L линейных ограничений с положительными правыми частями и таким свойством, что каждая переменная появляется не больше чем в одном из этих ограничений и, в таком случае, с положительным коэффициентом. В своей статье Данциг и ван Слайк (Van Slyke) [153] показывают, что оптимальное решение задачи такого типа обладает нижеследующими свойствами: во-первых, из любой группы переменных, относящихся к одному из этих L ограничений, по крайней мере одна из этих переменных должна быть базисной и, во-вторых, среди этих L уравнений число тех, которые приводят в итоге к двум или более базисным переменным, не больше чем (m – 1). Эти свойства были использованы для того, чтобы показать, что с подходящим образом модифицированными правилами перехода от вершины к вершине стандартного СМ и некоторым творческим подходом к отслеживанию и запоминанию результатов, можно, по существу, подходить к решению задачи таким образом, как если бы она содержала только m линейных ограничений. В таком случае, мы опять приходим к такой ситуации, в которой нам будет достаточно использования компактного базиса, а это в качестве результата дает значительно улучшенную эффективность и численную устойчивость данного метода.

4.3. Организаторская и преподавательская деятельность. Даже если принимать во внимание, что Данциг был ответственным за очень плодотворную работу, было бы большим заблуждением измерять ту роль, которую сыграл ученый в этой области в единицах только его публикаций. И причина такой нашей точки зрения в первую очередь в том, что Данциг всё время исключительно активно поддерживал студентов, коллег, и всех, кто заинтересован в том, чтобы войти в эту область, оказывая им свою полную поддержку. Он видел острую необходимость в том, чтобы находить подход к тому, как именно можно обращаться со сложными вычислительными задачами. Но его основной интерес, как нам представляется, все же лежал преимущественно в области построения моделей, которые окажут воздействие на выработку тактики в областях, которые принесут значительную пользу обществу в глобальном масштабе. Одним из характерных примеров такой попытки может служить проект «PILOT» [150]. Другим, безусловно заслуживающим большого внимания, примером является его непрерывное и активное участие в деятельности Международного института по анализу прикладных систем (International Institute of Applied Systems Analysis – IIASA). Главной миссией этого учреждения является проведение междисциплинарных научных исследований по разнообразным вопросам с точки зрения глобальных изменений. Суть вопросов, которыми интересуется данное учреждение, может относиться к такому широкому кругу тем, как окружающая среда, экономические, технологические, а также социальные проблемы.

4.3.1. Общества и другие научные организации по исследованию операций. ЛП и НЛП (которые зачастую собирательно относят к понятию «математическое программирование»; автором самого названия «математическое программирование» является Р. Дорфман) сыграли важную роль в формировании организаций профессионалов по ИО. Уже в апреле 1948 г. в Лондоне был основан Клуб по ИО (Operational Research Club); пятью годами позже он стал называться ИО общество Великобритании (Operational Research Society of the UK). Американское ИО общество (Operations Research Society of America – ORSA) был основан в 1952 г., а годом позже за ним последовал Институт науки управления (Institute of Management Sciences – TIMS). Две эти в целом аналогичные по отношению друг к другу организации, каждая со своими собственными журналами, объединились в 1995 г. с тем, чтобы сформировать Институт по ИО и управлению (Institute for Operations Research and the Management Sciences - INFORMS), который сегодня насчитывает в своих рядах уже приблизительно 12’000 членов. Во всем мире сейчас существует около сорока восьми национальных обществ ИО, общее число членов которых насчитывает приблизительно 25’000 человек.

Математическое программирование (или "оптимизация", как сейчас есть тенденция его называть) было всего лишь одной из многих тем, появлявшихся на страницах этих журналов. В действительности, первые тома этих журналов посвящали лишь маленькую часть своего объема математическому программированию, однако такому положению вещей суждено было измениться разительным образом с течением времени.

Через несколько лет было учреждено множество научных журналов для того, чтобы идти наравне с этим полем активных исследований. В дополнение к журналу *Mathematical Programming,* сейчас существует около дюжины других, чьи имена включают слово «оптимизация». Это число включает журналы по ИО, издаваемые различными обществами или при их участии, и другие подобные издания.

К 1960 г. ИО уже развилось настолько, что стало отдельной (междисциплинарной) областью исследований, имеющей естественные связи с математикой, статистикой, теорией вычислительных машин и систем, экономикой, деловым администрированием и некоторыми из более традиционных областей инженерного искусства. Данциг (и Шефард) основали ИО Центр (Operations Research Center – ORC), который осуществлял согласование действий по обучению и исследовательской работе по ИО. На протяжении нескольких лет, ORC располагался в весьма неудобном, маленьком и запущенном деревянное здании рамной конструкции на университетской станции Richmond Field на значительном отдалении (приблизительно в шести милях) от главной территории университета. Тем не менее, несмотря на все эти неудобства, ORC смог привлечь полную энтузиазма группу, состоящую из профессорско-преподавательского состава факультета и его студентов, которая занималась активным исследованием широкого спектра тем, связанных с ИО. Безусловно и вполне естественно, что исследовательская программа самого Данцига была наиболее обширной среди всех и, возможно, наиболее обширной по этой теме в Департаменте промышленного производства в целом.

В 1989 г. молодой австрийский стипендиат Г. Инфангер (Gerd Infanger) пришел на факультет ИО в качестве иностранного студента под руководством Дж. Данцига. Докторская степень Инфангера в Техническом университете Вены (Vienna Technical University) была связана с энергией, экономикой и ИО. Он предполагал продолжить свою исследовательскую деятельность, работая в этом же русле. Однако Данцигу удалось его заинтересовать и в итоге завлечь в исследовательскую программу по стохастической оптимизации, которая, как полагал сам Данциг, является тем самым направлением, в котором находятся действительно стоящие проблемы. Так началась новая чрезвычайно плодотворная и успешная совместная работа. На протяжении 1990-х гг. Данциг и Инфангер опубликовали в соавторстве семь статей о решении задач стохастического программирования.

Приблизительно в это же время Данциг начал еще одно плодотворное сотрудничество. Решив, что многое было сделано со времени публикации его знаковой работы [133], он решил объединить свои усилия вместе с М. Фапа (Mukund Thapa) с целью написания новой книги, которая должна была привести его «Linear Programming and Extensions» к более современному состоянию. Они уже успели путем совместных усилий завершить две книги [154] и [155] до того момента, когда здоровье Данцига резко пошатнулось и пришло в полный упадок. Это печальное событие произошло в начале 2005 г., оставив еще две ранее запланированные учеными книги в незаконченном состоянии.

4.3.2. Образовательные и научные программы и издательская деятельность. Данциг в Беркли предложил открыть аспирантуру по ЛП и НЛП в дополнение к курсу по потокам в сети. Эти курсы предлагались в то время, когда его книга [133] и классическая робота Форда и Фулкерсона [171] еще не были завершены. В тот момент были доступны некоторые корректуры в гранках, но фотокопировальное оборудование тогда было еще в его ранней стадии развития. Студенты Данцига были призваны для чтения корректуры [133] и одновременного обучения по ней. Богатство этой тематики и множество интересных задач Данцига, дало его докторантам огромные возможности для тем диссертационных работ и средства для их осуществления (доступ ко множеству технических отчётов, встречи с посетителями ORC и помощь в осуществлении поездок для участия в важных профессиональных встречах).

В течение шести лет в Беркли Данциг курировал одиннадцать докторских диссертаций. В тех диссертациях, которые курировал Данциг, рассматриваются следующие типы математического программирования: крупномасштабное ЛП, ЛП в условиях неопределенности, целочисленное программирование и НЛП. Расширение, которое развилось из последней тематики (несколькими годами позднее), стали называть теорией взаимодополняемости, которая является наукой о задачах комплементарности. Это системы фундаментальных неравенств следующего вида: $\begin{cases} F(x) \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x \cdot F(x) = 0. \end{cases}$ (4.3.2)

Кроме курирования диссертаций и написанию книг, Данциг занимался прикладными исследованиями в области наук о жизни, крупномасштабного ЛП, а также небольшим количеством задач оптимального управления. Занимаясь всем вышеперечисленным, он добавил титул «преподавателя» к своей широкий деятельности.

С момента основания в 1962 г. Программа по ИО была уполномочена присваивать степень доктора наук и стала межфакультетским университетским подразделением, отчитывающимся перед тремя деканами и шестью департаментами. К счастью, это обременительное положение изменилось в 1967 г. в то время, когда департамент ИО стал постоянным департаментом в Инженерной школе. Данциг сохранил свою должность по совместительству в Департаменте теории вычислительных машин и систем, но его основная деятельность была в департаменте ИО. Калифорнийский университет, расположенный в Беркли, последовал немного другим путем: в 1966 г. факультет промышленного производства стал факультетом промышленного производства и ИО. Когда Данциг переместился в Стэнфорд, центр притяжения западного побережья для математического программирования переместился к югу.

Среди специалистов, которых приняли на службу на факультет ИО, был R. B. Котле (W. Cottle), ранее бывший студентом в Беркли под научным руководством Данцига. Работая совместно, они написали несколько статей по теме так называемой задачи линейной комплементарности, которая есть специальный случай, когда отображение *F* в системе выше в этом пункте является аффинным. Одна из этих статей, «Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming», нашла значительный круг читателей в области ИО и стала, фактически, классической.

Хотя со всей очевидностью можно утверждать, что у Джорджа Данцига было прирожденное мастерство для занятия вопросами планирования, он совсем не проявлял интереса к организационной политике или административной деятельности. И тем не менее, не смотря даже на все эти условия, он начал преподавание в Стэнфорде в качестве президента TIMS. В 1968 г. Дж. Данциг и А. Вейнот (A. F. Veinott Jr.) совместно руководили очень успешным 5-недельным Летним семинаром по математике в науке принятия решений (Summer Seminar on the Mathematics of the Decision Sciences), спонсированным AMS. В 1971 г., под кураторством Данцига прошла Конференция по приложениям в области оптимизационных методов для решения крупномасштабных задач распределения ресурсов (Conference on Applications of Optimization Methods for Large-Scale Resource Allocation Problems) (в городе Элсинор, Дания), финансовую поддержку в организации которой оказало Подразделение научных поисков НАТО (NATO's Scientific Affairs Division). Еще двумя годами позднее Данциг был председателем на Восьмом международном симпозиуме по математическому программированию (8^{th} International Symposium on Mathematical Programming), который проходил в Стэнфорде в 1973 г. В тот же самый год Данциг стал первым председателем недавно учреждённого Общества математического программирования (Mathematical Programming Society).

Такая активная организаторская деятельность требовала много времени и внимания для своего успешного осуществления. Все же свободное от нее время активность Данцига была сконцентрирована на исследовательской работе по математическому программированию, научном руководстве докторантами. Всё это ему удавалось гармонично сочетать с написанием рекомендаций, предложений и планов, которые были столь необходимыми и неотъемлемыми шагами для обеспечения внешней финансовой поддержки его деятельности.

Руководящая роль, которую играл Данциг, и дополнительная поддержка факультета в лице его служащих и профессорско-преподавательского состава внесли огромный вклад в достижения высоты положения, занимаемого Стэнфордским факультетом ИО в международном научном сообществе. Среди тех многих смелых предприятий, которые Данциг организовывал в этот период, особенно выделяется как одно из наиболее важных и продолжительных лаборатория системной оптимизации (Systems Optimization Laboratory – SOL). На упомянутой выше конференции в Эльсиноре в 1971 г. Данциг выступал с лекцией «О необходимости лаборатории системной оптимизации». Годом позже, он вместе с соавторами выдвинул другую версию этой концепции на Advanced Seminar on Mathematical Programming, проходившем в Мэдисон, штат Висконсин. Как Данциг представил это, назначение SOL заключалось в развитии «вычислительных методов и связанных с ними компьютерных программ для численного анализа и оптимизации крупномасштабных систем». К 1973 г. в Стэнфорде уже была своя собственная SOL, а руководил ею, в качестве директора, ни кто иной, как сам Данциг. На протяжении многих последующих лет SOL была одарена выдающимися исследовательскими кадрами, работавшими в ней на постоянной основе, в числе которых были такие личности, как Philip Gill, Walter Murray, Michael Saunders, John Tomlin и Margaret Wright. Результаты, полученные в ходе продуктивной деятельности последней группы в виде исследований и программного обеспечения, получили мировую известность. Постепенно персонал лаборатории пополнили многочисленный профессорско-преподавательский состав и студенты, и со временем концепция SOL Данцига была скопирована в большом количестве других учреждений (порядка двух десятков).

В то же время, когда создавалась SOL, Данциг параллельно работал совместно с Т. Саати (T. L. Saaty) над другим, совершенно отличным, видом проекта: книгой [152], в которой предлагается концепция жилого многоэтажного города цилиндрической формы, в полной мере использующего вертикальное измерение и предназначенного для непрерывного круглосуточного функционирования (решая посредством этого проблему экономии ресурсов, используя наиболее рациональным образом весь комплекс средств обслуживания).

Данциг провел свой творческий отпуск 1973–1974 академического года в открывшемся годом ранее Международном институте анализа прикладных систем (IIASA). Ученые IIASA работали над задачами, связанными с областями энергетики, экологии, водных ресурсов и методологии. Данциг возглавлял методологическую группу и установил долгую связь с институтом.

Еще одним весьма памятным событием в 1973 г. был известный нефтяной кризис, произошедший на Ближнем Востоке. Вполне возможно, что именно это событие и инициировало интерес Данцига к исследованиям в области моделирования экономики энергетики. В течение следующих двух лет этот интерес постепенно эволюционировал, оформившись в итоге к 1975 г. в нечто, что он назвал «PILOT Model». Это была страсть, которой предстояло завладеть умами не только самого Данцига, но также и небольшой группы работников SOL, вплоть до конца 1980-х гг. (название «PILOT» является акронимом, образованным от названия «Planning Investment Levels Over Time», что можно перевести как «Планирование уровней инвестиций в течение времени»). Как Данциг, Мак Аллистер (McAllister) и Стоун (Stone) объясняют в [148], PILOT стремится «оценить воздействие старых и предложенных новых технологий на рост экономики США, и как состояние этой экономики и экономической политики может повлиять на ту скорость, с которой происходят инновация и модернизация». Благодаря проекту PILOT удалось обеспечить подходящий контекст, в рамках которого объединились одновременно три главных потока исследований, которые чрезвычайно интересовали Данцига: во-первых, моделирование высоко-релевантного экономического вопроса, во-вторых, методология крупномасштабного программирования и, наконец, в-третьих, вычисления оптимальных решений или решений задач экономического равновесия (комплементарности).

Когда Данциг делал свое резюмирующее выступление на Втором симпозиуме по ЛП (Вашингтон, 1955 г.), он произнес следующие слова: «Главная часть моей речи была посвящена техническим аспектам линейного программирования. Я рассматривал простые приспособления, которые могут сделать возможным эффективное решение множества задач, с которыми сталкиваются на практике. Интерес к этой тематике постоянно рос в промышленных комплексах и в правительстве, и некоторые из этих идей могут реализовать различие между интересом и применением». То, что из уст Данцига прозвучало упоминание о «создании различия между интересом и применением», являлось событием совершенно не случайным – напротив, это было глубоким убеждением ученого. Он прекрасно осознавал и не понаслышке знал, насколько больше может быть совершено посредством применения правильной комбинации из моделирования, математического анализа и алгоритмов, подобных симплекс методу. И в дополнение к вышеприведенному высказыванию, потом он еще добавил свой прогноз: «На протяжении следующих десяти лет мы увидим огромное количество важных приложений; и в самом деле, столь богатая по содержимому и ценности для промышленности и правительства эта математика программирования переместится на ведущие позиции в учебных планах университетов» [127, с. 685].

К началу 1950-х гг. курсы, посвященные теме ИО, начали появляться в учебных планах различных университетов, а вмести с ними пришло и ЛП. Мы уже упоминали про лекции, которые читались Чарнесом и Купером в Карнеги Тех (Carnegie Tech) в 1953 г. В тот год и ИО и ЛП были предложены в качестве программ для аспирантов в Институте технологий в Кейзе (Case Institute of Technology, предшественник Case Western Reserve University). В Стэнфорде ИО впервые стало преподаваться в рамках Программы для инженеров в 1954–55 академическом году, куда было включено и ЛП. В Корнелле преподавание по этим же тематикам началось в 1955 г., в то время, как в Северо-западном институте (Northwestern) их начали преподавать в 1957 г.

В последовавшие десятилетия всемирное преподавание ИО в высших учебных заведениях выросло поразительным образом. В некоторых случаях были учреждены отдельные факультеты ИО и появились соответствующие программы по получению ученых степеней; в других случаях эти названия (или их альтернативы вроде «наука управления» или «наука по принятию решений») были добавлены к названиям существующих факультетов; также предпринимались и другие мероприятия сходной направленности. Междисциплинарная природа, лежащая в самом основании этой области знаний, способствовала широкому кругу названий, под которыми скрывалась эта тематика, и учебных заведений, где она преподавалась (иногда даже внутри одной и той же организации, такой как Стэнфорд). Где бы ИО ни начинало обретать устойчивое положение, такие предметы как ЛП моментально перерастали статус одной из тем вступительных обзорных курсов: они тут же становились многими отдельными независимыми курсами, каждый их которых преподавался сам по себе.

Вместе с развитием учебных курсов произошел и взрыв издательской активности. Появились учебники, пособия и руководства для аудиторий, курсы для работы на семинарах и проведения исследовательской деятельности по широкому кругу вопросов ИО. Книги по математическому программированию составляли большую часть выпускаемой в рамках этой тенденции литературы. Одной из наиболее важных книг была книга Джорджа Данцига «Linear Programming and Extensions» [133]. Изданная в 1963 г., она последовала двумя годами позже за монографией Чарнеса и Купера [118]. Книга Данцига была настолько богата самыми разнообразными идеями, что она вскоре стала называться не иначе как «Библией ЛП».

4.3.3. Математическое влияние Данцига. Представляется совершенно невозможным дать полный и исчерпывающий отчёт о математическом влиянии деятельности Данцига. Вместо этого, видится более полезным сфокусироваться на некоторых ключевых аспектах.

Будет справедливо сказать, что до 1950-х гг. работа с системами, включающими в себя линейные – и тем более нелинейные – неравенства, имела весьма ограниченную сферу распространения. Это если не полностью относиться к первопроходческим работам Фурье, Монжа, Минковского, работам Венской школы 1930-х гг. и некоторым другим, но факт, тем не менее, остается фактом: вплоть до 1950-х гг. эта область лежала целиком в сфере деятельности ограниченного, хотя и очень высококомпетентного, клуба математиков и связанных с ним экономистов, с малым или даже совершенно отсутствующим влиянием в «практическом» мире. Развитие в исследовательской деятельности Данцига СМ всецело изменило данную ситуацию. Вполне возможно, его величайшим вкладом можно считать то, что именно он сумел своими действиями с успехом продемонстрировать, что возможно заниматься (и притом достаточно эффективно) задачами, включающими в себя ограничения в виде неравенств. Его сосредоточенность и решительность смогли инспирировать настоящий прорыв, в итоге создавший совершенно новую математическую парадигму, которая к настоящему времени смогла разрастись в несметное число разнообразных направлений.

Спустя очень короткое время специалисты-практики из самого что ни на есть широкого диапазона различных сфер (начиная от инженеров, руководителей, производителей, сельскохозяйственных экономистов, экологов и заканчивая менеджерами по планированию и представителями многих других профессий) увидели потенциал использования моделей линейного программирования благодаря тому, что теперь сложилась новая ситуация: отныне такие модели появлялись уже не сами по себе в отрыве от практики, а шли вместе с достаточно эффективным методом их решения. В математических кругах такое положение дел послужило настоящим переломным моментом, потому что стимулировало и вдохновило математиков и некоторых ученых, проводящих свои исследования в области теории вычислительных систем, вплотную приступить к изучению до того момента времени по существу незатронутого класс задач, причем не только с вычислительной, но также и с теоретической точки зрения.

Достаточно посетить сайт, аналогичный NEOS Server for Optimization [221] для того, чтобы получить представление, какие результаты удалось достигнуть в области линейных и нелинейных неравенств на вычислительном фронте и иметь впечатление о богатстве соответствующих методов, теперь широко доступных, для решения задач оптимизации и связанных с ними вариационных задач: проблем равновесия, вариационных неравенств, коалиционных и бескоалиционных игр, задач комплементарности, задач оптимального управления и так далее.

Если же говорить о переменах, произошедших на теоретическом фронте, то они также были весьма значительными. Так вместо классической структуры для анализа, которая по существу ограничивала круг рассматриваемых функций и отображений до тех, которые определены на открытых множествах или дифференцируемых многообразиях, возникла новая парадигма. Она сделала возможным освободить исследуемые математические объекты от этой классической системы взглядов. Была развита всеобъемлющая теория, которая оказалась в состоянии иметь дело с функциями, которые не обязательно являются дифференцируемыми или даже непрерывными и чьи области определения могут быть замкнутыми множествами или многообразиями, которые, в лучшем случае, соответствуют условиям ограничения Липшица (Lipschitzian) на поведение приращения функции. Это повлекло за собой новые представления о (суб)производных, которые вполне могут быть эффективно использованы для того, чтобы характеризовать особые точки в ситуациях, когда классический анализ не может способствовать никакому пониманию. Это породило принципиально новую теорию приближений, в которой классический основополагающий компонент, заключающийся в использовании поточечных пределов, заменен на основополагающий компонент, заключающийся в использовании пределов множеств; они вышли на сцену по причине врожденной односторонней (асимметричной) природы математических объектов, лежащих в области исследования. Для теории целых функционалов также были даны некоторые серьёзные математические основания, и был достигнут существенный прогресс в решении задач, над которыми ученые ломали голову на протяжении очень долгого времени.

Несмотря на то, что в этом направлении можно продвигаться намного дальше, в рамках этой работы представляется вполне достаточным привести ниже один замечательный пример. Теория (выпуклых) многогранных множеств моментально ожила, получив второе дыхание, как только СМ Данцига приобрел некоторое устойчивое положение в математическом сообществе. В начале, в 1950-ых годах, роль его проводника в жизнь возложила на себя команда исследователей из Принстона под руководством А. У. Таккера. Вскоре после этого метод был принят на вооружение в значительно более широком масштабе, благодаря мощному стимулирующему воздействию со стороны *гипотезы Хирча* (Hirsch), суть которой заключается в следующем.

Пусть дана линейная программа в стандартной форме, то есть с описанием допустимого многогранного множества в виде $S = R_+^n \cap M$, где аффинное множество M определяется при помощи m (не избыточных) линейных уравнений. В таком случае гипотеза заключается в том, что возможно перейти из любой вершины из S в любую другую вершину из S посредством допустимого пути, состоящего не более чем из (m-1) ребра, или на языке СМ – пути, требующего не более чем m (допустимых) шагов поворотов. Этот вопрос был положен в основу эффективности СМ. Гипотеза оказалась неверной, по крайней мере, в таком виде, как она была сформулирована, когда $m > 4$. Но она привела к интенсивному и всестороннему изучению проблемы, связанному с такими именами как Victor Klee, David Walkup, Branko Grunbaum, David Gale, Micha Perlis, Peter McMullen, Gil Kalai и Daniel Kleitman, которые исследовали геометрические и комбинаторные свойства многогранных множеств. Несмотря на действительное поведение СМ в реальной практике, в конце концов было все-таки продемонстрировано, что могут быть созданы такие примеры, на которых он посетит каждую вершину такого многогранного множества S, имея максимальное количество вершин. После построения такого рода примеров к вопросу об изучении эффективности СМ стали подходить другим образом, и внимание ученых повернулось в сторону исследования «ожидаемого» количества шагов. Некоторые частичные ответы на этот вопрос были предоставлены в начале 1980-х гг. в статьях [113] и [241]. Почувствовать и оценить, насколько важными являются вопросы, связанные с этой предметной областью, можно ознакомившись со статьей [240] про–восемнадцать «математических проблем для следующего века». Девятая из них звучит так: «Существует ли алгоритм над полем действительных чисел с полиномиальной оценкой временных затрат на его выполнение, который определяет разрешимость данной линейной системы неравенств $Ax \geq b$?» (такая, направленная на проведение распознавания, версия данной проблемы основывается на теории двойственности для ЛП).

Дж.Данциг имел богатый изобретательный и очень плодовитый ум и был страстно предан любимой работе на всем протяжении своей взрослой жизни. Несмотря на то, что его карьера началась с увлечения математической статистикой, обстоятельства сложились таким образом, что привели его в результате к тому, чтобы стать основателем математического программирования (или оптимизации). Созданием СМ для решения задач ЛП он дал миру такой инструмент, которому было уготовано впоследствии быть провозглашенным в качестве одного из «первого десятка алгоритмов» XX в. [158]. Сборник избранных произведений, являющихся результатами исследовательской работы Данцига, появился в печати в виде антологии [121].

И хотя, говоря о Данциге, вполне справедливо можно утверждать, что он построил всю свою жизнь вокруг математического программирования, тем не менее, ему замечательно удалось сделать это совершенно не в ущерб своим коллегам со всего мира. Так на протяжении своей долгой и исключительно плодотворной деятельности он соприкоснулся с жизнями огромного количества математиков, ученых в области теории вычислительных систем, специалистов по статистике, ИО, инженеров и ученых прикладников всех типов. Многие из этих представителей извлекли большую пользу и обогатились интересными идеями благодаря дружественным связям и постоянному общению с ним. Характеру и складу души Дж. Данцига было свойственно врожденное природное тепло, которое порождало сильное чувство преданности во всех людях, которые были с ним связаны и имели возможность тесного общения, и он, в свою очередь, с радостью возвращал его в полном объеме.

Многие из основных дней рождений и юбилеев Данцига были отпразднованы посредствам проведения разнообразных конференций, банкетов, издания юбилейных сборников статей, посвящённых его деятельности, и другими многочисленными мероприятиями подобного рода. Даже у созданного им СМ было проведено празднование пятидесятого дня рождения в 1997 на 16-ом Международном симпозиуме по математическому программированию (International Symposium on Mathematical Programming – ISMP), который был проведен в Лозанне, Швейцария. В 2000 г. Джордж Данциг был удостоен чести получить исключительно почетное звание основателя направления на 17-ом ISMP, состоявшемся в городе Атланта в штате Джорджия, США. По воспоминаниям его друзей и коллег, вполне вероятно, что из всех торжеств и церемоний награждения, проводившихся в честь Данцига, наиболее трогательными были конференция и банкет 2004 г., прошедшие сразу после девяностого дня рождения ученого. Среди присутствовавшей на мероприятии аудитории было множество его друзей, коллеги из прошлого и настоящего, бывшие студенты Данцига и нынешние студенты факультета. К всеобщий удовольствию и восторгу присутствовавших, он обрадовал и восхитил всех тем, что был в на редкость хорошей форме для человека такого возраста; и более того: он выглядел довольным и получающим удовольствие от всего происходящего. Печально, однако, что в течение двух месяцев, его здоровье серьезно ухудшилось и вскоре его не стало.

Вполне справедливо будет сказать, что Данциг заслужил бессмертное место в истории математики. Его будут тепло помнить еще многие и многие годы те, кто имел счастье знать его и общаться с ним. Другим же он будет известен далеко в будущем только по его работе и оказанному ею на мир влиянию. Частично это будет обеспечиваться, в том числе, и учрежденной совместно Математическим обществом программирования (Mathematical Programming Society) и Обществом промышленной и прикладной математики (Society for Industrial and Applied Mathematics) в 1982 г. премией Данцига, также как и учрежденной INFORMS в 1994 г. наградой Данцига для диссертантов (Dantzig Dissertation Award), равно как и завещанной в качестве наследства и обеспеченной постоянным доходом стипендией, которая называется ИО Данцига (Dantzig Operations Research), на проведение научно-исследовательских работ в университете, присуждаемой начиная с 2006 г. в департаменте науки управления и инженерии (Department of Management Science and Engineering) в Стэнфордском университете.

4.3.4. Признание заслуг Данцига. 1975 г. был богат на новости, принеся Данцигу и сообществу математического программирования разные известия. Наиболее значимым событием можно назвать присуждение Нобелевской премия 1975 г. по экономике, которая была вручена совместно Канторовичу и Купмансу «за их вклады в теорию оптимального распределении ресурсов». Международная общественность, состоявшая из доброжелателей Джорджа Данцига (включая получателей премии), была серьезным образом удивлена и даже несколько потрясена тем, что он не был выбран для этой выдающейся награды. В своих речах, посвященных получению премии, Канторович и Купманс оба признали независимость работы Данцига, а Купманс чувствовал это упущение так остро, что он даже пожертвовал одну третью часть своих премиальных денег в пользу IIASA в честь Данцига.

Однако были в то же самое время и однозначно счастливые для Джорджа Данцига новости. Так в этот же год ученый получил престижную награду – Национальную медаль по науке (National Medal of Science) от президента Г. Форда (Gerald Ford). Другими, также очень престижными, признаниями его заслуг стали получение награды фон Неймана – John von Neumann Theory Prize от ORSA и TIMS и принятие в члены Американской академии искусств и наук (American Academy of Arts and Sciences). Четырьмя годами ранее, в 1971 г., Данциг уже был удостоен членства в Национальной академии наук (National Academy of Sciences), а в будущем ему еще предстояло стать (десять лет спустя, в 1985 г.) членом Национальной инженерной академии (National Academy of Engineering). Всего же за его долгую жизнь Данцигу были присуждены, наряду с вышеперечисленными, и многие другие награды и, в дополнение к этому, - восемь почетных докторских степеней. Начиная с 1970 г., он был включен в перечень редакторских коллегий двадцати двух различных журналов.

Если говорить о Данциге в качестве коллеги и в качестве наставника, то он, как и Канторович, вне всякого сомнения, был замечательным приобретением для любого коллектива. Тот факт, что он имел обширные знания в области математического программирования и богатейший опыт в использовании его методологии в практических задачах, не требует дополнительных пояснений – это и так само собой разумеется. Однако это еще далеко не все, что делало Данцига столь ценным сотрудником: не менее важным можно считать еще и то, что он был исключительно терпеливым и внимательным слушателем и, выслушав, всегда имел ответ на всё, что бы ни говорилось ему. Причем, что особенно ценно, ответ этот был всегда без исключения убедительно обоснованным наблюдением или весьма ценным предложением, которые будут явно способствовать продвижению дискуссии вперёд. Работая в качестве профессора в Стэнфорде, Данциг выпустил сорока одного докторанта. Достаточно взглянуть на темы их диссертаций, чтобы понять диапазон его интересов: крупномасштабное ЛП, стохастическое программирование, комбинаторная оптимизауия, НЛП, неприрывное ЛП, сети и графы, комплементарность и вычисление экономических равновесий, динамическое линейное и НЛП, вероятность, и еще семь тем в других областях. То искусное научное руководство и наставничество, которое Данциг привнес в диссертационную работу студентов, и та энергия, которую они впоследствии передали сообществу по ИО, показывают, насколько результативным в действительности оказался его ранний план иметь учеников и последователей, продолжающих его дело (достаточно полную версию «академического генеалогического древа» Данцига см. в [217]).

Глава 5. Работы других авторов и общая картина развития линейного программирования.

5.1. Обзор развития линейного программирования с точки зрения математики. **5.1.1. Линейное программирование и родственные задачи.** Заключительная глава данной работы посвщена Теореме Каруша-Куна-Таккера, исследованиям Фон Неймана и описанию алгоритмов, имевших наибольшее, с точки зрения автора, значение для развития области ЛП в целом. Однако, прежде чем перейти к данным вопросам, подведем промежуточный итог, который позволит увидеть общую картину развития ЛП и результатов этого прогесса.

Как известно, задачами ЛП называются конечномерные задачи о нахождении минимума или максимума линейной функции при ограничениях, заданных линейными неравенствами. Вот одно из аналитических описаний ЗЛП (его называют нормальной формой задачи):

$\langle c, x\rangle \to \max, Ax \le b, x \ge 0,$ где $c, x \in \mathbb{R}^n, A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), b \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j, 1 \le j \le m, x_i \ge 0.$ (ЗЛПНФ’)

Или в таком виде $\langle c, x\rangle \to min, \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}, x \in \mathbb{R}^n_+$ (ЗЛПНФ)

Множество допустимых x образовано пересечением конечного числа полупространств, то есть является полиэдром (если оно ограничено, то это – многогранник).

Данная задача геометрически инриентируется как поиск опорной гиперплоскости (с заданной нормалью), определяемой целевой функцией, к полиэдру, описывающему множество допустимых решений.

Целесоообразно подойти к вопросу со следующих сторон:

1) теория экстремума,

2) теория СЛН,

3) геометрия полиэдров,

4) математическая экономика,

5) ЛП и история человечества.

Задача (*ЗЛПНФ*) принадлежит классу экстремальных задач, которые изучает математический анализ, и одновременно к классу выпуклых задач, исследованием которых занимается выпуклый анализ. Сам выпуклый анализ выделился в качестве самостоятельной области, получившей это название, в двадцатом веке. В силу природы изучаемых выпуклым анализом обектов, он одновременно относится как к геометрии (поскольку выпуклость изнально является понятием геометрическим), так и к анализу (в силу того, что – через Декарта – относится к теории СЛН). Постепенно выпуклый анализ получил своё обобщенте также и на случай бесконечномерных линейных топологических пространств, однако все наиболее важные факты относятся к конечномерному пространству, равно как все главные результаты имеют содержательную интерпретацию даже в самом простом двумерном случае.

Сквозной для всей теории выпуклости является идея, оформившаяся в виде принципа двойственности выпуклых объектов, заключающаяся в том, что у всех выпуклых замкнутых объектов есть два описания – в основном и двойственном пространствах. В рамках выпуклого анализа исследуются такие объекты, как: выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи. ЗЛП (содержательный класс которых формализуется (ЗЛПНФ)) есть частный случай последних.

В связи с этим в пунктах ниже (5.1.2–5.1.5) остановимся несколько подробнее на кождом из этих понятий.

Здесь же отметим, что, принципе, можно сказать, что основыные аспекты ЛП следуют из теорем, описывающих СЛН, среди которых центральное место занимают теорема Фаркаша-Минковского о зависимых неравенствах, двойственного представления многогранников и условия ограниченности многогранника.

Запишем ЗЛП так: $\max\{(c,x) \mid Ax \leq b\}$. Теорема Фаркаша-Минковского [164] является базовой для построения всей дальнейшей теории СЛН. Она говорит, что, если неравенство $(c, x) \leq \gamma$ является следствием системы $Ax \leq b$, то $\exists\{u_j \geq 0\}_0^m$, для которых $\forall x: (c, x) - \gamma \equiv (\bar{u}, Ax - b) - u_0$, при этом если $\{x \mid (c, x) - \gamma = 0\} \cap \{x \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset \Rightarrow u_0 = 0, \gamma = \max\limits_{Ax \leq b}(c, x)$. Из условия теоремы понятно ее значение для решения ЗЛП: ЗЛП разрешима $\Leftrightarrow \exists \gamma: (c, x) \leq \gamma$ следует из $Ax \leq b$. Причем, если $\gamma = \sup\{(c, x) | Ax \leq b\}$, то $\widehat{M} \coloneqq \{x | Ax \leq b\} \cap \{x | (c, x) = \gamma\} \neq \emptyset$, и $\forall \hat{x} \in \widehat{M}$ – решение ЗЛП. Тем самым эта теорема дает возможность работать с двойственными объектами ЛП и посредствам этого, во-первых, сводить ЗЛП к решению заданной в явной форме СЛН, и, во-вторых, сводить матричную игру в смешанных стратегиях к паре взаимно двойственных ЗЛП, и, следовательно, к обычной СЛН.

5.1.2. Теория выпуклых множеств. Теория выпуклых множеств поучила бурное развитие в течении девятнадцатого века и первой половины двадцатого века и связана в первую очередь с такими именами как: Коши, Штейнер, Брунн, Минковский и др.

Для рассмотрения выпуклого замкнутого множество, находящегося в конечномерном евклидовом пространстве, существует два подхода. Первый заключается в рассматирении его как множества точек, для которого выполняется условие, что если какие-то две произвольные точки лежат в нём, то и весь отрезок, соединяющий данные точки, также лежит в нём. Второй подход (который следует из теоремы Г. Минковского) заключатеся в рассмотрении этого множества, как пересечения всех полупространств, в которых лежит данное множество.

Минковский ввел для всякого выпуклого множества A, которому принадлежит начало координат, двойственную операцию, называемую полярой, которая ставит данному множеству в соответствие другое множество, называемое его полярой: $A^{\circ} = \{y \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \forall x \in A\}$. Если воспользоваться в этой ситуации теоремой Минковского, то получается теорема о биполяре: выпуклость и замкнутость содержащго начало координат множества A эквивалентна тому, что $A^{\circ\circ} = A$.

В качествве основных действующих лиц при создании теории двойственности следует назвать Минковского и фон Неймана, равно как (в геометрии и бесконечномерном анализе) Кэли, Плюккерера, Банаха, Шварца, Гротендика и др.

Говоря о концнепции двойственного описания различных объектов, приведем ее проявление в виде интерпретации следующих двух теорем.

Теорема двойственности для конусов: существуют два описания для выпуклого замкнутого конуса в $\mathbb{R}^n$. Согласно первому, это такое выпуклое множество, что елси какая-то точка принадлежит ему, то и весь луч, исходящий из начала координат и проходящий через рассматриваемую точку, также принадлежит данному множеству. Согласно второму, это множество является пересечением множества однородных неравенств. Точно также для полиэдрального конуса верно, что он есть как коническая оболочка конечного числе лучей, так и пересечение конечного числа линейных однородных неравенств.

Теорема двойственности для многогранников: существуют два описания для выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^n$. Согласно первому, это – выпуклая оболочка конечного числа точек. Согласно второму, он может рассматриватья как пересечение конечного числа линейных неравенств. Если мы рассматриваем выпуклый полиэдр, то он является совмещение двух описанных результатов.

Вышеописанные факты примо следуют из теорем двойственности Минковского. К отдельным частным результатам пришли Фаркаш, Г. Вейль, Гейл, Ки Фань и другие.

5.1.3. Начала теории выпуклых функций. Начала теории выпуклых функций были заложены в девятнадцатом веке и первой половине двадцатого такими учеными, как Иенссен, Штольц и др. Замкнутая выпуклая функция имеет двойное описание. Первое заключается в том, что – это функция с выпуклым замкнутым надграфиком. Второе – следует из теоремы Фенхеля–Моро и заключается в том, что ее надграфик представляет собой пересечение надграфиков всех аффинных функций, надграфики которых содержат надграфик самой функции.

Фенхель ввел двойственную операцию (известную сейчас как преобразование Юнга–Фенхеля), сопоставив всякой выпуклой функции f, которая мажорируется аффинной функцией, новую функцию: $f^*(y) = \sup_x(\langle x, y\rangle - f(x))$. Если применить сюда теорему Фенхеля–Моро, то получается, что: выпуклось и замкнутость мажорируемой аффинной функцией функции f эквивалентна тому, что $f^{**} = f$.

Из приведенных выше определений операций поляры и преобразования Юнга–Фенхеля также видна роль неравенств в построении теории выпуклости. Начала теории неравенств относятся к XIX веку и первой половине двадцатого, и связаны с такими именами, как Фурье, Фаркаш и др.

5.1.4. Экстремальные задачи и принцип Лагранжа. Рассмотрим задачи такого типа:

$$f_0(x) \to \min, \qquad f_i(x) \leq 0,\ 1 \leq i \leq m,\ x \in A, \tag{ВЗ}$$

где f_i — выпуклые функции, а A — выпуклое множество в конечномерном евклидовом пространстве. Такие задачи называются выпуклыми и составляют важный тип экстремальных задач.

Исследование любого типа экстремальных задач подразумевает ответ на вопросы о существовании, условиях экстремума и методах его поиска. Для необходимых условий экстремума существует фунтаментальный принцип – принцип Лагранжа. Суть этого принципа заключается в том, что для широкого класса экстремальных задач (с ограничениями-равенствами и неравенствами) эти условия получаются как условия минимума для функции Лагранжа, нахождение экстремума которой следует теперь уже рассматривать, как задачу без ограничений, но добавляя условия неотрицательности множителей Лагранжа и условия дополняющей нежёсткости, соответствующие неравенствам. То есть для нахождения необходимого условия в (ВЗ) конструируют функцию Лагранжа для данной задачи и записывают для нее условие минимума, теперь уже как для задачи без ограничений. Тогда для (ВЗ) функция Лагранжа: $\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$, где $\{\lambda_i\}_{i=0}^{m}$ – набор множителей Лагранжа. Тогда для (ВЗ) получаем (теорема Каруша–

Куна–Таккера): если $\hat{x}$ – решение (ВЗ), то найдется набор множителей Лагранжа $\hat{\bar{\lambda}}$, при котором функция $x \longmapsto \mathcal{L}\left(x, \hat{\bar{\lambda}}\right)$ достигает абсолютного минимума на множестве A и при этом выполнены условия неотрицательности и дополняющей нежесткости. (ВЗ) имеет двойственную, в которой множители Лагранжа выполняют роль переменнымх. Для выпуклых задачах, если множитель при функционале не равен нулю, необходимые условия экстремума являются одновременно и достаточными.

5.1.5. Линейное программирование как подкласс экстремальных задач. Как уже сказано, решения любой экстремальной задачи изучают с точки зрения: существования, необходимых и достаточных условий экстремума, а также алгоритмов его поиска. Рассмотрим (ЗЛПНФ) с этой точки зрения.

a) Проблемы существования в задачах ЛП решаются посредствам соответствующей теоремы:

Теорема существования: Если множество допустимых элементов в задаче (ЗЛПНФ) непусто и значение задачи не равно $-\infty$, то решение задачи существует.

b) Условия экстремума. В теории ЛП принцип двойственности выпуклых объектов теории выпуклости и принцип Лагранжа теории экстремума объединяются и дают такое утверждение: согласно принципу Лагранжа для выпуклых задач, если у (ЗЛПНФ) существует решение (обозначим его $\hat{x}$), тогда имеется набор множителей Лагранжа (обозначим их $\hat{\bar{\lambda}}$), такой что функция Лагранжа с ними достиает минимум в решении (ЗЛПНФ), то есть выполнено

– условие минимума (это основное условие): $\min\limits_{x \in A} \mathcal{L}(x, \hat{\bar{\lambda}}) = \mathcal{L}\left(\hat{x}, \hat{\bar{\lambda}}\right)$;

и, кроме того, выполняются также:

– условие дополняющей нежесткости: $\langle \hat{\bar{\lambda}}, A\hat{x} - b \rangle = 0$,

– условие неотрицательности: $\hat{\bar{\lambda}} \geq 0$,

и, свырх того, если при этом множитель Лагранжа при функционале не равен нулю ($\hat{\lambda}_0 \neq 0$), то все эти условия (минимума, нежёсткости и неотрицательности), взятые вместе, будут достаточными для минимума в (ЗЛПНФ).

Для (ЗЛПНФ) функция Лагранжа (с множителем Лагранжа при функционале равным единице) выглядит так: $\mathcal{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \langle \mathrm{c}, \mathrm{x} \rangle + \langle \mathrm{y}, \mathrm{Ax} - \mathrm{b} \rangle$. Если $\hat{x}$ – решение (ЗЛПНФ), то существует $\hat{y} \geq 0$, такой что $\min\limits_{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n_+} \mathcal{L}(\mathrm{x}, \hat{\mathrm{y}}) = \mathcal{L}(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{y}})$, а также $\langle \mathrm{A}\hat{\mathrm{x}} - \mathrm{b}, \hat{\mathrm{y}} \rangle = 0$. Карушем был первым, кто пришел к данному результату (идея которого была заложена еще в работах Лагранжа). Произошло это в 1939 г., однако достижение осталось тогда незамеченным. В силу чего в 1951 г. было повторно открыто Куном и Таккером (исследование Таккера, Г.Куна и Д.Гейла началось в 1948 г.). Из сказанного выше следует, что значение задачи

$\langle \mathrm{b}, \mathrm{y} \rangle \to \min, \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} \geq \mathrm{c}, \mathrm{y} \geq 0$ (ЗЛПНФ'*)

$\langle \mathrm{b}, \mathrm{y} \rangle \to \max, \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} \geq \mathrm{c}, \mathrm{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}}_{+}.$ (ЗЛПНФ*)

совпадает со значением (ЗЛПНФ). Эта задача называется двойственной к (ЗЛПНФ).

То есть, если $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, значение (ЗЛПНФ) равно значению (ЗЛПНФ*), где множители Лагранжа выполняют роль переменных, функционал – роль правых частей, правая часть (ЗЛПНФ) – роль функционала (ЗЛПНФ*), матрица ограничений транспонируется, а неравенства становятся противоположными.

Данный результат – проявление общего принципа двойственности выпуклых объектов, говорящего что выпуклые объекты (множества, функции, задачи) имеют два представления (как выше продемонстрировано для ЗЛП).

Заметим, что у множителей Лагранжа есть полезная экономическая интерпретаця.

c) Алгоритмы поиска экстремумма. Один довольно примитивный алгоритм был предложен в работах Фурье. Первым реально применимым для серьезных задач методом решения ЗЛП стал предложенный Канторовичем метод разрешающих множетелей, а один из учеников Канторовича – И.И. Дикин сделал чрезвычайно важное продвижение, предложив метод штрафов. [20]. Знаменитый алгоритм Кармаркара близок к методу Дикина, но появился почти на два десятилетия позже [199]. Среди последовавших эффективных методов отметим СМ Данцига, который основывается на методе целесообразного спуска. Именно с него началось действительно повсеместное использование численных методов для решения проблем выпуклого программирования. Другие значимые продвижения были получены А.Ю. Левиным и Ньюманом (метод центрированных сечений), а дальнейшее развитие произошло в исследованиях Шора, Немировского и Юдина (метод эллипсоидов), Хачияна (метод отсечения), Нестерова, Л.А. Левина, Кармаркара и других ученых (о них подробно пойдет речь ниже в 5.4).

Полное осмысление вышеописанного произошло в достаточно короткие сроки:

– теория СЛН появилась уже в XIX в. (в исследованиях Фурье, потом Фаркаша), и продолжала свое развитие в середине XX в. (в работах Ки Фаня, Голдстейна и других);

– развитие теории выпуклых полиэдров обязано работам О.Л. Коши, Г. Вейля и другим;

– Минковский открыл двойственность в выпуклость (сама идея двойственности принадлежит Минковскому, но он представил её в теории чисел, и в такой форме она не сразу стала ясна), а М.Крейн, Банах, Гротендик и другие создали теорию двойственности векторных пространств;

– первым, кто обратился к исследованию ЗЛП был Канторович, однако в силу ряда исторических и политических причин его исследования не были поддержаны. В противовес этому, на Западе, исследования этого направления процветали и имели множество сторонников, в результате теория получила бурное развитие в США (в работах Данцига, Куна, Таккера и других);

– задачи с неравенствами попали в фокус исследователей, преимущественно, в военные годы XX века (в работах Каруша, Джона и других);

– на развитие алгоритмов выпуклой оптимизации огромное влияние оказали работы Канторовича, Данцига и их последователи: А.Ю. Левин, Л.А. Левин, А.С. Немировский, Л.Г. Хачиян , Н. Кармаркар, Ю.Е. Нестеров и другие;

– вклад большого количества других ученых также заслуживает внимания (например, Кли, Грюнбаум и другие). Что характерно, все результаты, полученные перечисленными выше исследователями, имеют ясные формулировки и просты по существу.

Также можно сказать, что отдельный интерес представляет транспортная задача и её осмысление, которое восходит к Монжу и продолжается в СССР в работах Канторовича и его учеников, а затем В. Л. Левина, А. А. Милютина и других [69],[70]. Об этой задаче, получившей в итоге название «Задачи Монжа–Канторовича», уже шла речь выше.

Аналогичные проблемы также рассматривались в США Ф.Хичкоком в 1940-х гг. и в СССР А.Н.Толстым в 1930-е гг. ([90], [91]), где он изучает транспортную задачу и описывает некоторые подходы к её решению, включая хорошо ныне известную идею, что оптимальное решение не должно содержать циклов с отрицательной стоимостью в разностном графе – графе, содержащем ребра из каждого источника в каждый пункт потребления и дополнительно ребра из каждого пункта потребления к источнику, если перевозка по этому соединению положительна; в последнем случае цена обратного ребра равна по модулю и обратна по знаку цене прямого ребра). Однако Толстой (равно как и работа Канторовича 1940 г. [30]) не дает общего метода решения, который впервые появился в [54].

5.2. Фон Нейман, теория игр и ее связи с линейным программированием. Многие игры двух лиц описываются как поиск $\max_x \min_y xAy$, когда $x = \{x_1,\dots, x_m\}$ и $y = (y_1,\dots, y_n)^T$ пробегают множества неотрицательных векторов, $x_1 + \dots + x_m = 1$, $y_1 +\dots+ y_n = 1$, A – известная $(m \times n)$-матрица.

Ясно что $\max_x \min_y xAy \le \min_y \max_x xAy$. Э. Борель [112], сосредоточивался на матрицах кососимметрического типа и выдвинул гипотезу, согласно которой существуют матрицы такого типа, для которых достигается строгое неравенство.

Но в 1928 г. Дж. фон Нейманом была доказана справедливость равенства $\max_x \min_y xAy = \min_y \max_x xAy$ для произвольной матрицы A [225]. На самом деле, последнее утверждение равносильно теореме двойственности ЛП, что было продемонстрировано Данцигом, а также Д. Гейлом, Х. У. Куном и А. У. Таккером. Формулировка теоремы двойственности была дана фон Нейманом в не опубликованной заметке [223]. Первое же опубликованное доказательство дали Гейл, Кун и Таккер в [180].

В свою очередь из теоремы двойственности ([149]; [223]) напрямую следует теорема Минимакса для игр двух лиц с нулевой суммой ([180]).

В 1928 г. произошло знаковое событие: Джон фон Нейман сделал выступление перед Математическим обществом в Геттингене (см. [225]), в ходе которого он представил свое доказательство данной теоремы. Несмотря на это, вплоть до 1944 г. тема, связанная с вопросами ТИ, так и не получила значительного развития (точнее говоря, по этой тематике наблюдалось почти полное затишье). Однако в 1944 г. вышел в свет фундаментальный совместный труд фон Неймана в соавторстве с Моргенштерном [226]. В этой работе одновременно было представлено развитие математической теории и сделан выбор сферы ее приложения, продиктованный соавторством Моргенштерна – известного экономиста. Спустя лишь очень небольшое время вполне ожидаемо выяснилась способность ТИ конкуренции к эффективному исследованию наравне с вопросами экономической конкуренции так и задач ведения военных действий. Начиная с этого момента наблюдалась одновременная разработка как практических, так и теоретических аспектов ТИ. В результате этого ТИ стала генератором для самых различных научных изысканий во многих областях.

Безусловно, здесь мы можем усмотреть определенное сходство между тем путем, которым шли ТИ и ЛП. Так для прогресса обеих дисциплин огромную роль играло побуждающее воздействие со стороны выдвигаемых в рамках экономики вопросов. Однако в процессе своего развития теория ЛП в определенный момент доросла до того уровня, когда она получила полное право считаться вполне самостоятельной областью математики. Довольно любопытно в этой связи заметить возможность при этом классификации задач ТИ в качестве частных случаев ЗЛП.

Еще одним сходством между ТИ и ЛП может быть назван огромный объем вычислений, необходимых для получения решения этих задач для подавляющей доли реальных практических применений. Этот объем до такой степени велик, что при начальном изучении представляется не осуществимым практически за разумное время. В том смысле, что в то время, когда данные задачи только начинали изучаться, состояние вычислительных мощностей было таким, что приводило исследователей к мысли о нереальности проведения необходимых расчетов, даже если для этого придется воспользоваться продолжительностью всей жизни субъекта, для которого ставится задача. Такое положение вещей инициировало множество научных изысканий, сосредоточенных в области вычислительных методов. В результате ситуация начала меняться, и вместе с началом создания автоматических вычислительных машин, нахождение решения за разумное время стало осуществимым.

Приведем элементарный и типичный пример задачи ТИ. Это игра в «две монетки». Она идет по следующим правилам. Есть два игрока. Оба фиксируют свою монетку либо гербом, либо решеткой и не демонстрируют ее сопернику. После этого монеты показываются, и первый игрок берет обе монеты в том случае, когда они зафиксированы одинаковыми сторонами. Если же монеты оказываются зафиксированными разными стороны, то обе их забирает себе второй игрок.

Конечно, данный пример описывает не самую интересную игру, однако именно с его помощью легко определить ту терминологию, которая используется в научной литературе. Так мы видим, что в данной игре принимают участие два игрока, в силу чего разговор идет об *игре двух лиц*. Кроме того, одни игрок получает в качестве выигрыша ровно столько, сколько при этом отдает в качестве проигрыша второй игрок, в силу чего, это может быть выражено фразой о том, что сумма их выигрышей равняется нулю. В итоге, мы имеем несколько длинное, однако общепринятое наименование: *игра с нулевой суммой*. При использовании же самого слово *игра* в данном случае имеется в виду некоторый набор правил, регламентирующий возможные действия игроков и результирующий выигрыш каждого в результате тех действий, которые они совершают. Каждая игра состоит из *ходов*. В приведенным нами примере игры в «две монетки» у каждого из игроков есть всего лишь один единственный ход. О всякой реализации игры говорят как о *партии*.

Важная деталь всех игр, являющихся предметом рассмотрения данной теории, заключается в том, что выигрыш или проигрыш каждого из игроков не определяется исключительно его личными решениями, но также и решениями, принимаемыми его соперником. Понятно наличие аналогичной черты и во многих вопросах экономики. Примером чего может служить определение наиболее выгодных действий при игре на фондовой бирже. И точно таким же образом мы наблюдаем ее присутствие во время выработки плана для ведения военных операций. Как раз плодом моделирования военных операций и стал конкретный класс игр, получивший название игры Блотто.

Очень глубокое взаимопроникновение ЛП и теории матричных игр было вскрыто Нейманом и Данцигом, показавшими, что любая матричная игра двух лиц с ненулевой суммой и конечным числом стратегий может быть приведена к паре двойственных задач ЛП и наоборот (то, что основная задача ТИ эквивалентна паре двойственных ЗЛП было показано в [13]).

В данной работе приводятся основные понятия и результаты ТИ, имеющие прямое отношение к ЛП, раскрывается связь между ЛП и ТИ и приводятся геометрические интерпретации.

5.3. Теорема Каруша – Куна – Таккера, принцип Лагранжа; нелинейное программирование. При исследовании задач ЛП появлялись всё новые подходы, формируя целостную картину. Одним из них стал подход с позиций выпуклого анализа, который в общей форме формулирует задачу математического программирования и признаки оптимальности решения, раскрывая при этом связи с двойственной задачей и её решением, что имеет большое значение для понимания и экономической интерпретации результатов. При этом не требуется введения большего количества специальной терминологии. Основные понятия – пространства в двойственности (ПВД) и преобразование Лежандра (см. определения 3.1, определение 3.2 и замечание в Приложении 1).

Условия экстремума для задач математического программирования в приведённой ниже форме стали широко известны после работы Куна–Таккера 1950 г.

В этот ранний период расширения ЛП важные продвижения были сделаны в области нелинейной оптимизации. Х. У. Кун и А. У. Таккер представили совместную работу «Нелинейное программирование» на Второй симпозиум по математической статистике и теории вероятностей в Беркли, труды которого появились в 1951 г. Эта статья дает необходимые условия оптимальности для задачи минимизации (возможно) нелинейной целевой функции в условиях ограничений в виде (возможно) нелинейных неравенств. Результат является наследником так называемого метода множителей Лагранжа. Подобная теорема (условие оптимальности) была ранее получена Ф. Джоном (Fritz John) и опубликована в «Courant Anniversary Volume» [177] за 1948 г. Эти условия оптимальности называются условиями Каруша–Куна–Таккера в знак признания практически одинакового результата, представленного в (неопубликованной) магистерской диссертации В. Каруша в Чикагском университете в 1939 г. [201]. В 1951 г. появилась докторская диссертация Дорфмана, которая называлась «Приложение линейного программирования к теории фирмы, включая анализ монополистических фирм с помощью нелинейного программирования» и была издана в форме книги [159]. Вполне может быть, что именно она является первой в истории книгой, которая использовала словосочетание «линейное программирование» в своем заглавии. Упомянутое в ее названии «нелинейное программирование» – это то, что автор называет «квадратичным программированием», то есть оптимизация квадратичной функции, подчиненной ограничениям в форме СЛН (аналогичные задачи рассматривались [110] и [216]).

Первой книгой непосредственно по ЛП стала книга 1953 г. [119], включившая как теорию, так и приложения, и основанная на программе Технологического института Карнеги (ныне Carnegie-Mellon University).

5.3.1. Каруш и нелинейное программирование. Вильям Каруш (William Karush) [201] в своей диссертации рассмотрел проблему минимизации функции f при наличии ограничений-неравенств. Ему удалось получить необходимые и достаточные условия оптимальности, описываемые с помощью первых и вторых производных. Среди утверждений, полученных в работах ученого, есть следующее.

Пусть заданы непрерывно дифференциируемые функции $f, g_1, \ldots, g_m$: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ и требуется минимизировать f в условиях ограничениий

$$g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0. \tag{5.1}$$

Пусть минимум достигается в точке x^0. Тогда можно считать, что $g_1(x^0) = \ldots = g_m(x^0) = 0$, так как пусть, например, $g_1(x^0) > 0$, – в таком случае в силу непрерывности $g_1(x) \geq 0$ при любых точках x достаточно близких к x^0, а следовательно, неравенство $g_1(x) \geq 0$ не накладывает никаких дополнительных ограничений. Полученный Карушем результат формулировался так:

«Предположим, что для каждого допустимого направления λ существует допустимая дуга, выходящая из x^0 в направлении λ. Тогда первое необходимое условие минимальности $f(x^0)$ состоит в существовании таких множителей $\chi_\alpha \leq 0$, что все производные F_{x_i} функции $F = f + \chi_\alpha g_\alpha$ обращаются в нуль в точке x^0». (5.2)

В данном случае допустимым направлением называется всякий вектор y, такой что $\nabla\{g_i(x^0)^T y\} \geq 0$ для $i = 1, \ldots, m$. Регулярная дуга $x(t)$, где t принадлежит отрезку $[0; t_0]$, является допустимой, когда $g_i(x(t)) \geq 0$ при всех t, принадлежащих отрезку $[0; t_0]$ и $i = 1, \ldots, m$. Фразу «выходящая из x^0 в направлении λ» следует понимать так, что $x(0)=x^0$, $x'(0) = \lambda$. Также для сокращения применяется следующая форма записи: $\chi_\alpha g_\alpha := x_1 g_1 + \ldots + x_m g_m$.

Предположив линейность всех функций, можно вывести из (5.2) теорему двойственности ЛП.

До того, как ученым была получена данная теорема, применялся следующий универсальный способ: ограничения-неравенства приводились к ограничениям-равенствам путем добавления переменных, в результате чего неравенство $g_1(x) \geq 0$ превращалось в равенство $g_1(x) - n_1^2 = 0$ (см., например, [187]). Несмотря на универсальность подхода, тот результат, к которому можно прийти после его применения, слабее, чем приведенное выше условие Каруша.

Таким образом, справедливо будет сказать, что теорема Каруша стала фундаменпальным для неленейного программирования достижением, которое позднее получило обобщение в работах Ф. Джона [177], Х. У. Куна и А. У. Таккера [210]. В своей работе Кун и Таккер назвали условие теоремы (5.2) условием регулярности. Когда решается задача условной минимизации функции f при ограничениях (5.1), в силу (5.2) достаточно исследовать только те допустимые по ограничениям векторы x, что или не удовлетворяют условию регулярности, или удовлетворяют необходимому условию минимума (5.2).

Во многих случаях количество вышеописанных вариантов x конечно, а это означает, что в такой ситуации необходимо только выбрать наилучший из них.

Теорема 1. (Каруша–Куна–Таккера): $\boldsymbol{X}$ – линейное пр-во; $\boldsymbol{A}$ – выпуклое множество, $A \subset X; \tilde{x} \in A;$ f_i – выпуклые функции, $f_i : X \to R, \quad для\ i = 0,\dots,m.$

Задача: $\begin{cases} x \in A \\ f_i(x) \leq 0; i = 1,\dots,m \\ f_0(x) \to \min \end{cases}$

(5.3)

1) Если $\tilde{x}$ - решение задачи (*), то $\exists \vec{\lambda} = (\lambda_0,\dots,\lambda_m) \neq 0$, такое что для

$L(x,\vec{\lambda}) := \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ верно:

a) $\min_{x \in A} L(x,\vec{\lambda}) = L(\tilde{x},\vec{\lambda})$

b) условие неотрицательности: $\lambda_i \geq 0, \quad для\ i = 0,\dots,m$

c) условие дополняющее нежёсткость: $\lambda_i f_i(\tilde{x}) = 0, \quad для\ i = 1,\dots,m$

2) Если $\lambda_0 > 0$ и выполнены (a), (b), (c), то $\tilde{x}$ - решение задачи (5.3)

3) Если $\tilde{x}$ - решение задачи (5.3), $\vec{\lambda}$ удовлетворяет (a), (b), (c) и $\exists x \in A: f_i(x) < 0, \quad для\ i = 1,...,m$ (условие Слейтора), то $\lambda_0 > 0.$

Работа [210] полно описывает нахождение необходимых условий оптимальности решения экстремальной задачи, но она может быть развита ещё дальше в принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств (см. Приложение 1). Для нас же интереснее применение Теоремы 1 для раскрытия смысла принципа двойственности в выпуклом программировании.

5.3.2. Двойственность в выпуклом программировании. Пусть

(X, X') – ПВД с $<x, x'>_1$, (Y, Y') – ПВД с $<y, y'>_2$,

$(X \times Y, X' \times Y')$ – ПВД с $\langle (x,y),(x',y') \rangle := \langle x, x' \rangle_1 + \langle y, y' \rangle_2$.

$f : X \to R \cup \{+\infty\}, \quad f(x) \to \inf$; $F : X \times Y \to R \cup \{+\infty\}, \quad F(x,0) := f(x)$

Если мы фиксируем $y \in Y$, то получим задачу**,** называемую *исходной*:

$$F(x,y) \to \inf_{x \in X} \tag{5.3}$$

$$S(y) := \inf_{x \in X} F(x,y), \quad S : Y \to R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Тогда $S^*(y^*) \overset{def}{=} F^*(0, y^*)$ и $S^{**}(0) = \sup\limits_{y^* \in Y'} \left(-F^*(0,y^*)\right)$.

Задачу: $$-F^*(0,y^*) \to \sup \tag{5.4}$$

называют *двойственной* к задаче (5.3).

Доказано, что S – собственная, выпуклая, замкнутая. Тогда по Теореме (Фенхеля–Марро): $S^{**} \equiv S$ – *значения функционалов исходной и двойственной задач на их оптимальных решениях совпадают*.

Предыдущая задача, в частности, при $Y \equiv R^m$ может иметь вид:

$$\begin{cases} f_i(x) \le 0, & где\ i = 1,...m \\ f_0(x) \to \inf \end{cases} \tag{5.5}$$

$$F(x,y) := \begin{cases} f_0(x), & если\ f_i(x) \le y_i, \quad где\ i = 1,...,m \\ +\infty, & в\ противном\ случае \end{cases}$$

При модификации $f_i(x)$ задача (5.5) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} f_i(x) \le y_i, & где\ i = 1,...,m \\ f_0(x) \to \inf \end{cases}$$

Если потребовать, чтобы $f_i(x)$ были не произвольными выпуклыми функциями, а имели линейный вид, то мы придём к задаче ЛП.

5.3.3. Классическая формулировка задачи линейного программирования. Пусть

$$x \in R^n, \quad b \in R^m, \quad c \in R^n, \quad A \in M_{m\times n}, \quad F(x,y) := \begin{cases} \langle c, x\rangle, & \text{если} \quad -A\cdot x \le -b + y, \quad x \ge 0 \\ +\infty, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Задача: $\begin{cases} x \ge 0; \\ A\cdot x \ge b; \\ \langle c, x\rangle \to \inf. \end{cases}$

Тогда $S(y) \overset{def}{=} \inf\limits_x F(x,y).$ Если же допустимых x нет, то: $S(y) = +\infty$.

Тогда: $F^*(0, y^*) := \begin{cases} \langle b, y^*\rangle, & \text{если} \quad c + A^T\cdot y^* \ge 0, \quad y^* \le 0 \\ +\infty, & \text{в противном случае} \end{cases}$

и двойственная задача имеет вид:

$-F^*(0, y^*) \to \sup$, где $\lambda := -y^*$ и

$$F^*(0, y^*) := \begin{cases} -\langle b, \lambda\rangle, & \text{если} \quad c - A^T\cdot \lambda \ge 0, \quad \lambda \ge 0; \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это означает задачу: $\begin{cases} \lambda \ge 0; \\ A^T\cdot\lambda \le c; \\ \langle b, \lambda\rangle \to \sup. \end{cases}$

Так как было доказано, что $S^{**}(0) \equiv S(0),$ то:

$$\sup_{\begin{cases}\lambda\ge 0\\ A^T\cdot\lambda\le c\end{cases}} \langle b, \lambda\rangle = \inf_{\begin{cases}x\ge 0\\ A\cdot x\ge b\end{cases}} \langle c, x\rangle.$$

Имеем теорему, наиболее полно отражающую экономическое значение полученных результатов:

Теорема 2: Имеется задача ЛП и двойственная задача:

$$\begin{cases} x \ge 0; \\ A\cdot x \ge b; \\ \langle c, x\rangle \to \inf\limits_x; \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} \lambda \ge 0; \\ A^T\cdot\lambda \le c; \\ \langle b, \lambda\rangle \to \sup\limits_\lambda. \end{cases}$$

Тогда имеет место одна из следующих ситуаций:

1) Значения обеих задач конечные и совпадают;

2) Значения обеих задач равны + ∞;

3) Значения обеих задач равны – ∞;

4) Ограничения обеих задач несовместимы.

Формирование этой красивейшей теории было бы невозможно без разработанного аппарата функционального анализа. В этой связи отметим огромный вклад, внесённый в его развитие (особенно, в теорию полуупорядоченных пространств) Канторовичем.

5.4. Основные алгоритмоы, разработанных для линейного программирования. Несмотря на то, что теория СЛН могла возникнуть на заре математики (так как изучение неравенств – абсолютно естественное развитие теории СЛУ, изучение которых исчисляется тысячелетиями), произошло это сравнительно недавно. Компенсируя эту задержку, развитие теории в XX веке приняло чрезвычайно бурный характер: вслед за единичными работами XIX и первой четверти XX века последовал огромный поток работ. Можно сказать, что серьезные задачи с ограничениями неравенствами мы находим у Канторовича. В дальнейшем в СССР долгое время в этой области работали только её первооткрыватель, Леонид Витальевич, и маленькая группа его учеников. При этом им приходилось преодолевать сильнейшее сопротивление со стороны ученых ретроградов, препятствовавших развитию математической экономики. Об этом противостоянии сказано подробно выше, например, в пункте 3.3.1. Здесь же лишь отметим, что Канторович продимонстрировал исключительный пример, когда и «один в поле воин», одолев огромну армию противников, которые, что прескорбно, были его соотечественниками. На Западе же у наших союзников во время войны и соперников в послевоенный период вовлечение в новую отрасль имело неслыханный масштаб.

В целом, согласно взгляду Данцига на историю ЛП [129] стремительный развитие ЛП стало возможным в первую очередь благодаря фон Нейманоу, Канторовичу, Леоньеву и Купмансу (и, конечно, к этому списку надо добавить самого Данцига, создавшего СМ).

Однако, как описано ниже, со временем ученые СССР подхватили эстафету и внесли поистине огромный вклад в развитие данного направление. И, что замечательно, все они (Хачиян, Юдин, Немировский и Нестеров) получили мировое признание, что еще раз свидетельствует о значимости их влияния. Исследование происхождения новой области и причин столь бурного развития в драматический период – актуальнейшая тема истории науки и вообще истории нашего времени.

Однако, обратимся на секунду к началу развития ЛП. Как уже неоднократно говорилось, само рассмотрение задачи с ограничениями типа неравенств уже стало новаторским (Лагранж, разработав правило множителей Лагранжа, изучал исключительно задачи с равенствами, причем только гладкие). Поэтому, как ко всему новому, отношение разных людей к новой области было различным. В силу этого даже результатам В.Каруша (William Karush), получившего в 1939 году необходимое условие для общего случая выпуклой экстремальной задачи с неравенствами, тогда никто не придал значения. В качестве одного из важнейших результатов деятельности Канторовича и Данцига, помимо создания метода разрешающих множителей и СМ, можно назвать открытие ими огромного количества экономических задач, которые описываются ЛП, и осознание экономической интерпретации двойственной задачи. Оказалось, что множители Лагранжа прямой задачи являются оптимальным решением для двойственной и наоборот. Также выяснилось, что эта же математическая модель кроме экономической описывает также огромное количество других задач, в том числе и задачи управления штабов (которые бывают даже масштабнее и сложнее).

Большое практическое значение данных задач также способствовало тому, что центральной проблемой стало изучение не только теоретического, но и практического решения данных вопросов и, в первую очередь, конечно, развитие и исследование соответствующих алгоритмов. К обзору наиболее важных алгоритмов, разработанных для решения ЗЛП, но оказавших значительное влияние также и на развития математики в целом, мы сейчас приступим (хорошей и очень живой обзор алгоритмов 1940-80 гг. см. в [246]) (см. также [5, 6]).

5.4.1. Фурье, Данциг. Исторически, конечно, еще до Данцига был Фурье **(**о чем см. выше пункт 1.2.2), рассмотревший задачу с двумя переменными и о ней написавший, в том числе предложив алгоритм снижения «по чаше». Нечто подобное для общего случая в итоге реализовал Данциг в СМ. И иенно имя Данцига находится среди основных авторов, заложивших важнейшие вехи на пути ЛП, так как СМ и его последующие производные можно объективно назвать определенным эталоном и индустриальным стандартом, с которым, во-первых, очень долго пытались конкурировать все остальные прадлагаемые алгоритмы; который, во-вторых, всесторонне изучался как практиками, так и теоретиками, и на путях этих исследованиий родились вопросовы, положившие начало развитию плодотворных теорий Кроме того, именно СМ долгие годы господствовал в среде практиков; он использовался для решения реальных задач, и он позволил решить массу в прямом смысле жизнено важных вопросов. Кроме того, и сейчас СМ остается важным алгоритмом в инструментарии любого оптимизатора.

Вышесказанное подтверждается тем фактом, что перед началом первой военной компании США в Ираке было решено просчитать разные возможные варианты проведения военной операции, а значит надо было поставить задачу и промоделировать ее. Эта задача (по разным оценкам) содержала миллионы неизвестных. После некоторого сравнительного анализа СМ и алгоритма Кармаркара было решено выбрать последний, поскольку решили, что, предположительно, он несколько лучше. Таким образом, за более чем сорок лет СМ Данцига не утратил своего значения. Дело в том, что СМ требует ассимптотически большего числа операций, однако цена каждой из них значительно ниже.

Почти полувековое доминирование СМ для решения практических задач в подавляющем большинстве случаев для самого Данцига стало полной неожиданностью. Он сам не раз писал: «Я совершенно недоумеваю, почему, вдруг, такой совершенно катастрофический успех».

Тем не менее, совершенно не верно будет считать, что отсутствие в промежутке между СМ и алгоритмом Кармаркара других широко применимых на практике методов свидетельствует о том, что никакие исследования не проводились и результатов получено не было. Шло развитие области, рождались новые идет. О них сейчас и пойдет речь, а чуть ниже мы подробнее остановимся на достижении Кармаркара и его роли.

5.4.2. Левин Анатолий Юрьевич. Один из замечательных результатов был получен А.Ю. Левиным (07 апреля 1936 – 12 августа 2007), создавшем в 1965 г. метод центрированных сечений [68], который применим для поиска минимума даже не только линейной, но и произвольной выпуклой функции.

Интересна история этого метода. Во главе Воронежской математической школы стоял, которая процветала и, расширяя круг своих интересов, стала большее внимание уделять приложениям, стоял М.А. Красносельский. Он сотрудничал с занимавшимся прикладными вопросами институтом, руководителем которого был Давид Борисович Юдин, известный своей совместной с Евгением Г.Гольштейном монографией [99]. И именно Юдину принадлежит постановка задачи отыскания эффективного алгоритма минимизации суммы экспонент с положительными весами на компактном полиэдре: $c_1e^{x_1} + \cdots + c_ne^{x_n} \to \min$, $c_1,\dots, c_n > 0$, $x = (x_1,\dots, x_n)$ из компактного полиэдра. А.Ю. Левин, работавший у Красносельского, заинтересовался вопросом и после продолжительной работы и обсуждений нашел алгоритм, применимый к куда более широкому кругу вопросов.

Пусть стоит общая проблема выпуклой конечномерной оптимизации: найти минимум выпуклой (или квазивыпуклой) функции f на выпуклом конечномерном компактном теле $A \subset \mathbb{R}^d$: $f(x) \to \inf, x \in A$.

Существует теорема Грюнбаума-Хаммера-Митягина. В соответствии с ней, если через центр тяжести выпуклого компактного множества $B \subset \boldsymbol{R}^k, \mathrm{int}B \neq$

$\emptyset, Vol_d B = 1$ провести (k-1)-мерную гиперплоскость, она разделит его на множества, объем любого из которых будет не менее $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$, и эта оценка не улучшаема. Следовательно, объем каждого множества будет не более $\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

Алгоритм, операющийся на нее и известный как *метод центрированных сечений*, заключается вот в чем (см. подробнее [76, С. 78–79]) (опишем его для случая дифференцируемой выпуклой функции). Обозначим B как B_0 и найдем его центр тяжести: x_1 = gr B_0. Далее посчитаем $f'(x_1)$. В случае, когда это – нулевой вектор, мы нашли решение. В противном случае, отбросим ту часть B_0, которая попала в полупространство $\Pi_0' = \{x: \langle f'(x_1), x - x_1\rangle > 0\}$, поскольку в силу того, что f – гладкая и выпуклая, то $f(x) - f(\xi) \geq \langle x - \xi, f'(\xi)\rangle$, откуда для $x \in B_0 \cap \Pi_0'$ очевидно, что $f(x) > f(x_1) \geq \min f$. После того, как мы отбросим $B \cap \Pi_0'$, назовём оставшееся множество B_1 и произведем с ним те же действия. Продолжив действовать таким методом, построим последовательность множеств B_0, B_1, B_2… и их центров тяжести x_1, x_2, x_3… На каждой итерации будем выбирать y_i из $\{x_1, …, x_i\}$, где значение f не больше каждого из $\{f(x_j),\ 1 \leq j \leq i\}$. Можно показать сходимость $f(y_i)$ к значению задачи со скоростью геометрической прогрессии.

Основная проблема данного алгоритма заключается в том, что поиск центра тяжести – сам по себе является трудной задачей. Именно это препятствовало его применению на практике. Тем не менее, основная концепция, положенная в его основу, нашла дальнейшее применение и привела к созданию методов, получивших широкое промышленное применение, о чем речь пойдет далее (и, кроме того, 17-тью годами позже было показана полиномиальная скорость данного алгоритма в ЗЛП (см. [254])).

Пока, Левин, получив алгоритм в 1962 г. (см. [246]), медлил с публикацией, желая решить сложности при отыскании центра тяжести многограника (что, как выяснилось позже, на самом деле имеет экспоненциальную сложность), американский ученый Д. Ньюман (D.J.Newman) независимо создал тот же метод. В результате их одновременных публикаций 1965 г. [68], [227] алгоритм называется метод Левина-Ньюмана (позднее В.М. Тихомиров и А.И. Кузовкин развили алгоритм и показали возможность получения экспоненциальной скорости при вычислении значения *f*, а не ее градиента [66]).

5.4.3. Немировский Аркадий Семенович. Следующий краеугольный камень был заложен Немировским. Аркадий Семенович родился в 1947 г. в СССР, закончил механико-математический факультет МГУ, где был выдающимся студентом. Впоследствии он стал лауреатом огромного числа премий и, сейчас является одним из самых известных в своей области человеком. Кроме того, он – один из последних учеников Г.Е. Шилова. После защиты кандидатской диссертации он в 1974 г. поступил в теоретический отдел института, где начальником отдела был профессор Д.Б. Юдин, который предложил ему исследовать "сложность задач выпуклой оптимизации". Юдин обладал светлой интуицией, и именно он ставил эти задачи: в частности, задачу Левину, через Красносельского, поставил именно Юдин, а потом он предложил решать ту же самую задачу Немировскому. Однако, очень интересно, что Немировский вел свои исследования совершенно независимого от Левина и, более того, даже не знал о существовании работ последнего в этой области (хотя Левин в то время уже опубликовал свою работу в Докладах АН СССР, но Немировскому это осталось неизвестным). В результате в ноябре 1974 г. (то есть более, чем 10 годами позденее предыдууего прорыва, сделанного Левиным) он пришел к до некоторой степени близкому методу (в определенном смысле некоторому варианту метода центрированных сечений), получившему название "метод описанных эллипсоидов"([101], [100], [79]). В основе этого метода лежат две идеи. Первая из них – уже описанная идея отсечения. Вторая базируется на интересном наблюдении: существует Löwner ellipsoid $E(K)$ – единственный эллипсоид наименьшего объёма, содержащим данное выпуклое тело K в своей внутренности. В частности, имеет место замечательный факт, что половину эллипсоида можно поместить в эллипсоид объёма меньшего, чем изначальный эллипсоид, причем центр нового эллипсоида ищется по полуэллипсоиду за порядка d^2 операций. Так, если K – половина эллипсоида $K = E \cap H$, где $E = \{x \mid (x - z)^T Q^{-1} (x - z) \leq 1\}$, $H = \{x \mid a^T(x - z) \leq 0\}$ и z обозначает центр E, тогда $E(K) = \{x \mid (x - z)^T \bar{Q}^{-1}(x - \bar{z}) \leq 1\}$ может быть описан простой формулой: $\bar{z} = z - \frac{1}{n+1} Q\bar{a}$ и $\bar{Q} = \frac{n^2}{n^2-1}\left(Q - \frac{2}{n+1} Q\bar{a}\bar{a}^T Q\right)$, где $\bar{a} = a/\sqrt{a^T Q a}$, n – размерность. И кроме того можно показать, что vol $(E\ (K))$ / vol $(E) \leq e^{-1/2n}$. Таким образом объем убывает в геометрической прогрессии с коэффициентом, который строго меньше единицы и зависит исключительно от размерности, не завися от каких-либо других параметров решаемой задачи.

Метод действует так (см. подробнее: [76, С. 79–80]): если перед нами опять стоит та же что и в предыдущем пункте задача, то опишем вокруг B эллипсоид E_0. В случае, когда его центр x_0 лежит вне B, проведем через него гиперплоскость, не пересекающуюся с B, и отбросим полуэллипсоид, не пересекающийся с B. В случае же, когда $x_0 \in B$, найдем $f'(x_0)$, и сделаем отсечение согласно методу Левина-Ньюмана. В результате, у нас будет полуэллипсоид, которую назовем E_0'. И здесь мы, воспользовавшись вышеупомянутым фактом, опишем вокруг E_0' эллипсоид более маленького объёма, чем был у E_0, и назовём его E_1. Повторяя данную последовательность операций, получим сходящуюся со скоростью геометрической прогрессии последовательность.

На каждом шаге объем эллипсоидов в последовательности $\{E_0, E_1, E_2, \ldots\}$ будет уменьшаться в зависимости от размерности пространства в $\frac{k^k}{(k-1)^{\frac{k-1}{2}}(k+1)^{\frac{k+1}{2}}} <$ 1 раз для любого натурального $k \geq 2$.

Что примечательно, в работе Немировского и Юдина доказана невозможность существенного улучшения алгортма *центрированных сечений Левина-Ньюмана* в классе сходящихся алгоритмов минимизации выпуклых функций. Несмотря на то, что Метод описанных эллипсоидов незначительно проигрывает методу центрированных сечений в смысле скорости сходимости к решению, он тем не менее превосходит его в одном принципиальном вопросе: для его реализации не требуется находить цетры тяжести многогранников.

К основной идее, положенной в основу метода, несколько позднее, но совершенно независимо, пришел выдающийся математик из Киева, работавший в области выпуклой оптимизации, Наум З. Шор [97]. Можно сказать, что в 1970 г. Н.З. Шор представил некоторое семейство алгоритмов для нелинейного программирования. Позднее (в 1976–77 гг.) Давид Юдин и Аркадий Немировский и также, независимо от них, Н.З. Шор разработали метод эллипсоидов, который можно классифицировать в качестве представителя этого семейства, для решения задач выпуклой оптимизации (в 1976 г. Д.Б. Юдин и А.С. Немировский предложили его как метод последовательных отсечений, а 1977 г. Н.З. Шор – как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента).

В результате, в историю данный алгритм вошел под названием метод Немировского-Юдина-Шора, что иллюстрирует одну из характерных черт науки XX в. в СССР. Очень многие ученые получали совместные премии.

С этим методом также связана одна интересная история, достойная упоминания. После своего открытия Немировский и Юдин делали доклады на эту тему в разных местах и в том числе на семинаре, проводимым Е.Г.Гольштейном в ЦЭМИ. После доклада, который произвел на Гольдштейна очень позитивное впечатление, он заметил, что подобные идеи (отсечение, но в несколько другой форме) уже выдвигались ранее, и указал изумленному Юдину на работу более чем десятилетней давности, выполненную А.Ю. Левиным, который решил поставленную Юдиным же задачу. Таким образом, Гольдштейн реабилитировал Левина, который стал неслыханно известен. В результате в статье [100] включена ссылка на [68].

5.4.4. Хачиян Леонид Генрихович. После того как вышеописанные результаты были опубликованы, Л.Г. Хачиян (03 мая 1952 – 29 апреля 2005), работавший в Вычислительном центре АН СССР, показал, что на основании метода эллипсоидов можно построить алгоритм и с его помощью показать полиномиальную (в модели для машины Тьюринга) разрешимость ЗЛП. Это, конечно, стало действительно грандиозным открытием. Во-первых, была решена важная и довольно давняя к тому моменту открытая проблема относительно трудоемкости алгоритмов, над которой бились тогда многие, и, кроме того, был представлен взгляд на алгоритмы решения ЗЛП с совершенно нового и необычного ракурса. Этот результат впервые появился в Докладах АН СССР в феврале 1979 г. [95]. Став четвертым в списке публикаций Хачияна, и будучи написанным в возрасте 26 лет, он, попав в зону внимания на Западе, принес Хачияну всемирную славу в кругу ученых, занимающихся вопросами оптимизации. Более подробное описание деталей данного открытия, несомненно, заслуживает внимания.

Чтобы прочувствовать значение сделанного Хачияном открытия и понять, почему к этому событию было приковано такое внимание, опишем кратко положение, сложившееся к тому моменту в этой области. ЛП стало широко применяться после того, как был заложен его алгоритмический и теоретический фундамент: некоторые экономические приложения существовали еще со времени первой работы Канторовича 1939 г. на эту тему, в 1947 г. Данциг создал СМ, а Фон Нейман теорему двойственности. В 50-е гг. альтернативные алгоритмы, преимущественно итеративные методы на базе фиктивной игры двух лиц, бросили вызов СМ, но он отстоял своё доминирующее положение и оставался основным методом решения в 50-е и 60-е гг., применяемым к большому спектру крупномасштабных проблем. Несмотря на ошеломительный триумф СМ в приложениях, его эффективность вскоре была поставлена учеными теоретиками под сомнение. В фокус внимания математиков попал вопрос о полиномиальности алгоритма. В результате в 1970 г. были найдены примеры, которые продемонстрировали, что в самом плохом варианте входных условий, СМ может демонстрировать экспоненциальную зависимость количества шагов (и, соответственно, времени) своего исполнения от длины закодированных исходных данных (например, в статьях В. Кли (Victor Klee) и Г. Минти (George Minty) представлен целый класс задач, на которых правило Данцига выбора элемента СМ дает такое поведение: [204]), перебирая все вершины. Данное обстоятельство инициировало работу теоретиков, которая вскоре привела к тому, что Д.Р. Эдмондс

(Jack R. Edmonds) в 1965 г., С. Кук (Stephen Cook) в 1971 г. и Р.М. Карп (Richard Manning Karp) в 1972 г. получили ряд результатов в теории сложности, которые лишь усугубили ситуацию, показав, что, несмотря на свою принадлежность к пересечению классов *NP и co-NP*, задача разрешимости ЛП всё еще не имела никакого алгоритма с доказанной полиномиальностью времени исполнения. Задача разрешимости ставится следующим образом: даны m линейных неравенств с n неизвестными, все коэффициенты в которых рациональны, и требуется вяснить есть ли у данной системы допустимое решение или она является несовместной. Многие исследователи пытались найти полиномиальную версию СМ. И несмотря на то, что обновленные версии остаются высоко конкурентоспособными по сравнению с более поздиними методами, базирующимися на внутренней точке, и являются неотъемлемой частью арсенала любого оптимизатора, они всё ещё показывают экспоненциальное поведение на определенных примерах. В какой-то мере их хорошее поведение при решении реальных практических задач было объяснено разными авторами с помощью анализа ожидаемого поведения: СМ имеет среднюю полиномиальную сходимость при широком выборе распределения значений в случайных матрицах [237], [114]. В целом, вопрос о полиномиальности или не полиномиальности был, в определенном смысле, центральной проблемой.

Естественно, в таком историческом контексте результат Хачияна, получившего решение применением модификации метода отсечений, и доказавшего тем самым в 1979 г., что ЗЛП может быть решена за полиномиальное время, стал прорывом, сделав автора знаменитым почти мгновенно. Столь бурная реакция на его открытие объясняется не только самим заявленным и доказанным результатом (полиномиальность ЛП), но и тем способом, каким она была доказана. Хачиян прибег к использованию метода эллипсоидов и аппроксимированию многогранного допустимого множества при помощи эллипсоидов. В то время это стало абсолютно новой идеей, которая представила совершенно необычный и можно даже сказать противоположный ставшему уже традиционному подход (который всегда подходил к решению проблемы в терминах вершин, ребер, фаз 1 и

2, и конечной сходимости к точному решению в точной арифметике). Всем этим моментам новый подход противопоставил парадигму, в которой предлагалось в качестве отправного пункта взять гигантские сферы, а затем строить последовательно уменьшающиеся эллипсоиды до тех пор, пока один из них не станет достаточно мал для того, чтобы, округлив координаты его центра, можно было получить решение.

Как уже было сказано, для решения проблемы сложности ЗЛП Хачиян воспользовался открытием Немировского (применил метод эллипсоида). По ходу дела ему пришлось преодолеть ряд сложностей: алгоритм изначально создавался для модели с действительными числами, а ему нужна была оценка расстояния до оптимального решения, Хачияну необходимо было установить некоторое количество ограничений на величины решений, объемы многогранников, и точность, необходимую для проведения расчетов. Использование такого метода для ЛП было совершенно неочевидным. Кроме того, данная процедура решения включает вычисление квадратного корня из рационального числа, который может быть иррациональным, что приводит к сложным проблемам при нахождении численного решения. Однако, Хачиян заметил, что достаточно использовать вышеприведенные формулы приближенно, проводя вычисления только с точностью до $O(nL)$ бит, где L – длина бинарного кода (подаваемого на входе вычислительного алгоритма) системы рациональных неравенств, чью согласованность мы хотим проверить. Он также показал, что если система разрешима, то она имеет решение внутри шара радиуса 2^L, и что в случае ее несовместимости минимальное отклонение в каждой точке составляет по меньшей мере 2^{-L}. Исходя из этих наблюдений и уменьшения объёма со скоростью геометрической прогрессии, он смог показать, что центр последовательности эллипсоидов, получаемой в результате применения этого подхода, станет допустимым максимум за $16n^2L$ итераций, если система совместимая. Поскольку ранее ничего подобного к ЛП не применялось, подход мог показаться даже «диким» в условиях существования известного конечного решения через применение преобразований к матрице.

Всё это вызвало бурную реакцию в средствах массовой информации. ЛП уже имело огромное значение для промышленности, армии и бизнеса, поэтому ведущие мировые газеты стремились донести до читателей важность полученного результата (Последовавшая шумиха отлично описана в статье Gene Lawler [213]). Иногда это даже приводило к курьезным ситуациям наподобии следующих. Guardian, например, озаглавил свою статью: «Советский ответ “Коммивояжеру”» (хотя, конечно, метод эллипсоида не пролил свет на сложность Задачи Коммивояжера, а New York Times опубликовала статью о результатах Хачияна, в которой были так сильно преувеличены вытекающие из них следствия, что это вызвало подозрения даже у советских властей, особенно из-за сравнения результата Хачияна с "русским спутником". Хачияна даже вызвали для дачи показаний в Государственный комитет по науке и технике, где он смог выбраться из положения, решительно отрицая какую-либо связь своего "спутника" с космическим. О резонансе в академических кругах и говорить не стоит. Появилось множество попыток построить на новой основе метод для практического решения крупномасштабных ЗЛП. К сожалению, в целом, их можно охарактеризовать как не очень успешные. Отчасти такую ситуацию можно объяснить тем, что алгоритм, по-видимому, требует количества итераций, близкого к худшей границе. В силу этого, хотя алгоритм имеет огромное значение с теретической точки зрения (поскольку показывает,что ЛП принадлежит к классу сложности P), он значительно уступает СМ в приложениях: алгоритму, базурующися на методе эллипсоидов может потребоваться в сто или даже тысячу раз большее число шагов в сравнении с СМ для решения задачи всего лишь с 50 неизвестными. Дело в том, что число шагов, выполняемое СМ в среднем является линенной функцийей от n (количества переменных) или m (количества линейных ограничений – уравнений или неравенств): СМ в среднем сделает $O(mn^2)$ или $O(m^2n)$ действий, в то время как алгоритм на базе метода эллипсоидов выполнит $O(mn^8)$ действий. Тем не менее, несколько исследователей (в числе которых были Мартин Грётшель (Martin Grötschel), Ласло Ловас (László Lovász) и Александр Схрейвер (Alexander Schrijver)) осознали потенциал метода эллипсоида для прогресса в области комбинаторной оптимизации.

Интересно, что сам Хачиян был удивлен ошеломительным эффектом своего результата и тем, что одного анонса в Докладах АН СССР о полиномиальности ЗЛП оказалось достаточно, чтобы принести ему всемирную славу. Публикация была очень короткой и давала только основные определения, утверждения и некоторые идеи, на которых они базировались, но без доказательств, что было продиктовано очень строгими стандартами Докладов, накладывающими ограничение объема публикации, равное четырём страницам. Хачиян предоставил полную версию с доказательствами и пояснениями в другой журнал, в котором она была издана в 1980 г. [94]. В течении считанных месяцев с публикации в Докладах его результат был растиражирован в английском переводе (сделанным Питер Гацс (Peter Gacs) и Ласло Ловас), усиленным полными доказательствами и пояснениями (такая версия была в итоге опубликована в 1981 г. и стала частью докторской диссертации Хачияна в 1984 г. [96]). В поле зрения Западных ученых работа Хачияна попала благодаря презентации на Симпозиуме по математическому программированию в Монреале в августе 1979 г. и публикации П. Гацс и Л. Ловас (данная презентация была намного понятнее изначального варианта). Произошло это примерно таким интересным образом: вскоре после написания и публикации в Докладах статьи без более подробного текста на симпозиуме в Монреале докладывали обзор недавних достижений и мимоходом сказали, что, в работе Хачияна доказана полиномиальность метода решения ЗЛП. А там присутствовали ученые, занимавшиеся данными проблемами и очень серьезно изучавшие вопрос полиномиальности и не полиномиальности (потому что на тот момент уже существовали задачи такого типа, которые требуют огромных временных затрат для того, чтобы их решить по СМ). Среди них были в том чисел Минти и Кли, которые доказали, что существуют задачи с громадным временным диапазоном, а также математик из Венгрии П. Гацс, который моментально привлек к объявлению о работе Хачияна внимание присутствовавших, провозгласив, что это означает решение знаменитой проблемы полиномиальности ЗЛП. В результате открытие Хачияна совершенно неожиданно наделало много шума и породило вокруг себя великий ажиотаж. В вычислительном центре тотчас же в срочном порядке организовали конференцию, посвященную «великому достижению Хачияна». Это был беспрецендентный случай: во-первых, Хачиян был на тот момент младшим научным сотрудником, кандидатом наук, а в вычислительном центре собрались академики, профессора; а кроме тогово-вторых, ни по какому поводу New-York Times никогда не проводил никаких конференций, а здесь вдруг они потребовали, чтобы в вычислительном центре провели конференцию. Стали разбираться и обнаружили, что действительно Хачияном было получено решение этого вопроса путем применения модификации метода отсечений, а не СМ (который, конечно, как уже было хорошо известно к тому времени, не является полиномиальым). И Хачиян стал неслыханно популярен. В следствие этого, работы его предшественников, Немировского и Юдина, также получили огромное внимание.

После этой ученый написал множество замечательных работ на разные темы, однако, к сожалению, его жизнь не была долгой, он очень рано умер. В контексте данного изложения целесообразно кратко перечислить некоторые направления его последовавших исследований (см.подробно в [115]). Дело в том, что Хачиян сразу понял, что его метод может быть применен ко многим другим вопросам и продолжил работать в этой области в течении нескольких лет.

Идеи, которые содержались в прославившей Хачияна работе, касались оценки размера решения, рассмотрения рациональных или целочисленных решений и использования геометрических идей в комбинаторике и оптимизации. Они появлялись во многих последующих его работах. Он распространил полиномиальный алгоритм на выпуклое квадратическое программирование с М.К. Козловым и С.П. Тарасовым [61], рассмотрел размер решений и сложность решения выпуклых задач полиномиального программирования, как с непрерывными, так и с целочисленными переменными. В [203] он обобщил хорошо известный результат Х. Ленстра (H.W. Lenstra Jr.) (получившего в 1983 г. полиномиальный алгоритм для задач целочисленного программирования с фиксированным числом переменных), показав существование полиномиального алгоритма нахождения точного решения задачи выпуклого полиномиального программирования с действительнозначными и/или целочисленными переменными, если степень и число переменных зафиксированы.

В [244] представлен вариант метода отсечения, где последовательность описанных эллипсоидов заменена последовательностью вписанных, что позволило понизить сложность приближенного решения задачи выпуклой минимизации в *n* раз (размерность задачи) и получить оптимальную сложность наихудшего случая.

В 1982 г. Международное общество математического программирования (Mathematical Optimization Society, до 2010 г. – Mathematical Programming Society) и Американское математическое общество (American Mathematical Society) наградили А. Немировского, Л. Хачияна и Д. Юдина Фалкерсоновской премией (Fulkerson Prize) за статьи, в которых содержались результаты, позволившие получить полиномиальный алгоритм для ЗЛП (подробнее см. в [247]).

5.4.5. Кармаркар Нарендра. Нарендра Кармаркар (Narendra Karmarkar) родился в Индии в 1957 г., блестяще сдал проводимый Indian Institutes of Technology (объединение престижных институтов Индии) экзамен Joint Entrance Examination, получив All India Rank 1. В результате поступил в IIT Bombay, закончив который с золотой медалью президента Индии, получил диплом бакалавра электротехники (B.Tech in Electrical Engineering) в 1978 г. После переезда в США, он получил степень магистра наук в California Institute of Technology.

Затем, защитив в университете Беркли в Калифорнии диссертацию под руководством Р.М.Карпа (Richard M. Karp), Нарендра Кармаркар получил в 1983 г. научную степень доктора философии (Ph.D.) по компьютерным наукам (Computer

Science) и начал работать в лаборатории Белла в Нью Джерси, где он создал и опубликовал в 1984 г. [199] алгоритм, получивший его имя, который решает ЗЛП за полиномиальное время. За создание этого алгоритма и ряд других достижений Кармаркар получил множество престижных международных наград. (Следует отметить (см. 5.1.5), что метод близкий к методу Кармаркара почти на два десятилетия раньше предложил ученик Канторовича – И.И. Дикин (метод штрафов). [20]).

Предыдущие методы заключались в представлении задачи многогранником и последующем приближении к решению путем прохода по вершинам. Алгоритма же Кармаркара ведет к решению не по границе допустимого множества, а сквозь многогранник, что значительно ускоряет решение трудоемких задач оптимизации.

В целом методы внутренней точки (также называемые барьерными методами) являются определенным семейством алгоритмов, решающих задачи линейной и нелинейной выпуклой оптимизации. Первым метод внутренней точки для решения ЗЛП выдвинул Фон Нейман в обсуждении с Данцигом в 1948 г., но его алгоритм не дал ни полиномиальной теоретической границы, ни эффективности при работе с практическими примерами, на которых он оказался медленнее СМ, который также не является алгоритмом с полиномиальным временем исполнения (подробнее см. [155, с. 70]).

С другой стороны, как уже сказано, метод эллипсоида Хачияна был уже полиномиален по времен, но оказался недостаточно эффективен для того, чтобы иметь практический интерес, так как был слишком медленен. Если n – число неизвестных, L – число бит для кодирования входных данных, то алгоритм Кармаркара требует $O(n^{3.5}L)$ операций на числах длины $O(L)$, в то время как методу эллипсоида для сравнения надо $O(n^6L)$ таких операций. Это значит, что время исполнения для алгоритма Кармаркара $O(n^{3.5}L^2 \ln L \ln\ln L)$. Поскольку алгоритм Кармаркара относится к классу методов внутренней точки, то есть сходится к оптимальному решению, двигаясь к каждому новому приближению не по границе допустимого множества, как в СМ, а сквозь его внутренность, то с каждой итерацией он приближается к оптимальному решению на определенную долю (см. [190, 198]).

Алгоритм Кармаркара стал первым, продемонстрировавшим возможность создания метода одновременно обладающим теоретически доказанным полиномиальным временем исполнения и действительно очень эффективного на практике (способного превзойти СМ). Реальная эффективность такого метода была продемонстрирована на примере решения сложных проблем в оптимизации сетевых коммуникаций, где время решения удалось снизить с недель до дней. Таким образом, этот метод сделал возможным решение ЗЛП, которые находились за пределами возможностей СМ (благодаря тому, что, как уже было сказано, в отличие от СМ, он достигает наилучшего решения путем пересечения внутренности множества допустимых значений).

Данный подход стимулировал разработку класса методов внутренней точки (целого семейства алгоритмов для решения задач линейной и нелинейной выпуклой оптимизации), некоторые из которых используются в современных программах решения ЗЛП. Кроме того, он может быть распространен на выпуклое программирование.

Дополнительным вкладом стало возрождение интереса к изучению методов внутренней точки и барьеров. Юрий Нестеров и Аркадий Немировский предложили специальный класс барьеров, применимых к любому выпуклому множеству и гарантирующих, что число итераций алгоритма ограничено полиномом от размерности и точности решения.

Нестеров и Немировский сделали дальнейший шаг – не ЛП, а некоторый другой сорт программирования, охватывающий огромное количество задач. Для него они разработали методы вычислений, которые сейчас являются самыми передовыми. И тоже из XX века. Рухнул СССР, никуда особо не выехать, страна переживает крайне тяжелый период 90-х гг., в науке почти никто не работает, потому что никаких планов – ничего нет, а Немировский и Нестеров – уже не в секретном заведении, а где-то в ЦЭМИ – работают, нигде ни на каких конференциях не выступают, но у них есть задел, и они сидят и пишут. Потом наступает момент, когда появляются возможности уехать, и они уезжают и публикуют там по-английски эти свои работы. И, конечно, слава немедленно к ним приходит со всего мира, они становятся самыми цитируемыми и публикуемыми.

5.4.6. Левин Леонид Анатольевич. Леонид Анатольевич родился в 1948 г. в СССР, закончил механико-математический факультет МГУ и был учеников потрясающих научных руководителей: А.Н. Колмогорова и А.А. Маркова. Впоследствии, эмигрировав в 1978 г. в США, стал профессором Бостонского университета.

В 1970 г. Левин написал маленькую заметку [71], которая состояла из трех страниц и не была опубликована сразу, а увидела свет лишь тремя годами позже. Чуть ранее, в 1971 г., в США в сборнике трудов недавно сформированного Симпозиума по теории вычислений Ассоциации вычислительной техники (ACM Symposium on Theory of Computing) вышла статья С. Кука (Stephen Cook) [120]. За ней последовала работа другого американца Ричарда М. Карпа [200] со списком из 21 NP-полной (NPC) задачи, обратившая опять интерес к статье Кука. В СССР об этом тогда никто не подозревал, а Левин несколько по-другому смотрел на те же вопросы: изучая задачи поиска, где надо не только установить, что решение есть, но и найти его. Он описал 6 подобных NPC задач поиска (на них еще ссылаются как на универсальные задачи). Вместе с этим для каждой из них был найден метод решения с оптимальным временем (в частности, эти алгоритмы осуществимы за полиномиальное время тогда и только тогда, когда справедлива гипотеза о равенстве P и NP).

Теорема Кука–Левина утверждает, что задача выполнимости булевых формул относится к классу NPC (NP-полных), то есть любая задача из NP может быть сведена за полиномиальное время с помощью детерминированной машины Тьюринга к задаче определения выполнимости булевой формулы. Пример такой задачи – это булево высказывание, комбинирующее булевы переменные с использованием булевых операторов. Высказывание выполнимо, если существует некоторый набор значений истинности для переменных, который делает всё выражение истинным. За эти работы Кук и Карп получили премию Тьюринга.

Важным следствием данной теоремы является то, что, если существует детерминированный полиномиальный алгоритм решения задачи выполнимости булевых формул, то существует аналогичный алгоритм решения всех NP задач, а значит, тоже самое следует для любой NPC задачи. Само разделение задач на экоспоненциальные и полиномиальные имеет кардинальную важность в современной теории сложности, поскольку принадлежность задачи к одному из этих классов определяет асимптотику количества операций, необходимого для отыскания её решения. Если обозначить длину закодированных входных данных через *n*, то трудоемкостью будет некоторая функция от этого аргумента. В случае мажорируемости значения данной функции, показывающего число необходимых для решения задачи действий, многочленом от *n*, задача относится к классу полиномиально разрешимых (P). Обычно предполагают, что если задача из P, то ее решение можно найти за «целесообразное» для практического использования время.

Данные работы стали новаторскими и вместе с последовавшими исследованиями определили направление развития целой области, так как в них авторы продемонстрировали существование универсальных задач, из полиномиальной разрешимости которых следует полиномиальная разрешимость произвольной задачи перебора. К данному моменту нашли свыше 2000 подобных задач, а также технику сводимости для проверки "универсальности" любой новой задачи, которая позволяет не изучать ее отдельно, а просто проверить сводится ли она к одной из уже известных задач. Фокус исследований переместился к поиску полиномиального метода решения любой универсальной задачи (тогда все проблемы из NP окажутся полиномиально разрешимы, то есть в этом случае NP совпадет с P), или доказательства ее полиномиальной неразрешимости (в случае чего универсальные задачи окажутся в классе, принадлежащем NP, но за пределами

Р). Это – один из главных открытых вопросов; он известен как вопрос о равенстве классов сложности P и NP (в русских источниках также известный как проблема перебора), является одной из центральных открытых проблем теории алгоритмов уже более трёх десятилетий и расценивается ныне как важнейшая нерешенная проблема теории вычислительной сложности (за него даже назначена Премия Тысячелетия (Millennium Prize) в $1млн, учрежденный Математическим институтом Клея в 2000 году).

Заключительный сюжет, который необходимо здесь описать, начался с работы Хачияна. Он представил алгоритм, построенный на методе эллипсоидов, и дал ссылку на работу Шора. Она, в свою очередь, напомнила Л.Левину (эмигрировавшему в то время в США, но прежде бывшему студентом Немировского) о статье Немировского, которую тот подарил ему, провожая в США. Из этой статьи Л.Левин узнал о методе описанных эллипсоидов, который дает полиномиальную оценку числа шагов решения любой задачи выпуклого программирования (в том числе и ЗЛП с действительными коэффициентами). После этого Хачиян (см. выше) доказал, что вычислительная сложность задачи теперь уже с рациональными коэффициентами (что имело принципиальное значение) тоже имеет полиномиальную оценку. Затем П. Гацс привлек внимание Л. Левина к статье А.Ю.Левина [68]. В ней автор указывает, что иногда надо описывать симплексы вокруг множеств B_n, и это осуществимо без ущерба для экспоненциального убывания их объемов. Он не указал конкретного алгоритма, но доказал теорему о его существовании. Этого было достаточно, чтобы задать вектор дальнейших исследований: вскоре Л.Левин и Борис Ямнитский (Boris Yamnitsky) показали в [254] справедливость идеи А.Ю.Левина, дав в своей статье полиномиальный метод "описанных симплексов", аналогичный методу описанных эллипсоидов, но в некоторых отношениях превосходящий его: если А.Ю.Левин работал с центром тяжести многогранника (очень тридно находимая вещь), а у Немировского задача представлялась в несколько исскуcственном виде (через эллипсоиды), то Л.Левин стал работать с симплексами. Идея такова: вокруг многогранника описываем симплекс, отсекаем его половину и оставшуюся часть – она уже не симплекс – можно вписать в симплекс же, причем так, чтобы отношение площадей было меньше единицы. После чего всё повторяется, вложанные симплексы содержат куски начального многогранника с точкой минимума, и мы сходимся к ней со скоростью геометрической прогресии. И очень красиво получается: мы работаем только с вершинами, и центр тяжести (который раньше нужно было искать – а это трудоемкая задача) нас не волнует.

После того, как Л.Левин познакомился на одной из конференций с Владимиром Михайловичем Тихомировым, который был близкий друг А.Ю.Левина, Л.Левин написал ему очень трогательное письмо, в котором помимо прочего сказал, что, по его мнению, если бы А.Ю.Левин чуть дольше бы задержался в своих исследованиях 1960–х годов на вопросах, связанных с его статьей о методе отсечений, то огромная часть последодавшей истории сократилась бы до того, что был бы просто «алгоритм Левина».

Все описанные выше события привели к колосальному расцвету методов выпуклой оптимизации (подробнее о дальнейшем развитии см. [222]).

5.5. Экономическая интерпретация задач линейного программирования. ЛП и математические модели в экономике имеют давнее и глубокое взаимопроникающее влияние. Родившись в процессе исследования и поиска решения задач, выдвинутых экономикой, они нашли огромное множество свих применений в различных ее областях. Среди них необходимо отметить и построение теоретических моделей, описывающих общее развитие экономики и состояния ее равновесия.

5.5.1. Экономическая интерпретация общей задачи линейного программирования. Речь идёт о классе задач на экстремум, в которых точка экстремума лежит на границе рассматриваемой области: для нахождения решения надо, дойдя до границы области, двигаться только вдоль неё, но никак не поперёк. То есть существует дополнительное необходимое условие оптимальности при поиске решения, позволяющее отмести ненужные варианты и сузить круг претендентов.

Экономическая интерпретация такова: процесс характеризуется векторами: $x \in X$ – результаты и $y \in Y$ – ресурсы, где X и Y – линейные пространства. Рассматривается множество реализуемых процессов *T*. Каждому значению параметра $t \in T$ отвечает некоторый процесс, характеризуемый его результатом и затратами (x_t, y_t). Множество $\{(x_t, y_t) : t \in T\}$ предполагаем выпуклым. Точка (x_t, y_t) называется экстремальным состоянием процесса, если пересечение конуса положительных элементов с вершиной в этой точке со множеством $\{(x_t, y_t) : t \in T\}$ пусто. Экономически это значит, что нет процесса, в котором и результаты больше $x \le x_0$, и затраты меньше $y \le y_0$.

Каждому экстремальному состоянию отвечает некоторый линейный функционал, достигающий экстремума в этой точке – опорная гиперплоскость, отделяющая эту точку от внутренних. Если написать какое-либо нормированное уравнение этой гиперплоскости, то каждой координате $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ будет отвечать некоторое число $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, причём $\xi \cdot x + \eta \cdot y = 0$. Таким образом, каждой экстремальной точке x_0, y_0 отвечает двойственная ей система чисел ξ_0, η_0, которые можно назвать оценками отдельных координат в пространствах $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$. Этими оценками экстремальные состояния вполне характеризуются: каждому виду результатов и каждому виду затрат соответствует своя оценка. Наличие для данного варианта процесса такой системы оценок свидетельствует о его экстремальности, то есть неулучшаемости при данных ресурсах и заданных конечных результатах.

Если есть некоторый вариант процесса и мы пытаемся для него определить эти оценки, а их не обнаруживается, то естественно указать путь – направление сдвига к внутренним точкам, дающее направление перехода к лучшему состоянию и, таким образом, последовательными улучшениями перейти к нужному решению.

Это была общая задача. Она имеет два важных частных случая, когда отображение $t \to (x_t, y_t)$ линейно.

1) Поиск экстремального состояния при данных ресурсах и заданном ассортименте конечной продукции (то есть определение на луче, исходящем из поверхности данных ресурсов, крайней точки) – *основная производственная задача*.

2) Поиск при данном конечном задании результата с наименьшими затратами ресурсов в векторной форме или в виде их линейной комбинации – *основная задача ЛП*.

Две последние задачи математически формулируются следующим образом: Заданы $A \in Mat(m \times n, R)$ – технологии (производственные процессы), определяющие способы использования ресурсов; $b \in R^m$ – ресурсы (ограничения); $c \in R^n$ – внешние цены (рыночные цены). Надо найти $x \in R^n$ – оптимальное распределение ресурсов по процессам.

Имеем прямую задачу (распределительную):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ A \cdot x \leq b \\ \langle c, x \rangle \to \max\limits_{x} \end{cases},$$

где $c \cdot x$ – выпуск (доход).

К ней формулируется двойственная задача (экономическая):

$$\begin{cases} p \geq 0 \\ A^T \cdot p \geq c \\ \langle b, p \rangle \to \min\limits_{p} \end{cases},$$

где p – внутренние цены , а $b \cdot p$ – затраты (издержки).

Как видно, решением двойственной задачи являются внутренние цены (суть цены оптимального плана).

Можно доказать, что для решений этих задач (***x*** и ***p***, соответственно) выполнено равенство $c \cdot x = b \cdot p$, т.е. значения целевых функционалов совпадают. Это равенство имеет большое экономическое значение: в точке оптимума выполнено условие рентабельности:

$$\forall i : или\ x_i = 0\ или \begin{cases} x_i \neq 0 \\ A^T \cdot p - c = 0 \end{cases}$$

и

$$\forall i : или\ x_i = 0\ или \begin{cases} x_i \neq 0 \\ A \cdot x - b = 0 \end{cases},$$

что гарантирует максимальную эффективность использования ресурсов. Т.е. для всех используемых в оптимальном плане производственных способов оценка суммарных затрат совпадает с общей оценкой продукции.

5.5.2. Уравнения Вальраса и их обобщения. Большую роль в изучении экономики играют математические модели, связанные с классическими уравнениями Вальраса [252]. Последние, когда дана матрица $A=(a_{ij})$ размера ($m \times n$), вектор-столбец b размера m и функция f: $\boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}^n$ могут быть записаны, следуя [117], следующим образом:

$Ax = b$; $yA = z$; $x = f(z)$.

(5.6)

Решение данной системы имеет изложенную ниже интерпретацию. Имеются m типов ресурсов и n типов продукции. Каждая компонента b_i в векторе b отражает количество наличного ресурса i, элемент матрицы a_{ij} обозначает количество ресурса типа i, которое необходимо затратить для того, чтобы создать единицу продукции типа j, j-ая компонента вектора неизвестных x соответствует производству j-го типа продукции. Из этого следует, что система уравнений $b = Ax$ выражает тот факт, что весь имеющийся в наличии объем ресурсов в полной мере расходуется в процессе производственной деятельности. Положим теперь, что i-ая комнонента вектора y обозначает цену (которая является неизвестной) единицы ресурса типа i, а j-ая компонента в векторе z обозначает цену (которая также является неизвестной) единицы продукции типа j. В таком случае система уравнений $yA=z$ говорит, что цена продукции складывается из цен необходимых составляющих для ее производства. Что касается функции f, то она описывает, каким образом спрос на продукт регулируется его ценой. Если рассматривается модель, в которой, напротив, цены являются функцией от спроса, то в последнем случает берут обратную зависимость.

Можно заметить, что общее число уравнений равно общему числу неизвестных, которых всего $m + 2n$. Исходя из этого, есть основания надеяться, что, решив эту систему, удасться найти x, y, z. По Вальрасу, решение данной системы описывает ситуацию экономического равновесия.

Тем не менее, в большом количесве ситуаций выходит так, что эта система или вообще не имеет решения (такая ситуация имеет место, например, когда $m > n$ и система $Ax = b$ переопределена), или решение существует, однако оказывается малосодержательным с точки зрения экономической интерпертации в силу того, что часть переменных оказывается отрицательными. В результате поиска выхода из такой неудовлетворительной ситуации, доработали описанную выше модель таким образом [255, 235]:

$$Ax \le b;\ yA = z;\ x, y, z \ge 0; \tag{5.7}$$
$$x = f(y, z);\ y(b - Ax) = 0.$$

Тогда модель допускает ситуацию, в которой число количества части типов ресурсов могут превосходить количества, необходимые для производства. Что же касается появившегося условия $y(b - Ax) = 0$, то оно отвечает за то, что в случае, когда ресурса типов i имеется больше, чем надо для производства, то цена на него y_i равна 0 (это – условие вида дополняющей нежесткости).

Исследование разрешимости (5.7) (см. в [249–251]).

Рассмотренная модель (5.7) может быть обобщена ([159]):

$Ax \le w;\ yA \ge z;\ x, y, z, w \ge 0;\ x = f(y, z);$

$w = g(y, z);\ y(w - Ax) = 0;\ (yA - z)x = 0.$

(5.8)

В данной модели A, f, g считаются заданными, а x, y, z, w – неизвестными и требующими определения. Как видно, в (5.8) количество всех типов товаров является функцией от цен и, следовательно, его необходимо находить. В дополнение к этому, допускается ситуация, когда цена на любой тип продукции становится меньше суммарной стоимости необходимых для его изготовления составляющих ($yA \geq z$). Если складывается такая ситуация, то соответствующий тип продукции не производится, о чем говорит условие $(yA - z)\ x = 0$ (см. [75] и [209] для обсуждения связи между (5.8), ЛП и теоремами о неподвижной точке).

5.5.3. Фон Нейман и модель роста. Еще одна бесспорно заслуживающая внимания модель, которая была выдвинута Дж. фон Нейманом в работе [224], описывает расширяющуюся экономику. Она тоже ведет к линейным неравенствам, и в ней также проявляются двойственность (цен и интенсивностей производства) и дополняющая нежесткость.

Фон Нейман доказал, что для двух произвольных данных неотрицательных $(m \times n)$-матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, где у матрицы A нет нулевых столбцов, всеегда имеет место разрешимость такой системы (где x, y, g, d – переменные):

$$gAx \leq Bx;\ dyA \geq yB;\ y(Bx - gAx) = 0;$$

$$(dyA - yB)x = 0;\ x, y, g, d \geq 0;\ x \neq 0;\ y \neq 0. \tag{5.9}$$

В дополнение к этому, в случае, когда А + В > 0, переменные g и d находятся однозначно и $g = d$.

Данная модель интерпретируется следующим образом: индексы строк i связываются с «товарами», а индексы j – с «процессами». Процесс с номером j может сделать за единицу времени (производственный период, например год) из вектора товаров $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$ вектор товаров $(b_{1j}, \ldots, b_{mj})^T$. То есть, процессы употребляют товары в качестве входных ресурсов и создают товары в качестве продукции. j-ая компонента вектора x показывает «интенсивность» использования производственного процесса j, i-ая компонента вектора y – цену единицы товара i. Величина d обозначает коэффициент ренты на капитал (по определению она равна $1 + z/100$, где z обозначает процентную ставку). То есть неравенство $dyA \geq yB$ требует, чтобы не было процессов j, в которых общая стоимость всех произведенных к концу производственного периода товаров была выше (с учетом годовых процентов) общей стоимости всех товаров, необходимых для производства в начале производственного периода.

В дополнение к этому, если последнее неравенство является строгим, то условие $(dyA - yB)x = 0$ требует равенства нулю интенсивности j-ого процесса.Число g обозначает темпы роста, то есть число, на которое умножаются интенсивности всех процессов от одного производственного периода к следующему. Неравенство $gAx \le Bx$ означает отсутствие убывания количества каждого типа товаров от одного производственного периода к следующему. Кроме того, уравнение $y(gAx - Bx) = 0$ показывает равенство нулю цены на i-ый товар в ситуации, когда он имеется в избыточном количестве.

Нейман доказал, что система (5.9) разрешима, и показал, что в данной модели всегда существует состояние равновесия, в котором темп роста и коэффициент ренты равны между собой: $g = d$.

На самом деле, при положительной матрице $A + B$ можно показать, что результат, полученный Нейманом, равносилен следующему тождеству:

$$\min \{d \mid \exists\, y \ne 0 \mid y \ge 0,\, dyA \ge yB\} = \max \{g \mid \exists\, x \ne 0 \mid x \ge 0,\, gAx \le Bx\}. \quad (5.10)$$

Иными словами, можно сказать, что минимальный коэффициент ренты равен максимальному темпу роста.

То образом, можно говорить о том, что утверждения, доказанные фон Нейманом включают в себя теорему двойственности для задач ЛП с положительными коэффициентами.

5.5.4. Транспортные и более общие задачи: Канторович, Хитчкок, Купманс. Транспортные задачи можно назвать одними из самых первых проблем, относящихся к области ИО. Также справедливо будет сказать, что на пути поиска решения данных проблем в работах Канторовича, Хитчкока и Купманса появлялось ЛП, развивался и обогащался его аппарат.

Л. В. Канторович выдвинул сходный с двойственным СМ путь для нахождения решения транспортной задачи (см. пункты диссертации 2.1.3 и 3.4.1).

Способ, предложенный в работах Канторовича, основывается на нахождении двойственных переменных, которые сам автор называет разрешающими множителями, и последующем отыскании соответствующего решения для прямой задачи. В случае, когда данное решение оказывается недопустимым, двойственное решение изменяется специально определенным образом. В дополнение к вышесказанному Канторович показал значение разрешающих множителей для исследования чувствительности решения, а также продемонстрировал путь, посредством которого можно показать оптимальность допустимого решения прямой задачи через установление оптимальных значений для двойственных переменных.

В сущности, он на самом деле представил способ для решения общих ЗЛП, поскольку проблема (5.10) равносильна общей ЗЛП (и на этот счет, кстати, говорится в подстрочном замечании 2 в работе [103]).

В своей работе 1941 г. Хитчкок [189] исследовал проблему $\min\sum_{i = 1, \dots, m} \sum_{j = 1, \dots, n} \gamma_{ij}\xi_{jj}$ при ограничениях

$$\sum j = 1, \dots, n\ \xi jj = \delta j\ (j = 1, \dots, n)$$
$$\sum i = 1, \dots, m\ \xi jj = \beta j\ (i = 1, \dots, m) \qquad (5.11)$$
$$\xi jj \geq 0,\ (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

Ему удалось доказать достижение минимума в вершине допустимой области, а также представить путь для решения проблемы (5.11), которой во многом схож (в том числе и преобразованиями на итерациях «ввод и вывод базисных переменных») с (прямым) СМ.

В 1948 г. Купманс изложил в своей работе «задачи трансперевозок» их интерпретацию и суть описываемых ими вопросов, а также представил метод «локального поиска» для получения оптимального решения такого рода задач, утверждая, что он приводит к оптимуму. Более подробно эти вопросы разбраны и прокомментированы Купмансом [205, 206], Чанесом и Купером [118], а также Вайдом [75].

Можно сказать, что исследование проблем, связанных с транспортными задачами, стало отправной точкой и сыграло тем самым большую роль в качестве предварительного этапа перед открытием в 1940-х гг. в трудах Данцига, Канторовича, Купманса и фон Неймана новой области математики – ЛП.

Фундамент математического аппарата, который в нем используется, создал в своих рабочих материалах еще фон Нейман. В своих исследованиях ученому удалось доказать равносильность отыскания $\max\{cx \mid x \geq 0, Ax \leq b\}$ и решения следующей СЛУ:

$$x \geq 0, Ax \leq b, yA \geq c, y \geq 0, cx \geq yb. \quad (5.12)$$

После этого Гейл, Кун и Таккер [210] в своих исследованиях представили формулировку и показали справедливость теоремы о двойственности ЛП:

$$\max\{cx \mid x \geq 0, Ax \leq b\} = \min\{yb \mid y \geq 0, yA \geq c\}. \quad (5.13)$$

Все вышеназванные ученые опирались в исследованиях на лемму Фаркаша.

Как уже говорилось, огромное значение имело открытие Данцигом [133] СМ, который сыграл основополагающее значение и сделал неизбежным широчайшее применение ЛП в обширном множестве разнообразных приложенияй. В последующем развитии ЛП большую роль сыграли такие исследователи, как, в частности, Э.Бил, А.Чарнес, У.Купер, А.Орден, Г.Кун, Дж.Данциг, А.Голдман, А.Хофманн, У.Орчард-Хэйс, А.Таккер, Г.Вагнер, Ф.Вольф. Хороший обзор создания и последующего становления ЛП можно найти в [220].

Заключение.

В диссертации представлены результаты исследования источников возникновения ЛП и методов для решения его задач.

Среди этих источников были проанализированы как главные работы основных авторов, принимавших участие в открытии ЛП, относящиеся непосредственно к этой области и методам решения рассматриваемых ею задач, так и работы, относящиеся к предшествовавшим этой тематике периодам в научном творчестве этих ученых. Таким образом, показан тот багаж знаний, взгляды на математику в целом и связи в научном сообществе, с которыми ученые подошли к интересующему нас открытию. Благодаря этому анализу проясняется роль пройденного ими в науке пути в более ранние периоды жизни. Среди наиболее значимых пунктов в научной карьере Канторовича и Данцига, подтолкнувших позднее ученых к их открытию области ЛП и методов для решения ее задач, могут быть отмечены исследования Канторовича в области функционального анализа и диссертация Данцига.

Наряду с этим проанализированы те работы других ученых, которые могут быть отнесены к предыстории ЛП, а также к созданию наиболее значимых алгоритмов для решения его задач. Тем самым на примере выбранной темы был исследован интересный процесс, происходящий в науке и заключающийся в том, что к одному и тому же по своему внутреннему существу предмету разные ученые могут подходить с разных сторон: со стороны ЛП (оптимизации), полиэдров (геометрии) и СЛН (алгебры). Причем иногда эти исследования идут параллельными курсами, иногда же пересекаются и взаимодополняют друг друга.

Так же удалось проследить эволюцию интереса к области ЛП со стороны двух ее главных двигателей – Леонида Витальевича Канторовича в СССР и Джорджа Бернарда Данцига в США, а так же развитие той роли, которую играла эта тема и увлечения, связанные с ее исследованиями, в жизни этих ученых.

Отдельно были проанализированы связи и взаимное влияние между ЛП, как представителем математических методов экономики, и различными областями математики.

В результате проведенного анализа большого количества информации была выявлена роль основных действующих лиц, благодаря научной деятельности которых произошло зарождение и последовавшее за ним бурное развитие ЛП и его алгоритмов. Материал, полученный при изучении математических работ ученых, принимавших участие в этом процессе, был погружен в историко-математический контекст с учетом особенностей политической, социальной и экономической среды, в рамках которой эти работы создавались.

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. Основные предпосылки, стимулирующие разработку ЛП (независимо и в СССР, и на Западе), следующие:

– появление со стороны военных ведомств, промышленности и экономики жизненноважных оптимизационных задач планирования, распределения, производства и прочих, требующих осущесвтимого на практике эффективного решения;

– насущные потребности и прямые требования (заказы) военных ведомств и сопутствующих организаций, производств и прочих перед Второй мировой войной, во время нее и во время последовавшей Холодной войны; сама политическая атмосфера серьезно влияла на выбор тематики исследований, приорететное финансирование и прочее;

– что касается работ Канторовича, то здесь четко прослеживается влияние традиций и принципов Петербургско–Ленинградской школы, – сочетание теоретических исследований и практического применения;

– взгляды Канторовича и Данцига на математику и мир в целом, определившие выбор тем и методов исследований;

– предшествовавшая профессиональная карьера и последующие должностные обязанности, определившие обширные связи Канторовича и Данцига в научном мире и промышленности.

2. Главными причинами, которые привели Канторовича, Данцига и фон Неймана к задачам ЛП и способствовали дальнейшим их успехам в разработке этой дисциплины, являются:
– багаж опыта и идей у Канторовича, Данцига и фон Неймана, унаследованный от предшествовавшей научной деятельности, подсказавший пути успешного поиска методов решения ЗЛП;
– способность Данцига создать круг единомышленников, поддержавших и развивающих его идеи;
– интересы влиятельных правительственных и промышленных кругов, обеспечивших Данцигу сильную финансовую и административную поддержку в развитии и внедрении разработанных им методов;
– поддержка работ Канторовича по ЛП крупнейшими математиками СССР, позволившая продолжить исследования несмотря на неоднозначную реакцию влиятельных представителей экономической науки и сложную политическую обстановку.

3. Крупные достижения в ЛП были обусловлены:
– широким кругозором и сферой интересов, опытом и выдающимся талантом Канторовича и Данцига, внедрявших разработанные методы в самые разные области промышленности;
– большим вкладом фон Неймана, сумевшего посмотреть на возникавшую область ЛП через призму своих предыдущих исследований по ТИ;
– активным интересом широкого круга ученых (Таккер, Кун, Гейл и другие), известных по достижениям в различных областях математики, но серьезно

заинтересовавшихся новой областью (ЛП) и внесших огромный вклад в ее становление и последующие расширения (выпуклый анализ и прочие);
– активным использованием теоретических результатов в приложениях;
– начавшимся в тот момент активным развитием вычислительной техники.

4. Зачастую не только прогресс математического аппарата влияет на области его приложения (такие как экономика или планирование), но имеет место и обратная связь, когда в ответ на запрос, полученной со стороны приложения, возникает новая область (ЛП), которая сама способна дать новые результаты (и более простые методы решения старых проблем) не только в породивших ее приложениях, но и в фундаментальных разделах самой математики. Пример этого – полное решение проблемы Монжа, полученное Канторовичем на основе открытых им ранее методов ЛП.

5. В силу известной историко-политической ситуации в мире в XX в. обмен идеями был ограничен. Кроме того, был известный консерватизм экономической мысли в СССР, связанный с идеологическими взглядами правящего режима. Поэтому к аналогичным, а иногда и идентичным теориям, проблемам и алгоритмам приходили исследователи как разных стран, систем и школ (что илюстрируется работами учёных СССР и США), так иногда даже и внутри одной страны и даже ведомства (напрмер, исследования В. Каруша и позже Х.У. Куна и А.У. Таккера в США, равно как методы А.Ю.Левина и А.С. Немировскаго в СССР). Данная ситуация иногда усугублялась тем, что некоторые работы опережали своё время и в силу этого не были своевременно оценены академическим сообществом (например, работы Канторовича), что привело к их ограниченному распространению и последующему переоткрытию результатов.

Список сокращений и условных обозначений:

ЛП – линейное программирование

ЗЛП – задача ЛП

НЛП – нелинейное программирование

СМ – симплекс метод

ИО – исследование операций

ТИ – теория игр

СЛУ – система линейных уравнений

СЛН – система линейных неравенств

Список литературы:

1. Аганбегян А.Г., Вайнштейн А.Л., Олейник Ю.А. Первооткрыватели // «Известия». №42. 18 февраля 1964 г.

2. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.. «Упорядоченные векторные пространства» // Новосиб., 1978.

3. Андрианов А.Л. Дж.Б. Данциг и линейное программирование // Казанская наука. №8 2014г. – Казань: Изд-во Казанский Издательский Дом, 2014. С. 19-23.

4. Андрианов А.Л. Джордж Б.Данциг и история линейного программирования (ЛП) в США // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, посвященная 120-летию со дня рождения С.И.Вавилова, 2011. – М.: «Янус-К», 2011. – С. 315–318.

5. Андрианов А.Л. Краткий очерк эволюции ранних методов линейного программирования // Вопросы истории естествознания и техники. – 2017 (в печати, выход во втором квартале 2017).

6. Андрианов А.Л. Краткий очерк эволюции ранних методов линейного программирования // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер. «Естественные и Технические науки» №1, М., 2017, С. 23–28.

7. Андрианов А.Л. Л. В. Канторович как создатель линейного программирования // Вопросы истории естествознания и техники. – 2009. – №4. – С. 77–89.

8. Андрианов А.Л. Линейное программирование в работах Л.В. Канторовича 1930–1950-х гг. // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2009. – М.: Анонс Медиа, 2009. – С. 323–325.
9. Андрианов А.Л. Развитие линейного программирования в работах Л.В. Канторовича 1930-50-х гг. // Историко-математические исследования. Серия 2. Выпуск 15 (50). «Янус-К», М, 2014, С. 25–40.
10. Андрианов А.Л. Развитие линейного программирования в ранних работах Л.В. Канторовича // Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 13 (48). –М.: «Янус-К», 2009. – С. 323–339.
11. Андрианов А.Л. Рождение линейного программирования // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2008. – М.: ИДЭЛ, 2009. – С. 260–262.
12. Вершик А.М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. Джон фон Нейман // фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу. М., 1987. Т.1.
13. Голдман А.Дж., Таккер А.У. Теория линейного программирования (перевод Корбута А.А.) // Г.Кун, А.Таккер (ред). Линейные неравенства и смежные вопросы / Пер. под ред. Л.В.Канторовича и В.В.Новожилова. М., ИЛ, 1959. Приложение: С.Вайд «Теория игр и линейное программирование», стр. 187–192.
14. Гофман А. Дж, и Кун Г.У. О систмах различных представителей. (перевод Залгаллер С.И.) // Г.Кун, А.Таккер (ред). Линейные неравенства и смежные вопросы / Пер. под ред. Л.В.Канторовича и В.В.Новожилова. М., ИЛ, 1959. Приложение: С.Вайд «Теория игр и линейное программирование», стр.302–310.
15. Данциг Дж.Б. Воспоминания о возникновении линейного программирования. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://kantorovich.vixpo.nsu.ru/?int=VIEW&el=397&templ=VIEW (дата обращения: 10.03.2017).
16. Данциг, Дж. Б. Воспоминания о началах линейного программирования. Стэнфордский университет, факультет исследования операций, Стэнфорд, CA 94305, США.

17. Данциг Дж.Б. Линейное программирование, его применения и обобщения. / Пер. с англ. М., издательство «Прогресс, 1966. – русский перевод с англ. Под ред. Н.Н. Воробьева. Оригинал: G. B. Dantzig. Linear Programming and Extensions / The Rand Corporation and University of California, Berkely. University Press, Princeton, New Jersey. 1963.
18. Данциг Дж.Б., Гофман А.Дж. Теорема Дилворта о частично упорядоченных множествах. (перевод Корбута А.А.) // Г.Кун, А.Таккер (ред). Линейные неравенства и смежные вопросы / Пер. под ред. Л.В.Канторовича и В.В.Новожилова. М., ИЛ, 1959. Приложение: С.Вайд «Теория игр и линейное программирование», С. 311–317.
19. Данциг Дж.Б., Форд Л.Р., Фулкерсон Д.Б. Алгорифм для решения прямой и двойственной задач линейного программирования // Линейные неравенства и смежные вопросы. М. 1959. С.277–286.
20. Дикин И.И. Итерактивное решение задач линейного и квадратичного программирования. ДАН СССР, 1967, Т. 174, № 4, С.747–748.
21. Канторович Л.В. Возможности применения математических методов в вопросах производственного планирования // Организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий. М.–Л., 1958. С.338–353.
22. Канторович Л. В. Использование идеи метода Галёркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Прикл. мат. и мех. – 1942. – Т. 6, № 1. – С. 31–40.
23. Канторович Л.В. К общей теории приближенных методов анализа // Доклады Академии наук СССР. 1948. Т. 60. №6. С. 957–960.
24. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: издательство ЛГУ, 1939, 67 стр. (переиздана в сборнике [85] с дополнением «Дальнейшее развитие математических методов и перспективы их применения в планировании и экономике», Соцэкгиз, 1959).
25. Канторович Л. В. Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант // Доклады Академии наук СССР. 1951. Т.80. №6. С.849–852.

26. Канторович Л. В. Некоторые частные методы расширения пространств Гильберта // ДАН СССР, 1935, Т. 4, №4/5, С. 163–167.
27. Канторович Л. В. Несколько замечаний о приближении к функциям посредством полиномов с целыми коэффициентами // Известия Академии наук СССР, отделение математических и естественных наук. 1931. №9. С.1163–1168.
28. Канторович Л. В. Об обобщенных производных непрерывных функций // Математический сборник. 1932. Т.39. Вып.4. С.153–170.
29. Канторович Л.В. Об одной проблеме Монжа // Успехи математических наук. 1948. Т.III. Вып.2(24). С.225-226.
30. Канторович Л.В. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем // Доклады Академии наук СССР. 1940. Т.28. №3. С.212-215.
31. Канторович Л. В. Об универсальных функциях // Журнал Ленинградского физико-математического общества. 1929. Т.2. Вып.2, С.13–21.
32. Канторович Л. В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // Изв. АН СССР. – 1933. – Т. 5. – С. 647–652.
33. Канторович Л. В. О конформном отображении // Мат. сб. – 1933. – Т. 40, № 3. – С. 294–325.
34. Канторович Л.В. О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач // Доклады Академии наук СССР. 1957. Т.115. №3. С.441–444.
35. Канторович Л. В. О методе наискорейшего спуска // Доклады Академии наук СССР. 1947. Т.56. №3. С. 233–236.
36. Канторович Л. В. О методе Ньютона для функциональных уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1948. Т.59. №7. С.1237–1240.
37. Канторович Л. В. О методе Ньютона // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1949. Т.28. С.104–144.
38. Канторович Л. В. О некоторых методах построения функции, совершающей конформное отображение // Изв. АН СССР. - 1933. – Т. 2. – С. 229–235.

39. Канторович Л. В. О некоторых общих методах распространения пространств Гильберта // ДАН СССР, 1935, Т.4, №3, С. 115–118.
40. Канторович, Л. В. О некоторых разложениях по полиномам в форме С.Н.Бернштейна // Доклады Академии наук СССР. Серия А. 1930. №21. Ч.1. С.563–568; №22. Ч.2. С.595–600.
41. Канторович Л.В. О перемещении масс // Доклады Академии наук СССР. 1942. Т.37. №7-8. С.227–229.
42. Канторович, Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Доклады Академии наук СССР. 1935. Т.4. №1–2. С. 11–14.
43. Л. В. Канторович. О продолжении семейства линейных функционалов // ДАН СССР, 1935, Т. 6, №4, С. 204–210.
44. Канторович, Л. В. О сходимости последовательности полиномов С.Н.Бернштейна за пределами основного интервала // Известия Академии наук СССР, отделение математических и естественных наук. 1931. №8. С. 1103–1115.
45. Канторович, Л. В. О функциональных уравнениях // Ученые записки Ленинградского государственного университета. 1937. Т.3. №17. С. 24-50.
46. Канторович Л. В. Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте // Лесная промышленность. 1949. №7. С.15–17; 1949. №8. С.17–19.
47. Канторович, Л. В. Применение интеграла Стилтьеса к расчету балки, лежащей на упругом основании // Труды Ленинградского института инженеров промышленного строительства. 1934. Вып.1. С.17–34.
48. Канторович, Л. В. Принцип мажорант и метод Ньютона // Доклады Академии наук СССР. 1951. Т.76. №1. С.17–20.
49. Канторович Л. В. Рациональные методы раскроя металла // Производственно-технический бюллетень. 1942. №7–8. С.21–29.
50. Канторович Л. В. «Функциональный анализ», 2-ое издание, 1977.

51. Канторович, Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи математических наук. 1948. Т.III. Вып.6 (28). С.89–185.
52. Канторович, Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1959.
53. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Государственное издательство технико-теоретической литературы. М.-Л., 1950, стр. 334.
54. Канторович Л. В., Гавурин М. К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М.-Л., 1949. С.110–138.
55. Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Л., 1951.
56. Канторович, Л. В., Крылов В.И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. М.-Л., 1936.
57. Канторович, Л. В., Лассманн, В., Шилар, Х., Шварц, К., Брентьес, С. Экономика и оптимизация. М., Наука, 1990. 248 с.
58. Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций // Вестник ЛГУ (сер. мат., мех. и астр.). 1958. №7. Вып.2. С. 52–59.
59. Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // Доклады Академии Наук СССР, 115, 1957, №6, С. 1058–1061.
60. Канторович Леонид Витальевич (1912–1986): Библиографический указатель / Ред. С. С. Кутателадзе. Авт. Вступ. Ст. С. С. Кутателадзе, В. Л. Макаров, И. В. Романовский и Г. Ш. Рубинштейн. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. – 142 с. ISBN 5–86134–104–4.
61. Козлов М. К., Тарасов С. П., Хачиян Л. Г., Полиномиальная разрешимость выпуклого квадратичного программирования, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, том 20, номер 5, С. 1319–1323. [Электронный ресурс]. – Режим доступа:

http://www.mathnet.ru/links/702d5913c97217438370dc7a83e3577e/zvmmf5189.pdf (дата обращения: 10.03.2017).
62. Кондратьев, Н. Д. Большие циклы конъюнктуры. Доклады и их обсуждения в Институте экономики. М., 1928.
63. Конюс А. А. Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономический бюллетень Конъюнктурного института. 1924. №9–10, 64–72.
64. Крейн М. Г. Избранные труды. В 3 книгах. Киев. 1993. Кн. 1, 315 с.
65. А. Н. Крылов. О расчёте балок, лежащих на упругом основании» // Л.: Издательство АН СССР, 1931.
66. Кузовкин А. И., Тихомиров В. М. О количестве вычисления для нахождения минимума выпуклой функции. Экономика и математич. методы, 1967, Т. 3, Вып. I, С. 95–103.
67. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Локальный выпуклый анализ // в книге «Современные проблемы математики», т. 19 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР), С. 155–206.
68. Левин, А. Ю. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций. ДАН СССР. – 1965. – Т. 160, № 6, С. 1244–1247.
69. Левин В. Л. Задача Монжа-Канторовича о перемещении масс // Математическая экономика и функциональный анализ. М.: 1978, Наука, С. 94–108.
70. Левин В. Л., Милютин А. А. Задача о перемещении масс с разрывной функцией стоимости и массовая постановка проблем двойственности выпуклых экстремальных задач // Успехи матем. наук. 1979. Т. 34. Вып. 3. С. 3–68.
71. Левин Л. А. Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации. – 1973. – Т. 9, № 3. – С. 115–116.
72. Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый В 2 т. / Редакторы-составители В. Л. Канторович, С. С. Кутателадзе, Я. И. Фет. – Новосибирск: Издательство СО РАН, Филлиал «Гео», 2002. – Т. 1. – 544 с., ил. 48 с.

73. Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый» В 2 т. / Редакторы-составители В. Л. Канторович, С. С. Кутателадзе, Я. И. Фет. – Новосибирск: Издательство СО РАН, Филлиал «Гео», 2004. – Т. 2. – 613 с., ил. 40 с.
74. Леонтьев, В. В. Количественный анализ соотношений «Затраты-Выпуск» в экономической системе США. М., 1936 (см. также: Избранные статьи. СПб. Изд-во газеты «Невское время». 1994. 366 с.).
75. Линейные неравенства и смежные вопросы / Кун Г., Таккер А. (ред). Пер. под ред. Л. В. Канторовича и В. В. Новожилова. М., ИЛ, 1959. Приложение: С. Вайд «Теория игр и линейное программирование».
76. Магарил-Иляев Г.Г.,Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. Издание второе. УРСС, Москва, 2003.
77. Методические материалы для подготовки к экзамену по истории и философии науки (история математики) / Отв. Ред. И сост. С. С. Демидов. М.: Янус-К, 2003, С. 14–40.
78. Нейман фон Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение / пер. с анг. – М.: Наука. 1970. 708 с.
79. Немировский А. С., Юдин Д. Б., Методы оптимизации, адаптивные к «существенной» размерности задачи, Автомат. и телемех., 1977, выпуск 4, С. 75–87.
80. Немчинов В. С. Экономико-математические методы и модели. М., 1962.
81. Новожилов В. В. Измерение затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве // [85].
82. Новожилов В. В. Недостаток товаров // Вестник финансов. 1926. №2.
83. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. – М.: Мир. 1988 – 264 с.
84. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. - М.: Наука, 1983 – 384 с.
85. Применение математики в экономических исследованиях / Под ред. В. С. Немчинова. М., 1959.

86. Рубинштейн Г. Ш. Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и ее приложение к исследованию конечной системы линейных неравенств // Доклады Академии наук СССР. 1955. Т.100. С.627-630.

87. Рубинштейн Г. Ш. О развитии и применениях линейного программирования в СССР. // Линейные неравенства и смежные вопросы. / Пер. с англ. Ред. Л.В. Канторович и В.В..Новожилова. / с приложением книги С.Вайда «Теория игр и линейное программирование» - М.: , 1959. - С. 402–420.
88. Смирнов В. И., Крылов В.И., Канторович Л.В. Вариационное исчисление. // Л.: КУБУЧ. 1933.
89. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2 т./ пер. с англ. С.А. Тарасова [и др.]. Т. 1,2 - М.: Мир, 1991. 702 с.
90. Толстой А. Н. Методы нахождения наименьшего суммового километража при планировании перевозок в пространстве // Планирование перевозок, сборник первый. Транспечать НКПС, Москва, 1930, С. 23–55.
91. Толстой А. Н. Методы устранения нерациональных перевозок при планировании // Социалистический транспорт. – 1939. – №9. – С. 28–51.
92. Фельдман Г.А. К теории темпов роста народного дохода (под углом зрения народного хозяйства СССР) // Плановое хозяйство, 1928. №11–12.
93. Фихтенгольц Г. М., Канторович Л. В. Некоторые теоремы о линейных функционалах // ДАН СССР, 1934, Т. 3, №5, С. 307–312.
94. Хачиян Л. Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании, Журнал вычислительной математики и математической физики, 20 (1980), С. 51–68.
95. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Доклады Академии Наук СССР, 1979, Т. 244, №5, С.1093–1096.
96. Хачиян Л. Г. Сложность выпуклых задач вещественного и целочисленного полиномиального программирования (диссертация на соискание степени доктора

физико-математических наук. Защита диссертации состоялась в ВЦ АН СССР в 1984 г.), Москва, 1983.
97. Шор Н. З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. – 13 (1977) – №1. – С.94–95.
98. Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление. – М.: Гостехиздат, 1952.
99. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Проблемы и методы линейного программирования. Москва, Соврадио, 1961.
100. Юдин Д. Б., Немировский А. С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. Экономика и математические методы, 1976, Т. 12, №2, С. 357–369.
101. Юдин Д. Б., Немировский А. С. Оценка информационной сложности задач математического программирования/Экономика и математические методы, 1976, Т. 12, №1, С. 118–142.
102. Юшков Л. Основной вопрос плановой методологии // Вестник финансов. 1928. №10.
103. Activity Analysis of Production and Allocation / T. C. Koopmans (Ed.) Cowles Commission for Research in Econ Monograph №13–New York, John Wiley & Sons, 1951, 404 pp.
104. Albers, D. J. et al. (Eds.), More Mathematical People: Contemporary Conversations, Harcourt Brace Jovanovich, Boston, 1990. (Based on [105]).
105. Albers, D. J., Reid, C. An interview with George B. Dantzig: The father of linear programming. // College Math. J. 17, 1986, P. 292–314.
106. Andrianov, A. The full Monge problem solution base on the linear programming (LP) // Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation (22–27 August 2011) Volume 3. – M.: Peoples' Friendship University of Russia, 2012. – P.94–101.
107. Appel, P. Le problem geometrique des deblois et remlois. Memorial de Sc. Math. Fasc. XXVII, Paris, 1928.

108. Appel, P. Memoire sur les deblai et les remblais des systeemes continus ou discontinus. Memoires presentes par divers Savants a l’Academie des Sciences de l’Institut de France. 1887, Paris 28, 1–208. Available at http:gallica.bnf.fr.
109. Arrow, K. J. George Dantzig in the development of economic analysis / manuscript – January 2006.
110. Barankin, E.W., Dorfman, R. On quadratic programming, Berkeley, Univ. California Publs. in Statistics 2, №13 (1958), P .285–318.
111.R. G. Bland and J. B. Orlin. IFORS' operational research hall of fame: Delbert Ray Fulkerson // International Transactions in Operational Research 12 (2005), 367.
112. Borel, E. La science est-elle responsable de la crise mondiale?", Scientia : rivista internazionale di sintesi scientifica, 51, 1932, pp. 99–106.
113. Borgwardt, K. H. The average number of pivot steps required by the simplex method is po1ynomial // Zeitschrift fur Operations Research 7 (1982), P. 157–177.
114. Borgwardt, K. H. The simplex method: A probabilistic analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – Vol. 1. – P. xii+268. – ISBN 3-540-17096-0.
115. Boros, E., Gurvich, V. Scientific contributions of Leo Khachiyan (a short overview) // Discrete Applied Mathematics 156 (2008), pp.2232–2240.
116. Cantor, D. et al. (Eds.). Theodore S. Motzkin: Selected Papers, Birkhauser, Boston, 1983.
117. Cassel, G. (1918). Theoretische Sozialokonomie. Leipzig: Deichert. - Cassel, G. (1932). The Theory of Social Economy, / revised English translation of the 5th German edition of Cassel (1918) by L. Barren (1932), New York: Harcourt Brace. / Reprinted (1967) New York: Augustus M. Kelley.
118. Charnes, A., Cooper, W. W. Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. John Wiley & Sons, New York, 1961.
119. Charnes, A., Cooper, W. W., Henderson, A. An Introduction to Linear Programming, John Wiley & Sons, New York, 1953.

120. Cook S. A. The Complexity of Theorem Proving Procedures. // Proceedings Third Annual ACM Symposium on Thoery of Computing, May 1971, University of Toronto, pp. 151–158.
121. Cottle, R. W. (Ed.). The Basic George B. Dantzig, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 2003.
122. Cottle, R., Johnson, E., Wets, R. George B. Dantzig (1914–2005) // Notices of the American Mathematical Society. Vol. 54, N 3, March 2007. p.344–362. ISSN 0002-9920.
123. Dantzig, G. B. I Complete Form of the Neyman-Pearson Lemma; II On the Non Existence of Tests of "Student's" Hypothesis Having Power Functions Independent of Sigma. Doctoral dissertation, Department of Mathematics, University of California at Berkeley, 1946. [QA276.D3 at Math-Stat Library, University of California, Berkeley.]
124. Dantzig, G. B. Application of the simplex method to a transportation problem, in [103].
125. Dantzig, G.B. A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem. // [103], Ch. XX, P. 330–335.
126. Dantzig, G. B. Concepts, origins, and use of linear programming // Proceedings of the First International Conference on Operational Research, Operations Research Society of America / M. Davies, R. T. Eddison, and T. Page, (Eds.), Baltimore, 1957.
127. Dantzig, G. B. Developments in linear programming // H. A. Antosiewicz (Ed.) Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, Washington, D.C., 1955.
128. Dantzig, T. Henri Poincare, Critic of Crisis. Reflections on his Universe of Discourse, Scribner, New York, 1954.
129. Dantzig, G. B. History of Mathematical Programming (A collection of Personal Reminiscences) / Ed. by J. K. Lenstra, F. H. G. Rinnooy Kan, A. Schrijver, North-Holland, 1991.
130. Dantzig, G. B. Impact of linear programming on computer development // ORMS Today - 14, August 1988. – p. 12–17. Также см. Computers in Mathematics, Lecture

Notes in Pure and Applied Mathematics, v. 125 / D. V. Chudnovsky and R. D. Jenks (Eds.) - New York, Marcel Dekker, Inc., 1990. p. 233–240.
131. Dantzig, G. B. Linear control processes and mathematical programming // SIAM Journal on Control and Optimization 4 (1966), P. 56–60.
132. Dantzig, G. B. Linear programming. History of Mathematical Programming / J. K. Lenstra et al. (Eds.) – CWI and North-Holland, Amsterdam, 1991.
133. Dantzig, G. B. Linear Programming and Extensions. -, Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1963.
134. Dantzig, T. Number, The Language of Science. Macmillan, New York, 1930.
135. Dantzig, G. B. On the non-existence of tests of "Student's" hypothesis having power functions independent of sigma // Ann. Mate. Stat. 11. 1940. P. 186–192.
136. Dantzig, G. B.. On the significance of solving linear programming problems with some integer variables // Econometrica, 28 (1960), P. 30–44.
137. Dantzig, G. B. Origins of the simplex method / S. G. Nash (Ed.). A History of Scientific Computing, – ACM Press, Reading, MA, 1990.
138. Dantzig, G. B. Programming in a linear structure, Econometrica 17 (1949), P. 73–74.
139. Dantzig, G. B. Reminiscences about the origins of linear programming // R. W. Cottle, M. L. Kelmanson, and B. Korte (Eds.) Mathematical Programming, Proceedings of the International Congress on Mathematical Programming – Rio de Janeiro, Brazil, April 6–8, 1981. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984, P. 105–112.
140. Dantzig, G. B. Reminiscences about the origins of linear programming // Operations Research Letters #1, 1982 – p. 43–48.
141. Dantzig, G. B. Reminiscences about the origins of linear programming // A. Bachem et al. (eds.) *Mathematical Programming: The State of the Art, Bonn 1982*, Berlin, Springer-Verlag, 1983, PP. 78–86.
142. Dantzig, G. B. Upper bounds, secondary constraints and block triangularity in linear programming, Econometrica 23 (1955), P. 174–183.

143. Dantzig , G. B. , Fulkerson, D. R. Minimizing the number of tankers to meet a fixed schedule // Naval Research Logistics Quarterly 1 (1954), P.217–222.
144. Dantzig, G. B., Fulkerson, D. R. , Johnson, S. M. Solution of a large-scale Traveling-Salesman Problem // Journal of the Operations Research Society of America 2 (1954), P. 393–410.
145. Dantzig, G. B., Glynn, P. W. Parallel processors for planning under uncertainty, Annals of Operations Research 22 (1990), P. 1–21.
146. Dantzig, G. B., Infanger, G. Large-scale stochastic linear programs: Importance sampling and Benders decomposition // Computation and Applied Mathematics – Algorithms and Theory, Lecture Notes in Mathematics, Proceedings of the 13th IMACS World Congress on Computational and Applied Mathematics / C. Brezinski and U. Kulsich. (Eds.), Dublin, 1992.
147. Dantzig, G. B., Madansky, A. On the solution of two-staged linear programs under uncertainty / J.Neyman (Ed.) Proceedings 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1, University of California Press, Berkeley, 1961, P. 165–173.
148. Dantzig, G. B., McAllister, P. H., Stone, J. C. Formulating an objective for an economy // Mathematical Programming 42 (Series B) (1988), P. 11–32.
149. Dantzig, G., Orden, A. A Duality Theorem Based on the Simplex Method // Symposium on Linear Inequalities, USAF Hq. SCOOP Publication No. 10, dated 1 April 1952, P. 51–55.
150. Dantzig, G. B., Parikh, S. C. On a pilot linear programming model for assessing physical impact on the economy of a changing energy picture // Energy, Mathematics and Models, Lecture Notes in Mathematics / F. S. Roberts (Ed.), SIAM – Proceedings of a SIMS Conference on Energy, 1976.
151. Dantzig, G. B., Ramser, J. H. The truck dispatching problem // Management Science 6 1959, P. 80–91.
152. Dantzig, G. B., Saaty, T. L. Compact City, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1973.

153. Dantzig, G. B., Van Slyke, R. M. Generalized upper bounding techniques // Journal of Computer and System Science 1 (1967). P. 213–226.
154. Dantzig, G. B., Thapa, M. N. Linear Programming 1: Introduction. Springer, New York, 1997.
155. Dantzig, G. B., Thapa, M. N. Linear Programming 2: Theory and Extensions. Springer, New York, 2003.
156. Dantzig, G. B., Wald, A. On the fundamental lemma of Neyman and Pearson, Ann. Math. Stat. 22, 1951, P. 87–93.
157. Dines, L. L. Systems of linear inequalities // Ann. Math. (2) 20 (1918–9), P191–199.
158. Dongarra, J., Sullivan, F. The top 10 algorithms, Computing in Science and Engineering 2 (2000), P. 22–23.
159. Dorfman, R. Application of Linear Programming to the Theory of the Firm – Berkeley and Los Angeles, CA: University of California Press, 1951, 98 pp.
160. Dorfman, R. The discovery of linear programming // Annals of the History of Computing 6. 1984, P. 283–295.
161. Dorfman, R., Samuelson, P. A. , Solow, R. M. Linear Programming and Economic Analysis, New York: McGraw-Hill, 1958.
162. Dwyer, P. S. Report of the New York meeting // Ann. Math. Stat. 19 (1948), P. 133–136.
163.Rawlings, E. W. The Application of Electronic Computers to Military Operations // Publication No. L56–126; Industrial College of the Armed Forces, Washington, D.C., 1956. [Address delivered by Lt. Gen. Rawlings, April 10, 1956.
164. Farkas J. Theorie der einfachen Ungleichungen // J. Reine Angew. Math. – 1901. – Bd. 124. – P. 1–27.
165. Farkas J. Uber die Theorie der einfachen Ungleichungen, J.Reine und angew. Math. 124, №1 (1902), P. 1–24.

166. Ferguson, A. R., Dantzig, G. B. The allocation of aircraft to routes – An example of linear programming under uncertain demand // Management Science 3 (1956), P. 45–73.
167. Ferguson, A. R. , Dantzig, G. B. The problem of routing aircraft // Aeronautical Engineering Review 14 (1956), P. 51–55.
168. Fichtenholz, G., Kantorovitch, L. Sur les operations lineaires dans l'espace des fonctions bornees // Studia Math., 1935, T. 4, S. 69–98.
169. Flood, M.M. On the Hitchcock distribution problem // Pacific journal of mathematics. 1953. Vol.3. P. 369–386.
170. Ford, L. R., Fulkerson, D. R. Constructing maximal dynamic flows from static flows. Operations Research 6, №3 (1958), P. 419–433.
171. Ford, L.R., Jr, Fulkerson, D.R. Flows in Networks. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.
172. Ford, L.R., Fulkerson, D.R. Maximal Flow through a Network. Research Memorandum RM-1400, The RAND Corporation, Santa Monica, California, [19 November] 1954 [published in Canadian Journal of Mathematics 8, №3, 399–404], 1956.
173. Fourier, J. Memoire sur la statique // Jiurnal de l'Ecole Polytechnique 5 (1798), in [Fourier J. Oeuvres, Gauthier-Villars, Paris, 1888.] vol. 2, P. 478–520.
174. Fourier, J. Oeuvres, Gauthier-Villars, Paris, 1888. II., P. 325–328.
175. Fourier, J. B. J. Solution d'une question particuliere du calcul des inegalites,// Nouveau Bulletin des Sciences par la Societe Philomatique de Paris. 1826, P. 99–100. [Reprinted in G. Darboux (Ed.). Oeuvres de Fourier, Tome II, Gauthier.
176. Fourier J.B.J. Solution d'une question particuliere du calcul des inegalites. 1826 (см. также ["Histoire d l'Academie", 1823, 1824, Oeuvres II, P. 317–328.]

177. Fritz J. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. // Courant Anniversary Vol. (Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948). Interscience Publishers, Inc., N. Y., 1948, pp. 187–204.

178. Fulkerson, D.R. An out-of-kilter method for minimal-cost flow problems, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 9 (1961), P. 18–27.
179. Gale, D. Linear Programming and the Simplex Method // Notices Of the American Mathematical Society. Volume 54, Number 3. March 2007. – P. 364–369. ISSN 0002-9920.
180. Gale D., Kuhn H.W., Tucker A.W. Linear programming and the theory of games // [103], P. 317–329. (в предварительном варианте A.W.Tucker представил ее на собрании Econometric Society at Boulder, Colorado, 02 сентября 1949 г.)
181. Gass, S. I. Linear Programming, McGraw-Hill, New York, 1958.
182. Gass, S. I., Garille, S. G. Stigler's diet problem revisited // Operations Research 41 (2001), P. 1–13.
183. Goldowsky, G. Sur les suites des functions continues // Fund. Math., 1928, T. 11, S. 275–276.
184. Goldstine, H. H. Review of [30] // Math. Rev. 2. 1941. P. 222. (Also in [Y.Sinai (Ed.) Russian Mathematicians of the 20th Century. World Scientific, Singapore, 2003]) [MF 3604]
185. Grattan-Guinness I. Joseph Fourier’s anticipation of linear programming. Operational Research Quarterly, 21 (1976), P. 361–364.
186. Haar, A. Uber leneare Ungleichchungen // Acta lit. Ac. Sci., V. 2 fasc. 1, #31, sec. Sci. Math. 1.2. 1922–1926. 1924, P. 1–14.
187. Hancock H. Theory of Maxima and Minima. Ginn and company, New York, 1917. (reprinted: Dover, New York, 1960)
188. Harris T.E., Ross F.S. Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities. Research Memorandum RM-1573. The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955.
189. Hitchcock, F. L. The distribution of a product from several sources to numerous localities // Journal of Mathematics and Physics. Mass. Inst. Tech. 20. 1941, P. 224–230.

190. Interior point method. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Interior_point_method (дата обращения: 10.03.2017).
191. Kantorovich, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production // Management Science 6. 1960. P. 366–422. (Translation of [24]).
192. Kantorovich, L.V. My journey in science. / L. J. Leifman (Ed.). Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics, Oxford University Press, New York, 1990.
193. Kantorovitch, L. Sur les ensembles projectifs de la deuxieme classe // Comptes rendus herdomadaires des séanses de l'Académie des sciences de Paris. 1929. T.189. №27. P.1233–1235.
194. Kantorovitch, L. Sur les suites des fonctions presque partout continues // Fundamenta mathematica. 1930. Vol.16. P.25–28.
195. Kantorovitch, L. Sur les suites des fonctions rentrat dans la classification de M. W. H. Young // Fundamenta Mathematicae, 1929, T. XIII, S. 178–185.
196. Kantorovitch, L. The method of successive approximations for functional equations // Acta mathematica (Uppsala), 1939, V. 71, P. 63–97.
197. Kantorovitch, L. Un exemple d'une fonction semicontinue universelle pour les fonction continues // Fundamenta mathematica. 1932. Vol.18. P.178-181.
198. Karmarkar's algorithm. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Karmarkar%27s_algorithm (дата обращения: 10.03.2017).
199. Karmarkar, N. K. A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica, 1984, N4, P. 373–395. MR0779900 (86i:90072).
200. Karp, R. M. Reducibility Among Combinatorial Problems / R. E. Miller, J. W. Thatcher (eds.) Complexity of Computer Computations. (1972) New York: Plenum. pp. 85–103. ISBN 0-306-30707-3.
201. Karush, W. Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints. / M.Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, University of Chicago, Chicago, Illinois, 1939.

202. Kempner, A. J. Review of [189] // Math. Rev. 3 (1942), P. 11–12. [MF 5066]
203. Khachiyan, L. G. Convexity and complexity in polynomial programming, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warsaw, PWN, Warsaw, (1984), pp. 1569–1577.
204. Klee V., Minty G.J. How good is the simplex algorithm? // (Shisha Oved, ed.) Inequalities III (Proceedings of the Third Symposium on Inequalities held at the University of California, Los Angeles, Calif., September 1–9, 1969, dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin). — New York-London: Academic Press, 1972. – P. 159–175.
205. Koopmans, T. C. Exchange ratios between cargoes on various routes, memorandum dated 1942, in Scientific Papers of Tjalling C. Koopmans, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
206. Koopmans, T. C. Optimum utilization of the transportation system // The Econometric Society Meeting (Washington, D.C., September 6–18, 1947; D.H. Leavens, ed.) [Proceedings of the International Statistical Conferences — Volume V], 1948, pp. 136–146 [reprinted in: Econometrica 17 (Supplement) (1949) 136–146] [reprinted in: Scientific Papers of Tjalling C.Koopmans, Springer, Berlin, 1970, pp. 184–193].
207. Koopmans, T. C. Tjalling C. Koopmans – Autobiography. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nobelprize.org/economics (дата обращения: 10.03.2017).
208. Koopmans, Tj. C., Reiter, S. A model of transportation / [103], pp. 222–259.
209. Kuhn, H.W. On a Theorem by Wald // Linear Inequalities and Related Systems / H.W. Kuhn. A.W. Tucker, editors. -, Princeton: Princeton University Press. 1956.
210. Kuhn, H. W., Tucker, A. W. Non-linear Programming // Neyman J. (ed.) Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles (Univ. of California Press, 1951), P. 481–492.
211. Lagrange, J. L. Mecanique Analytique I–II. Paris, 1788.

212. Laplace P.-S. Traite de Mecanique Celeste. A Paris, Chez J.B.M.Dupart, Libraire pour les Mathematiques, quai des Augustins, An VII. 1799, Livre III, №39. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.archive.org/details/traitdemcani01lapl (дата обращения: 10.03.2017).
213. Lawler, E. L. The great mathematical Sputnik of 1979, The Sciences, 1980, pp. 12–15.
214. Legendre A. M. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.Paris: Firmin Didot, 1805.
215. Leontief, W. The Structure of the American Economy. 1919–1939, Oxford University Press, New York, 1941.
216. Markowitz, H.M. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints, Naval Res. Logist. Quart. 3, №2 (1956), P. 111–113.
217. Mathematics Genealogy Project. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.genealogy.ams.org/ (дата обращения: 10.03.2017).
218. Monge, G. Memoire sur la theorie des Deblais et des remblais // hestoire de l’Academie Royale des Science. 1781. P. 666–704.
219. Motzkin, T. Beitrage zur Theorie der linearen Ungleichungen, (Inaugural dissertation, Basel), Azriel, Jerusalem, 1936. [English translation by D. R. Fulkerson in [116].
220. Murray, W. Tributes to George Dantzig and Leonid Khachiyan. George Dantzig: A Personal Perspective // SIAG/OPT Views-and-News. A Forum for the SIAM Activity Group on Optimization. Vol. 16, N 1–2 October 2005.
221. NEOS Server: State-of-the-Art Solvers for Numerical Optimization. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://neos-server.org/neos/ (дата обращения: 10.03.2017).
222. Nemirovsy, A., Nesterov, Yu. Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex programming. SIAM Studies in Applied Math., 1994.

223. Neumann, J. von. Discussion of a maximum problem, working paper dated November 15–16, 1947. / reproduced in A. H. Taub (Ed.), John von Neumann: // Collected Works, Vol. VI, Pergamon Press, Oxford, 1963, pp. 89–95.
224. Neumann, J von. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. // Ergebnisse eines Mathematischen. Kolloquiums Vienna / ed. by Karl Menger), vol. 8, 1937, S. 73–83. / (фон Нейман. Англ. перевод: J. V. Neumann. A Model of General Economic Equilibrium, // The Review of Economic Studies, Vol. 13, No. 1. - 1945–1946, pp. 1–9.
225. Neumann, J. von. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // Math. Annalen. 100 (1928), P. 295–320.
226. Neumann, J. von, Morgenstern, O. Theory of Games and Economic Behavior, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1944.
227. Newman, D. J. Location of maximum on unimodal surfaces.Journ.of the Assoc.for Computing Machinery 12, 1965, pp. 395–398.
228. Newman, P. Some calculations on least-cost diets using the simplex-method, Bulletin, Oxford Univ. Institute of Statistics, Oxford, England 17, 1955, P. 303–320.
229. Neyman, J., Pearson, E. S. Contributions to the theory of testing statistical hypothesis. Statist. Res. Mem., Parts I-II, 1936, 1938.
230. Poussin, M. Ch. J. de Vallee. Sur la methode de l'approximation minimum, Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles 35. 1911, P. 1–16.
231. Prekopa, A. On the development of Optimization Theory // The Amer. Math. Monthly. – 1980. – V. 87. – №7. – P. 527–542.
232. Proceedings: Symposium on Linear Inequalities and Programming / A. Orden, L. Goldstein (Eds.), Headquarters, USAF. Washington, D.C., 1952.
233. Proceedings of the First International Conference on Operational Research, Operations Research Society of America / M. Davies, R. T. Eddison and T. Page (Eds.). Baltimore, 1957.
234. Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming / H. A. Antosiewicz (Ed.), - National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1955.

235. Schlesinger, K. Ueber die Produktionsgleichungen der okonomischen Wertlehre. // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 6 / translated by W. J. Baumol in W. J. Baumol and S. M. Goldfeld (eds.) 1935 - Precursors in Mathematical Economics: An Anthology, London, London School of Economics and Political Science, 1968, p. 278–280. - On the Production Equations of Economic Value Theory. / in Menger, editor, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, p. 1933–34. / Translated and reprinted in Baumol and Goldfeld, 1968.
236. Schrijver, A. On the history of the transportation and maximum flow problems // Math. Program., Ser. B 91: 437–445 (2002).
237. Schrijver, A. Theory of Linear and Integer Programming. John Wiley & sons, 1998, ISBN 0-471-98232-6 (mathematical).
238. Shiffman, M. Review of [41] (Also in [Y.Sinai (Ed.), Russian Mathematicians of the 20th Century, World Scientific, Singapore, 2003]) // Math. Rev. 5. 1944.
239. Slutsky, E. E. Sulla teoria sel bilancio del consumatore // Giornale degli economisti e ri vista di statistica. 1915. Vol.51. №1. P.1–2.
240. Smale, S. Mathematical problems for the next century // The Mathematical Intelligencer 20:2 (1998), P. 7–15.
241. Smale, S. On the average number of steps of the simplex method of linear programming // Mathematical Programming 27 (1983), P. 241–262.
242. Stepanoff, W. Sur les suites des functions continues // Fund. Math., 1928, T. 11, S. 264–272.
243. Stigler, G. J. The cost of subsistence // J. Farm Economics 27 (1945), P. 303–314.
244. Tarasov, S. P., Khachiyan, L. G., Erlikh, I. I. The method of inscribed ellipsoids, Soviet Mathematics Doklady, 37 (1988), pp. 226–230.
245. The Vehicle Routing Problem // P. Toth, D. Vigo (Eds.) SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Philadelphia, PA, 2002, P. xvii.
246. Tikhomirov, V.M. The Evolution of Methods of Convex Optimization / Ed. by Abe Shenitzer // Mathematics, York University, North York, Ontario M3J 1P3, Canada.

247. *M.Todd*. Leonid Khachiyan, 1952–2005: An Appreciation. In "Tributes to George Dantzig and Leonid Khachiyan" // SIAG/OPT Views-and-News. V.16 NN.1–2 October 2005, pp.4–6.
248. Tucker, A. W, Nering, E. D. Linear Programs and Related Problems. Academic Press, Boston. 1993.
249. Wald, A. On Some Systems of Equations of Mathematical Economics // Zeitschrift fur National konomie, Vol.7. / Translated, 1951, Econometrica, Vol.19 (4), P. 368–403.
250. Wald, A. On the Production Equations of Economic Value Theory (Part 2) / in Menger, editor, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 1934–35. As translated and reprinted in Baumol and Goldfeld, 1968.
251.Wald, A. On the Unique Non-Negative Solvability of the New Production Functions (Part I) / in Menger, editor, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 1934–35. As translated and reprinted in Baumol and Goldfeld, 1968.
252. Walras, L. (1874) Elements of Pure Economics: Or the theory of social wealth. 1954. / translation of 1926 edition, Homewood, Ill.: Richard Irwin.
253. Weyl, H. Elementare Theorie der konvexen Polyeder. Commentarii math. Helvetici, 7:290–306, 1935.
254. Yamnitsky B. An old linear programming problem runs in polynomial time / B. Yamnitsky, L. A. Levin // 23rd Annual Symposium of Foundations of Computer Science, 3-5 November 1982, Chicago, Illinois, USA. – IEEE, New York, 1982. – P. 327–328.
255. Zeuthen, F. Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination, und okonomische Qualitat. / Zeitschrift ftir Nationalokonomie, 4, 1932–1933, 1–24. - Public Price Policy, 1933, / Economic Essays in Honour of Gustav Cassel / Theoretical Remarks on Price Policy: Hotellings' Case with Variations, 1933, QJE.

Приложение 1. Некоторые математические сведения.

Определение 1.1. Вещественное векторное пространство $\boldsymbol{X}$ называется векторной решёткой (ВР), если $\boldsymbol{X}$ является одновременно решёткой, т.е. упорядоченным множеством, в котором для любых двух элементов $x, y \in X$ существует их супремум $x \vee y$ и инфимум $x \wedge y$, причём выполнены следующие условия согласованности алгебраических операций и порядка:

1) для любого $z \in X$ из $x \le y$ вытекает $x + z \le y + z$;
2) если $x \ge 0$ и число $\lambda \ge 0$, то $\lambda \cdot x \ge 0$.

Определение 1.2. Множество $X_+ := \{x \in X : \ x \ge 0\}$ называется конусом положительных элементов ВР $\boldsymbol{X}$.

Определение 1.3. K_σ-пространством (или σ–полной ВР) называется ВР $\boldsymbol{X}$, в которой всякое счётное ограниченное сверху множество имеет супремум. K-пространством (или полной ВР) называется ВР $\boldsymbol{X}$, в которой всякое ограниченное сверху множество имеет супремум.

Определение 1.4. Норма $\| \cdot \|$ на ВР $\boldsymbol{X}$ называется монотонной, если из $\lfloor x \rfloor \le |y|$ следует, что $\|x\| \le \|y\|$.

Определение 1.5. Нормированной решёткой (НР) называется ВР, снабжённая монотонной нормой.

Полная по норме НР называется банаховой решёткой (БР).

Если НР (соответственно БР) $\boldsymbol{X}$ является K-пространством, то говорят, что $\boldsymbol{X}$ – нормированное K-пространство (соответственно банахово K-пространство).

Теорема 2.1. (Аналитическая форма теоремы Хана - Банаха).

Пусть в вещественном векторном пространстве $\boldsymbol{X}$ задана калибровочная функция *p*. Пусть f_0 – линейный функционал, заданный на линейном множестве $X_0 \subset X$, такой, что: $f(x) \le p(x), \quad x \in X_0$. Тогда существует линейный функционал *f*, определённый на всём $\boldsymbol{X}$, совпадающий с f_0 на X_0 и удовлетворяющий на всём $\boldsymbol{X}$ условию: $f(x) \le p(x), \quad x \in X$.

Определение 2.1. Пусть ***X*** – векторное и одновременно топологическое пространство. Множество ***X*** называется топологическим векторным пространством (ТВП), если алгебраические операции непрерывны в топологии ***X***, то есть:

1) Для любых $x, y \in X$ и окрестности V_{x+y} элемента $(x+y)$ существуют окрестности V_x элемента x и окрестность V_y элемента y, такие что: $V_x + V_y \subset V_{x+y}$.

2) Для любого $x \in X$, любого числа $\lambda \in R$ и любой окрестности $V_{\lambda \cdot x}$ элемента $(\lambda \cdot x)$ существует окрестность V_x элемента ***x*** и число $0 < \delta \in R$ такие, что для любого μ, для которого справедливо $|\mu - \lambda| < \delta$, будет верно: $\mu \cdot V_x \subset V_{\lambda \cdot x}$.

Теорема 2.2. (Геометрическая форма теоремы Хана - Банаха). Пусть ***X*** – ТВП, ***E*** – линейное подмножество в ***X***, а $x_0 \in X$. Если ***U*** – непустое выпуклое открытое подмножество ***X***, не пересекающееся с $(x_0 + E)$, то в ***X*** существует замкнутая гиперплоскость ***H***, содержащая $(x_0 + E)$ и не пересекающаяся с ***U***.

Теорема 2.3. (Об отделимости). Пусть ***E*** – выпуклое подмножество с непустой внутренностью $\hat{E}$ в ЛВП ***X***, F – непустое выпуклое подмножество ***X***, $\hat{E} \cap F = \varnothing$. Тогда ***E*** и ***F*** отделимы. Если ***E*** и ***F*** открыты, то они строго отделимы.

Теорема 2.4. (Об отделимости). Пусть ***E*** и ***F*** – непустые выпуклые непересекающиеся подмножества ЛВП ***X***, причём ***E*** – замкнуто, а ***F*** – компактно. Тогда ***E*** и ***F*** - строго отделимы.

Теорема 2.5. (О достижении минимума выпуклом функционалом на выпуклом множестве, замкнутом относительно сходимости по мере). Выпуклый функционал ***p***, полунепрерывный снизу относительно сходимости по мере, достигает минимума на всяком замкнутом в $(L^1, \tau(L^1))$, ограниченном по норме выпуклом множестве $V \subset L^1$.

Определение 3.1. Линейные пространства X, Y называются пространствами в двойственности, если существует билинейная форма $\langle x, y \rangle$ со свойствами: 1) $x \in X, \forall y \in Y : \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x = 0;$

2) $y \in Y, \forall x \in X : \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow y = 0.$

Определение 3.2. Пусть $X, Y -$ пространства в двойственности, тогда <u>преобразованием Лежандра–Юнга–Фенхеля</u> функции $f : X \to R \cup \{\infty\}$ называется функция $f^*(y) := \sup\limits_{x \in X} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}, \quad где\ y \in Y.$

Замечание. Если f – собственная функция, то есть $\exists \tilde{x} : f(\tilde{x}) \neq +\infty \overset{то}{\Rightarrow} f^*(y) \geq (\langle \tilde{x}, y \rangle - f(\tilde{x})) > -\infty.$ Если f^* не тождественно равна $+\infty$, то f^* – собственная функция.

Принцип Лагранжа. (Для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств). X, Y -банаховы пространства, $\tilde{x} \in U = \operatorname{int} U \subset X$

$f_i : U \to R, \quad для\ i = 1,...m$; f_i дифференцируемы по Гато, для $i = 1,..., m$.

$(f_i)'_G$ – непрерывна в $\tilde{x}$, $f_i'(\tilde{x}) := x_i^*$.

$E := \{x \in U : f_i(x) \leq 0\}, \quad для\ i = 1,..., m$.

$\left.\begin{matrix} f_0 : E \to R \\ F : E \to Y \end{matrix}\right\}$ – непрерывные на E и непрерывно дифференцируемые по Гато на $\operatorname{int} E$,

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to \tilde{x} \\ x \in \operatorname{int} E}} (f_0)'_G(x) =: x_0^* \in X^*$.

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to \tilde{x} \\ x \in \operatorname{int} E}} F'_G(x) =: \Lambda -$ линейный оператор из X в Y, Λ(X) – замкнуто.

Задача: $\begin{cases} F(x) = 0 \\ f_i(x) \leq 0, \quad для\ i = 1,..., m \\ f_0(x) \to \min \end{cases}$ **(*)**

Пусть $\tilde{x}$ - локальный минимум в (*).

Тогда $\exists \begin{cases} \vec{\lambda} = (\lambda_0,..., \lambda_m), \lambda_i \in R \\ y^* \in Y^* \\ (\vec{\lambda}, y^*) \neq 0 \end{cases}$, такие что выполнены:

a) $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0$;

b) условие не отрицательности: $\lambda_i \geq 0, \quad для\ i = 0,..., m$;

c) условие дополняющее не жёсткость: $\lambda_i f_i(\tilde{x}) = 0, \quad для\ i = 1,..., m$.

Если к тому же f_0, F определены на U, то для $L(x, \vec{\lambda}) := \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \left\langle y^*, F(x) \right\rangle$ верно условие стационарности: $L'_x(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f'_i(\tilde{x}) + \left(F'(\tilde{x})\right)^* y^* = 0.$

Приложение 2. Интервью, взятое А. Л. Андриановым у академика А. Г. Аганбегяна.

Интервью было взято 17 марта 2015 г.

Абел Гёзевич Аганбегян – советский и российский учёный-экономист, доктор экономических наук, академик АН СССР, ректор Академии народного хозяйства при Правительстве РФ. Почётный член Венгерской АН, иностранный член Болгарской АН, член-корреспондент Британской академии, почётный профессор Санкт-Петербургского университета управления и экономики. Награждён медалью им. Леонтьева (2004). Закончил заочно московский механика-математический факультет, переехал в Сибирь в Новосибирск.

А. Л. Андрианов: «Был ли обмен информацией (между западными учеными и учеными в СССР) или на Западе делали совсем независимо, не зная о Канторовиче?»

А. Г. Аганбегян: На Западе делали совершенно независимо, ничего не подозревая. Я был заместитель директора ЯССА (международный институт системного анализа под Веной), поэтому имел полномочия и очень много сделал, чтобы Леонид Витальевич туда ездил и общался, продвигал свои идеи: туда приезжали разные ученые, в том числе Данциг, где я с ним познакомился и хорошо узнал: очень честный, хороший, добропорядочный человек. Я познакомил Данцига с Канторовичем. Данциг совершенно самостоятельно написал свою книгу, ничего не зная о Канторовиче, а потом, когда он эту книгу написал и писал предисловие уже на заключительной стадии подготовки книги, кто-то ему сказал: посмотри, какие-то близкие работы есть в Санкт-Петербурге, и тогда он познакомился с работами Канторовича. У Канторовича была брошюра, если помните в Санкт-Петербурге, до его основной книги. Вот он познакомился с этой брошюрой 1939 года, «Организация производства…» (пояснение А. Л. Андрианова: [Канторович Л. В. Проф., Математические методы организации и планирования производства. Издание Ленинградского Государственного Университета, Ленинград, 1939]). С докладом в своем предисловии, если Вы читали Данцига, он, как честный человек

– что очень бывает редко – полностью признал приоритет Канторовича: прямо написал, что «Я это делал самостоятельно, но потом вот мне сказали, я познакомился и убедился, что это всё было: основная знаменитая теорема двойственности была доказана Канторовичем в 1939». Причем американцы шли совершенно другим путем. Чем гении отличаются от не гениев. Ведь общая ЗЛП – это какая-то вершина, а можно придумать методы гораздо более простые: для транспортной задачи (самая простая – это транспортная задача). За ней идет задача загрузки – довольно легкая. Потом – задача диеты или раскроя. Потом задача специализации. И только потом – более общая, когда вообще всё можно делать. Транспортная задача, Загрузка, Диета, Раскрой, Специализации, Общая задача линейного программирования (ОЗЛП) - так идет естественное развитие, и таким путем прошли на Западе. Так вот Канторович взял и для частного случая сразу решил общую задачу и доказал теорему двойственности – в этом одно из проявлений его гениальности. Американцы к этому шли с 1944–45.

История этого вопроса в Америке. В Америке в войну зародилось движение, которое стало называться системный анализ (тогда называлось исследование операций). История ИО такова. Накануне открытия второго фронта американский флот был задействован в перевозке груза в Англию, а в Атлантическом океане преобладали немецкие подводные лодки, и они топили эти суда. Часть груза и американские суда пропадали. Американцы пытались придумать методы, чтобы минимизировать потери. Они пускали суда под усиленной охраной, но тогда немцы просто стягивали много подводных лодок и становилось еще хуже. Или одинокие суда пускали вокруг по непроторенным дорогам, чтобы их не могли поймать. Разные способы, но результат был плачевный: они теряли много грузов. Тогда, якобы, разгневанный президент (это миф: так это было или не так – сейчас не выяснишь) сказал: «Раз вы, военные, не можете что-нибудь придумать – пригласите ученых, создайте группу: всё-таки у них совсем другой ум, они подойдут аналитически и что-нибудь предложат». И была создана первая группа ИО во главе с Морзом и Кимпбэллом. Один – знаменитый физик, один – химик.

Есть их книга, Морза и Кимпбэлла «Исследование операций» (пояснение А. Л. Андрианова: [Морз Ф. М., Кимбелл Дж. Е. Методы исследования операций / Пер. с англ. И. А. Полетаева и К. Н. Трофимова под ред. А. Ф. Горохова. – М.: Советское радио, 1956. – 308 с.] – перевод [Morse, P. M., Kimball G. E. Methods of Operations Research. – Cambridge, MA: Technology Press of MIT / New York: John Wiley & Sons, 1951. – 158 p.]) – библиографическая редкость, наверное (издана в послевоенный период), где описано следующее. Как всякие ученые, раз ставится задача, они попытались сформулировать сначала ее, понять, что хочется. Однако, как правило, люди, которые формулируют задачу, не знают точно, количественно, что хотят (так было и в этой ситуации: политики и военные сами не знали количественно, чего хотят, так что пришлось формулировать задачу поэтапно в режиме диалога).

Военные говорят: «Мы хотим, чтобы наши суда не топили», а им отвечают: «Это – невозможно».

«Ну мы хотим, чтобы их меньше топили» – «Пожалуйста, надо меньше посылать груза – меньше будут топить» – «Нет, мы хотим, чтобы процент потопления был меньше» – то есть потихоньку... – «А если вот там уничтожить подводную лодку, то она эквивалентна какому количеству груза?» – А никто, естественно, на эту тему не думал. В общем, сформулировали целевую функцию определенным образом. Понятно, что она достаточно сложная, потому что можно и потопить и так далее. В своей книге они приводят эту функцию, естественно.

Второй этап – это подбор данных. Они стали искать. Выясняется, военные никакими данными не располагают: никто систему данных не собирал. Они интуитивно знают, как это бывает: если судно одно идет транспортное, – лодка всплывает и пушкой уничтожает: лодка экономит торпеды. Лодка может иметь, скажем, 8 торпед – и всё. И, если несколько торпед в цель не попадет, она остается без торпед – безоружна – должна из Атлантики возвращаться в Германию за новыми, а значит она надолго выбывает из боевых действий, и потенциал резко сокращается. Поэтому лодка торпеды бережет для военных судов, когда она не может всплыть. Грубо говоря, обычно, если судно вооружено, лодка сначала пускает торпеду. Судно начинает гореть, а потом она пытается добить его из пушки. Если судно не вооружено, она уничтожает его не торпедой, а пушкой. Морз и Кимпбелл задавали всякие глупые, с точки зрения военных, вопросы: «А как часто вы замечали перископ лодки до того, как она начинала атаку?» – «Чёрт, да кто это считал?! Как часто? Понимаешь… Кого это интересует?!» – Но они в общем провели очень серьезно работу, опросы всякие, и в общем какие-то данные для себя установили. Разработали модель, посчитали и предложили свой метод. Очень грубо, смысл метода – надо торговые суда оснастить обычной пушкой, такой же, как имеет подлодка, даже помощнее. Затем в районах опасных, где действуют подводки, иметь несколько наблюдателей, которые следят за морем, и заметят перископ. Пытаться. И если замечен перископ – начать по нему стрелять из пушки. Ну военные, естественно рассмеялись – это смех и грех: ну как это стрелять по перископу – толку, конечно, не будет: не попадешь и, конечно, подводку так нельзя уничтожить. Но они и не хотели ее уничтожать: задача ведь не уничтожение лодок, а провоз груза! Видя, что это судно вооружено – оно внешне торговое, а на самом деле у него орудия, – подводка не может всплыть, не может приблизиться и начинает нервничать, потому что по перископу ведется прицельный огонь. И она пускает торпеду. Торпеды были тихоходные, а расстояние большое – так как подлодка не подходит и пускает торпеду издалека. Поэтому судно может уклониться (с достаточно большой вероятностью), тем более раз оно наблюдает, – видно же. Есть шансы и не всякая торпеда достигает цели – есть вероятность, с которой она попадает, с какого расстояния. Это всё просчитывается. И мощь этих подводных лодок в разы сокращается. И они стали провозить намного больше груза.

По опыту этой первой группы ИО такие же стали появляться при всяких армиях: приглашали ученых, и те стали решать разные задачи – в том числе, современным языком – задачу по логистике. Вот транспортная задача им попалась, и они нашли метод решения транспортной задачи. Где-то в 40-ых годах еще. Купманс вообще к делу отношения не имел – он был организатором конференций

– он сам ЛП не занимался серьезно. Он – специалист по странной области (по той же, что и Макаров Валерий Леонидович – любимый ученик ЛВК, директор ЦЭМИ, д.ф.-м.н., окончил МГЭИ - Московский Государственный Экономический Институт, член президиума АН) – упрощенные модели экономики, где нет потребления – саморазвитие: прирост и появившиеся средства вкладываешь опять в развитие. Если цикл бесконечно повторять, получаются золотые траектории: все время выходишь на какие-то траектории, которые асимптотически к чему-то приближаются. Анализируются эти траектории упрощенных моделей – одно-продуктовых: там нет никаких продуктов выбывающих (что резко усложняет: если потребление в этом году одно, в другом – другое). Так развиваешься только за счет накоплений, причем это накопление в разные годы дает разный эффект – это зависит от того, что ты строишь: одно дело – строишь дороги, другое дело – вкладываешь в оборудование предприятия.

Вообще, ЛП исторически в экономике предшествует межотраслевой баланс – первый такой прорыв в применении математики в экономике не эконометрический. Эконометрика – использование математической статистики – всегда было исторически, а другие математические методы не использовались в экономике – моделей не было таких, кроме простых статистических (типа корреляции). А тут прорыв сделал Василий Васильевич Леонтьев (выходец из СССР), опубликовавший книгу «Структура Американской экономики» (пояснение А. Л. Андрианова: [Leontief W. W. The Structure of American Economy, 1919–1929, Cambridge, Harvard University Press, 1941.]), где он впервые применил межотраслевой баланс. Это обратная матрица, и элементы обратной матрицы имеют четкий экономический смысл: если затраты прямые – обычные коэффициенты – с которыми он связан. Скажем электроэнергия идет на производство стали. Сколько электроэнергии идет на тонну стали – это коэффициент прямой. А обратная матрица – коэффициент затрат электроэнергии полный, потому что электроэнергия на производство стали идет не только прямо, но она идет через чугун (на чугун тоже затрачивается электроэнергия, а на сталь –

чугун), электроэнергия затрачивается на добычу железной руды (а железная руда идет на чугун), угля, коксование (а кокс идет, чтобы сделать чугун) и так далее. И затраты электроэнергии на тонну стали, к примеру, утраиваются.

И элементы обратной матрицы обрели экономический смысл. И в ЛП тоже образуются коэффициенты, которые характеризуют полные затраты (или их называют замыкающие затраты, теневые цены… – зависит от содержания задачи). Объективно обусловлены оценки, как Канторович называл, или коэффициенты, разрешающие множители – он по-разному называл. Эти, как обратные коэффициенты (коэффициенты A^{-1}): характеризуют полные затраты. Здесь прослеживается глубокая связь между межотраслевым балансом и ЛП с экономической точки зрения. Американцы постепенно от транспортной задачи перешли к распределительной (знаменитая фанерная задача, которую решал Канторович, – типа распределительной задачи) и нашли ее решение, а Данциг сделал обобщение. На это в США ушло лет восемь. (Канторовичу же удалось сделал это в своей первой работе).

Я считаю его своим учителем. Он не был ни моим научным руководителем никогда – он оппонент был у меня по докторской защите («Системы оптимального моделирования соединения отраслевых и народнохозяйственных моделей»). У меня докторская была связана с построением системы оптимизационных моделей: я пытался соединить отраслевые модели с народно-хозяйственными в систему. Но все-равно все мои работы по оптимизации – они навеяны его работами. Ведь учитель – не тот, который тобой прямо руководит. Если ты фактически развиваешь какие-то стороны его мысли, то твой учитель будет тот, чьи мысли ты развиваешь. Он всегда категорически возражал, когда я говорил, что он – учитель. Он говорил: «Какой учитель? – Мы с тобой партнеры, у нас совместный семинар!». Мы с ним вели в сибирском отделении семинар по оптимизации в моей лаборатории. Я был директор ЛЭМИ (лаборатории экономико-математических исследований) в Институте экономики и организации промышленного производства, когда он приехал – это было с 61-го по 66-ой год, – а он был заведующий математикоэкономическим отделом института математики и заместитель директора Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения АН (Соболева Сергея Львовича) и друг его очень близкий. И у нас был совместный семинар, мы очень тесно связаны были: Макарова я же в академики рекомендовал, и я был оппонент сначала его кандидатской, потом – докторской. И так далее – то есть мы были очень тесно связаны все и до сих пор дружим».

Канторович не просто разработал и доказал теорему двойственности – он осознал ее значимость для экономики. И будучи математиком, абстрактным ученым – он занимался очень абстрактными областями – не прикладными, он не специалист по прикладным в математике вначале был. И он обогатил многие разделы в математике – чем только он не занимался. Но, он сразу осознал значимость и стал подбирать учеников: у него один занимался транспортными задачами, один занимался раскроем. У его учеников есть отдельные книги по раскрою. С М.К. Гавуриным – по транспортной задаче. И много всяких конкретных задач. Он пытался применить математические наработки, их идентифицировать в экономических терминах. Занялся ценообразованием. Всё время что-то придумывал. Макаров ему в этом очень помогал.

ЛП положило начало огромному направлению в математике: вообще оптимальному программированию в широком смысле слова, стохастическому программированию. Принцип максимума Понтрягина и всё это оттуда растет. сделать успел.

А. Л. Андрианов: «А то, что Леонтьев сделал? Например, Данциг, пишет, что его вдохновила сама идея Леонтьева, что можно не качественно, а количественно посчитать и на практике применить, т.е. что это осязаемо.»

А. Г. Аганбегян: Да, Леонтьев очень многих вдохновил, и я занялся применением математики в экономике тоже частично под влиянием Леонтьева, когда я с ним познакомился в первый его приезд в Москву. Ну я раньше начал, я начал с эконометрики, как все. Но потом я занялся межотраслевым балансом, а потом перешел к оптимизации. А занимался оптимизацией только в бюро балансов Белкин Виктор (доктор наук) – один из первых, кто начал заниматься оптимизацией у нас. Я вместе с ним. Потом я занялся размещением сельхоз культур. Методом оптимизации.

А. Л. Андрианов: «Я так понимаю, для решения как раз задачи межотраслевого баланса нужны методы ЛП, чтобы посчитать, потому что всё в терминах линейной алгебры формулируется: сама модель и взаимосвязи секторов?»

А. Г. Аганбегян: Сейчас это всё развилось, сейчас, во-первых, динамические модели появились (у Леонтьева статическая модель). Затем появились модели с финансовым блоком. Они сочетают межотраслевые и эконометрические вещи, потому что многое в финансах не поддается такому однозначному расчету, а носит вероятностный характер: спрос населения и так далее. Поэтому там нужны эконометрические зависимости. Поэтому современные модели экономики – комплексные.

А. Л. Андрианов: «Канторович со своим математическим подходом к экономике встретил очень большое сопротивление со стороны тех экономистов, которые в то время были во главе?»

А. Г. Аганбегян: Да, это сопротивление началось с его первых шагов. Он понял значимость того, что сделал. Первый. Многие люди, которые делают большие открытия, не понимают, насколько это важно. И часто это выясняется потом спустя много лет. И Канторовича никто не понял: он опередил свой век лет на 15–20. Открытия Канторовича не были востребованы тогда совсем. И он опубликовал фактически в докладах Академии этот метод, но никого не заинтересовал. Никто просто не понял даже, о чем идет речь. Понимая важность этого дела, он в конце в 40-ых годах еще написал рукопись книги «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» и не мог ее нигде опубликовать, потому что она посылалась на рецензию экономистам, и она побывала у всех, включая Байбакова (Байбаков, Николай Константинович – пояснение А. Л. Андрианова). И все написали на это отрицательный отзыв. Больше всех отрицательных отзывов написал, и главный противник был экономист Островитянов (Константин Васильевич Островитянов – пояснение А. Л. Андрианова). Я привел Канторовича к Островитянову, я же стал раньше академиком, чем Канторович (я академик уже 40 лет, а членкором – 50; в прошлом году это исполнилось, старше меня в академии только один человек сейчас, я с 64-го года членкор). Я не сторонник, чтобы люди ссорились – хотел, ну просто как-то…, ну мало ли кто что против кого писал? Канторович ему подарил книжку, которую он писал, а Островитянов написал на своей брошюре – он издал брошюру какую-то по полит-экономике Канторовичу, в фамилии Канторовича он сделал две ошибки! Не специально – нет, он просто не знал его фамилии. Уровень. Причем против Канторовича выступали очень умные люди, которые безусловно имели заслуги перед наукой, но Островитинов – он просто старый коммунист (такой догматик марксист выдающийся, старый коммунист, участник революции и так далее; его именем вот тут улица названа). Скажем, был Боярский Арон Яковлевич – великий демограф, прекрасный статистик экстра-класса, человек с математическим мышлением. Ничего не понял. И он выступил главным оппонентом Канторовичу, пытаясь доказать, что всё это бред какой-то и неизвестно что. Ну большинство людей, которые выступали, они просто малограмотные в этой области вообще. Такой Всеславский был – какой-то проходимец в экономике. Разные. Гатовский – директор института экономики – Лев Маркович, членкор. И он хотел стать академиком. Несмотря на то что я голосовал против и выступал даже против (уже я был академиком), отделение экономики его провело в академики, а на общем собрании выступил академик Александров Александр Данилович – математик, был ректор Ленинградского университета – с зажатым в кулаке журналом «Коммунист», где Гатовский опубликовал статью против применения математики в экономике, называя это попыткой империалистические идеи экономически привнести и разрушить марксизм через формулы – вот он так Канторовича подавал! Можно найти эту статью в «Коммунисте». И Александров вышел на трибуны и сказал: «Разрешите, я зачту несколько цитат из недавно опубликованной статьи кандидата в академики Гатовского». И начал читать. Под улюлюканье зала, потому что там такое написано, ну как «кибернетика…» там понятно «…шлюха империализма» вот всё такого вот класса. А Гатовского поддерживал Келдыш, потому что Гатовский – очень активный организованный человек и много от имени академии писал записок, которые ценились в правительстве. Ну, то есть ценный состав в виде института экономики. Келдыш к нему проникся каким-то доверием и уважением. И он ужасно возмутился после выступления Александрова, вскочил и говорит: «Александр Данилович, ну как так можно?! Ну мало ли кто что в своей жизни писал? Разве можно вот вырвать цитату и на этом основании человека не выбрать?!» – тот обернулся, сходя с трибуны, и сказал: «Мстислав Всеволодович, а Вы такое писала?» – тот говорит: «Конечно нет!» – «И я не писал!» И его провалили. И он не был избран в академики. Вот это – последний критик, а вообще были статьи, ужасные статьи в «Известиях» безобразнейшие. И так далее.

А. Л. Андрианов: «Математики как раз в большинстве своем (Колмогоров, Александров, Соболев) поддержали Канторовича и защищали его».

А. Г. Аганбегян: Нет, ну математики, конечно, несмело поддерживали его, но книгу его не издавали, потому что экономисты были против. И не одно издательство не брало же без рецензии. А академиком-секретарем тогда стал Немчинов Василий Сергеевич (*в то время – член Президиума АН СССР с 1953 по 1962 г.; акад.-секретарь Отделения экономических, философских и правовых наук АН СССР с 1953 по 1959 г.; председатель СОПС (Совет по изучению производительных сил) АН СССР; в 1957 году организовал первую в СССР Лабораторию по применению статистических и математических методов в экономических исследованиях и планировании в Сибирском отделении АН СССР,* *которую потом перенесли в столицу – пояснение А.Л. Андрианова*). Который математический статистик. Специализировался на сельском хозяйстве. Он возглавлял ВАСХНИЛ – академию сельскохозяйственную. Там был Лысенко. На августовской сессии ВАСХНИЛ 1948 года выступил против Лысенко в защиту генетики. И Лысенко его «разоблачал» на знаменитом 48-го года (31 июля – 7 августа 1948 г. – пояснение А. Л. Андрианова) сборище, где Лысенко победил (*а днем позже его убрали с поста директора Тимирязевской академии, а через полгода с кафедры статистики академии, а также секретариат ЦК вывел Немчинова из состава Комитета по Сталинским премиям в области науки. Много лет спустя Немчинов подписал «Письмо трехсот» — письмо большой группы советских ученых, направленное 11 октября 1955 г. в Президиум ЦК КПСС; письмо содержало оценку состояния биологии в СССР к середине 1950-х гг., критику научных взглядов и практической деятельности Т. Д. Лысенко, являвшегося в то время одним из руководителей биологической науки в стране; письмо, в конечном счёте, явилось причиной отставки Лысенко с поста президента ВАСХНИЛ и некоторых его приверженцев и ставленников с других руководящих постов в системе Академии наук СССР – [https://ru.wikipedia.org/wiki/Письмо_трёхсот], [https://ru.wikipedia.org/wiki/Немчинов,_Василий_Сергеевич] – пояснение А. Л. Андрианова*)

В общем, Немчинова смешали с грязью, лишили работы, выгнали с его поста и так далее. Но Немчинов потом стал председателем СОПСа и стал академиком-секретарем. И он Канторовича очень поддерживал и всё время пробивал публикацию его работы ([Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд. АН СССР, М. 1960] – пояснение А. Л. Андрианова). И Несмеянов Александр Николаевич (который нормально относился к Канторовичу и был президентом АН СССР (после смерти президента АН СССР С. И. Вавилова на внеочередной сессии общего собрания Академии Наук 16.02.1951 он был избран её Президентом) поставил Немчинову ультиматум: что, хорошо, пусть работа опубликована, но при одном условии: ты напишешь про нее предисловие, что спорная работа и пережитки там чувствуются буржуазного чего-то – в общем как-то «наведи тень на плетень». Немчинов собрал несколько человек близких к нему, включая меня (я занимался применением математики, примыкал к этому кружку). Немчинов в 1958 году создал первую лабораторию экономико-математическую в России. Институт ему не дали создать, а сначала была лаборатория ЛЭМ, а потом в 1963 году на базе ЛЭМа был создан ЦЭМИ (Центральный экономико-математический институт АН СССР, ныне ЦЭМИ РАН – пояснение А.Л. Андрианова). Причем, председателем комиссии по созданию ЦЭМИ был я. Немчинов отказался и говорит, «давай ты, а я буду твоим замом». Смешно, конечно, было. И мы подобрали Федоренко с ним. Подбирали Федоренко, директора. Ни «А», ни «Б» в математике не понимал, категорически отказывался, но надо было, чтобы туда не попал бы политэконом какой-то, чтобы с самого начала это бы не разрушилось. Он же был экономист, но экономист не связанный с политэкономикой. А Федоринко был химик по образованию. Он закончил институт тонкой химической технологии и был специалист по химизации. Книжку такую он большую выпустил, членкором был выбран, потому что он был заместитель академика-секретаря отделения экономики, которым тогда был Арзуманян. Арзуманян был очень занятый человек и выбрал в членкоры Федоренко с тем, чтобы он на полной ставке у него был бы зам. Тогда же все институты международного профиля были у отделения экономики. И вот Арзуманян был академиком секретарем. И мы с ним договаривались, чтобы он отдал Федоренко, тоже масса трудностей, но нам Келдыш помог. В конце концов Федоренко стал директором. Удачней кандидатуры мы тогда не видели. Немчинов хотел, чтобы я был, но я тогда должен был бросить свой институт в Новосибирске, который я с таким трудом создал. И массу своих близких приятелей туда пригласил. И каждый меня спрашивал: «А не получится так, что ты меня совратил, а сам уедешь?!». Так что я никак не мог и не хотел возвращаться в Москву. Это была своя группа и так далее. И Немчинов написал (к старому изданию) безобразнейшее предисловие в духе «Буржуазные пережитки…» (что, в определенном смысле, бросало тень на него, и он сам это понимал). И он нас собрал и сказал, что «Это единственная возможность опубликовать эту книгу, которая крайне важная. Я понимаю, что будут читать и смеяться надо мной – какой дурак, но что делать?!». Такая жертва была.

И они вместе потом получили Ленинскую премию с Новожиловым. Новожилов Виктор Валентинович был очень близким другом Канторовича и экономически развивал его идеи, но не пытался математически их обобщить. А экономически он написал блестящие совершенно труды и ввел понятия частный минимум и максимум, общий максимум и так далее, совместимость частного с общим, замыкающие затраты – массу понятий. Прекрасно описал. Был исключительно образованным человеком, говорил и по-французски, -немецки и -английски блестяще. В общем это старая интеллигенция была. Он был старше Канторовича. И все попытки Канторовича и меня его избрать в членкоры в академики не увенчались успехом. Несколько раз мы его предлагали, он не добирал голоса. И когда он умер, Канторович произнес на его могиле памятную для меня речь. Он сказал, что Новожилов не был членом академии, но это не принесло никакого ущерба Новожилову – он великий ученый в этом мире – все знают и так считают, а вот академии это нанесло ущерб, что такой человек не был членом. Это он сказал очень правильно.

Канторович подвергался травле. Надо сказать, что он не всегда себя адекватно вел, давал поводов много. Леонид Витальевич – очень своеобразный человек. Он очень неубедительно выступал. На конференции на одной он себя сравнил с Гагановой – была такая ткачиха тогда – неуместно. Она была там дважды герой – ну зачем такому человеку сравнивать себя с Гагановой?! Где Гаганова и где Канторович?! И получил такую дозу критики! Как ты можешь себя сравнивать с героем?! Ну то есть он себя не адекватно вел в смысле давал повод иногда. Но он не был такой боец, который бы как-то себя защищал – он просто не обращал на это все особо внимание. Над ним издевались, как хотели. Он получил Нобелевскую премию тогда, когда ее присудили Солженицыну или Пастернаку – я не помню. И поэтому Нобелевская премия у нас была нарицательная. Хотя его принуждали на Западе дать интервью в защиту (по-моему, это все-таки был еще Пастернак) Пастернака, он уходил (не дал интервью в защиту Пастернаку): это, говорит, не мои вопросы прямые. Он приехал и в Национале устроил банкет небольшой в честь Нобелевской премии. Никто не пришел – ни одно должностное лицо из правительства. Потом был мировой эконометрический конгресс в Риме (1980-70 какой-то в начале), где Канторович должен был делать главный доклад на пленарном заседании. Вообще на пленарном заседании было докладов 6-8. И я в том числе должен был делать. Мы заранее, как это полагается, спросили разрешение, то есть написали в иностранное управление академии, что можем ли мы дать согласие на участие в мировом эконометрическом конгрессе. Мы с ним были почетные члены эконометрического общества. И нас не пустили, ни его, ни меня. А вместо нас взяли делегацию из ЦЭМИ во главе с кандидатом наук и пустили туда. И конгресс их не пустил к себе. Президент эконометрического общества с трибуны прочел доклад Канторовича под бурные аплодисменты, зал встал. А мой доклад прочел вице-президент полностью. Вот какая демонстрация была! И они написали письмо в наше правительство, потому что нас с ним пытались вынудить, чтобы мы написали, что по болезни не едем, а мы отказались. И мы дали им телеграмму, что по не зависящим от нас причинам. Без объяснений. И нас потом клеймили позором. Я ужасно тогда обиделся и сказал, что я больше с иностранцами встречаться не буду. А масса делегаций приезжает в Академгородок. «Где Аганбегян?» – «Нет и всё!» И это переросло просто в скандал. Келдыш мне звонил: «Что ты говоришь? На западе все пишут, что тебя арестовали и так далее… Понимаешь, что так нельзя? Ну, в конце концов». Ну а уж что сделать? Меня 19 лет не пускали заграницу, 13 и 6: с 61-го по 74-ый – 13 лет – и с 78-го по 85-ый. А в промежутке пускали – я работал в Ясе в эти годы, когда я Канторовича познакомил с Данцигом – это был 74-ый – 78-ой.

В общем, работать не девали нормально – Конторовичу всё время мешали. Когда было 60 лет Канторовичу, мы с женой (мы дружили семьями – Наталья Владимировна его жена) пришли к нему. 60 лет, лауреат Нобелевской премии, академик, был накрыт стол – было человек 6: академик Марков с Женой, математик, а вице-президент академии прислал телеграмму «Поздравляю Вас с семидесятилетием!» Канторович ему ответил: «Я Вас приглашаю на Семидесятилетие, но это будет через 10 лет», но не дожил, к сожалению. Просто показываю отношение. Конечно, все ученые в Академгородке понимали, кто такой Канторович. И один случай был публичный, я даже прослезился. В городок приехал Анатолий Петрович Александров, который стал президентом Академии.
И первый раз он приехал в Академгородок, ну ему всё показали и вечером решили одни академики с ним собраться и выпить. Александров хорошо пил. Он водку всегда наливал в фужер, он пил не рюмочками маленькими, а фужерами. Ну не сразу, конечно, фужер пил за тост. Любил он водку. И вот значит выпивали все, с тостами выступали за сибирское отделение, за президиум Академии, за Анатолия Петровича и так далее, и так далее. Разговор такой оживленный, и вдруг кто-то говорит: «Анатолий Петрович, а что мы все произносим тосты, а Вы молчите?» Он говорит: «Ну я слушаю, что вы говорите, но, если вы мне предоставите слово, я скажу. Вы знаете, все мы тут академики, знаменитые ученые, у нас много заслуг, у каждого, но давайте по Гамбургскому счету подойдем. Вот мы здесь сидим. Всё-таки среди нас только один лауреат Нобелевской премии, человек, перед которым я в научном плане приклоняюсь, это Леонид Витальевич» – передаю дословно.

Я всегда Леонида Витальевича считал гением. Надо сказать, мои сотрудники мнение это не разделяли. У нас был совместный семинар, Канторович что ни скажет – не понятно. Сидел в первом ряду и спал – я всегда вел этот семинар совместный. И вот один раз Рубинштейн (его зам, доктор наук, очень четкий такой), Богряновский (у меня был главный математик, который с Келдышем работал, отделение прикладной математики, очень серьёзный математик), и еще один математик (у Канторовича, очень серьезный) придумали новый метод решения сложной оптимизационной задачи и делали доклад на тему «Новые методы решения оптимальных задач». Докладывали, показывали, что этот метод работает, и запутались. То один выходит к доске, то второй – и забыли они, как этот метод продолжать, а Канторович спит, дремлет, хотя всё слышит. Ну в общем они полчаса около доски то стирали, то писали. Не получается ничего. Рубинштейн растолкал Леонида Витальевича: «Ну, Леонид Витальевич, Вы же смотрели, Вы же сказали, что всё правильно!» – он говорит: «Правильно, а что?» – «А вот у нас не получается!» – «С какого места?» – «Вот с такого» – он пришел, стер и всё сразу написал! Он писал мелом, как будто бы ручкой. Он всю жизнь писал мелом. И все тогда, поняли, кто такой Канторович, и кто такие эти люди, которые его труды читали. Столько лет прошло.

А. Л. Андрианов: «Ленинская премия ЛВК с Новожиловым и Немчиновым, то что делал Леонтьев и так далее – всё равно камень краеугольный здесь – ЛП. Потому что, чтобы стало возможно посчитать эти экономические модели, необходим был метод, и вот здесь как раз Канторович сдвинул дело в сторону практического применения».

А. Г. Аганбегян: С экономической точки зрения это – решение грандиозной проблемы оптимизации. Собственно говоря, наука экономика должна ответить на вопрос «что такое хорошо, что такое плохо?» – для того, чтобы ответить на этот вопрос, нужно иметь критерий и так далее. Поэтому он открыл новое направление в экономике – направление оптимизации. Не на словах оптимизация, а обличенное в доказательную форму: науке нужны доказательства, истина должна доказываться. Но для экономики важно не только количество, не только сам процесс, чтоб можно вычислить и так далее, но и всё вокруг, какие это порождает новые экономические положения, теоретические, методологические, всё же меняется.