Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова
Российской академии наук

На правах рукописи

Синкевич Галина Ивановна

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ДО КОНЦА XIX ВЕКА

Специальность 07.00.10 - История науки и техники
(физико-математические науки)

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант –
доктор физико-математических наук,
профессор В.М. Тихомиров

Москва – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Представленная работа содержит результаты историко-математического исследования, посвящённого становлению понятий числа и непрерывности в математическом анализе до конца XIX века. Исследования выполнены в Институте истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова Российской академии наук. Исследовательское пространство данной работы сформировалось во-первых, при изучении истории группы теорем о непрерывных функциях; во-вторых, истории развития понятия континуума; в-третьих, развития понятия числа и числовой области, приведшего к понятию непрерывности числовой области и к понятию числовой прямой. В историко-математической литературе, посвящённой истории математического анализа (обзор большого количества источников дан в шестой главе) имеется много работ, посвящённых этой теме, но недостаточно проявлены этапы формирования понятия непрерывности, как относительно числовой области, так и относительно свойств функций, непрерывных в окрестности точки и в области; история различных видов непрерывности и сходимости. Наряду с точкой зрения, что эти фундаментальные понятия уже были сформированы в древности, представлена противоположная точка зрения, что они возникли только в XIX веке. Противоречивость этих точек зрения обусловлена также тем, что многие факты рассматривались как явления из истории арифметики, алгебры и геометрии, вне истории понятий математического анализа, как например, метод каскадов. Встречается также попытка изложить математические конструкции старого времени современным языком, без учёта их исторического назначения. Представленная работа восполняет пробел в истории постепенного формирования понятия непрерывности, представляет обобщение и систематизацию этих этапов и их итогов.

В работе проведено всестороннее и комплексное исследование развития понятия непрерывности на следующих этапах: античный метод исчерпывания и методы Архимеда; возникновение понятий интенсивности и последовательности в работах математиков Мертон-колледжа; новые идеи в понимании континуума у схоластов; демонстрация плотности числового отрезка у Штифеля; возникновение понятия сходимости у Дж. Грегори, понимание непрерывности Лейбницем; методы Ньютона и Ролля приближённых решений уравнений, объяснение метода сходящихся последовательностей Маклореном с помощью удачной метафоры; генезис основных теорем о непрерывных функциях от алгебры XVII века до математического анализа XIX века; расширение понятия функции в XIX в., введение в математический обиход тригонометрических рядов; возникновение и развитие понятия сходимости и равномерной сходимости рядов; предвосхищение Больцано основных направлений математического анализа XIX века: понятия окрестности, сечения, определения бесконечного множества и видов непрерывности функций; первая реформа арифметизации анализа Коши, создание концепций числа в работах Мере, Гейне, Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора, их сравнительный анализ и эквивалентность; вторая реформа анализа Вейерштрасса; формирование языка эпсилон-дельта; возникновение понятий метрического пространства и связности в работах Вейерштрасса; развитие понятия равномерной непрерывности и метода покрытий в работах Дирихле и Гейне; развитие Кантором понятия предельной точки и её роль в курсах математического анализа конца XIX века; классификация разрывных функций по Дини; развитие идей Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда в работах математиков России, Италии и других стран; формирование концепции числа в работах Колмогорова. Новым в работе является также концепция формирования и развития определений, повлекшая в XX веке возникновение дескриптивной теории множеств в работах московской, польской и французской школ, а также анализ основных концепций числа и непрерывности XIX века.

Систематизация и обобщение приведённого материала обусловливает необходимость изучения данной темы для процесса общего познания. Использование полученных научно-обоснованных результатов обеспечивает решение крупной теоретической задачи: создание истории концепций числа и непрерывности в истории математического анализа применительно к текущему состоянию и потребностям математики, как в методологическом внедрении в научные исследования, так и в методическом отношении преподавания курса анализа. Актуальность и значимость работы подтверждалась значительным интересом российских и зарубежных читателей к статьям, опубликованным по теме диссертации.

Степень разработанности проблемы. В диссертации дана полная картина становлений концепций числа и непрерывности к концу XIX века. Работа является первым трудом, представившим тему становления концепции числа и непрерывности в математическом анализе во всей её полноте. Привлечено большое количество первоисточников, рассмотрено использование понятий непрерывности и числа в работах таких математиков и мыслителей, как Архимед (287-212 до н.э.), Ж. Буридан (1295-1363), М. Штифель (1487-1567), Дж. Кардано (1501-1576), Галилео Галилей (1564-1642), Р. Декарт (1595-1650), А. Арно (1612-1694), Дж. Валлис (1616-1703), Дж. Грегори (1638-1675), И. Ньютон (1643-1727), Г. В. Лейбниц (1646-1716), М. Ролль (1652-1719), Ш.-Р. Рейно (1656-1728), Г.Ф. де Лопиталь (1661-1705), А. Муавр (1667-1754), К. Маклорен (1698-1746), Л. Эйлер (1707-1783), Ж.Л. Даламбер (1717-1783), А. Г. Кестнер (1719-1800), Ж. Л. Лагранж (1736-1813), К. Вессель (1745-1818), С. Ф. Лакруа (1765-1843), Ж.Б. Фурье (1768-1830), Ж. Р. Арган (1768-1822), А.-М. Ампер (1775-1836), К.Ф. Гаусс (1777-1855), Б. Больцано (1781-1848), О. Л. Коши (1789-1857), М. В. Дробиш (1802- 1896), П.

Лежён-Дирихле (1805-1859), У. Р. Гамильтон (1805-1865), Г. Грассман (1809-1877), К. Вейерштрасс (1815-1897), Э. Гейне (1821-1881), Б. Риман (1826-1866), Р. Дедекинд (1831-1916), Р. Липшиц (1832-1903), Ш. Мере (1835-1911), Г. Ганкель (1839–1873), Г. Кантор (1845-1918), У. Дини (1845-1918), А.В. Васильев (1853–1929), Б.К. Млодзеевский (1858–1923), С.О. Шатуновский (1859–1929), Д. Гильберт (1862-1943), И.Ю. Тимченко (1863–1939), В.Л. Некрасов (1864–1922), Ф. Хаусдорф (1868–1942), И.И. Жегалкин (1869–1947), Э. Борель (1871-1956), А. Лебег (1875-1941), М. Фреше (1878- 1973), Ф. Рисс (1880–1956), П.А. Флоренский (1882–1937), Н.Н. Лузин (1883-1950), А.Н. Колмогоров (1903–1987), а также некоторых других. Наряду с первоисточниками привлечено большое число математических, критических и историко-математических работ как отечественных учёных, среди которых И.Г. Башмакова, А.В. Гладкий, В.Л. Гончаров, С.С. Демидов, А.В. Дорофеева, Н.С. Ермолаева, В.П. Зубов, В.В. Капустин, Ю.Н. Козиоров, А.Н. Колмогоров, М.М. Коренцова, П.Я. Кочина, Н.Н. Лузин, А.И. Маркушевич, Г.П. Матвиевская, Ф.А. Медведев, Д.Д. Мордухай-Болтовской, В.П. Одинец, А.Б. Паплаускас, С.С. Петрова, Е.М. Полищук, А.А. Русаков, К.А. Рыбников, Д.М. Синцов, И.Ю. Тимченко, М.А. Тихомандрицкий, В. М. Тихомиров, П.А. Флоренский, Н.Г. Чеботарёв, В.Н. Чубариков, В.С. Широков, Л. Эйлер, А.П. Юшкевич, С.А. Яновская, так и зарубежных учёных, касавшихся этой темы.

Становление концепций числа и непрерывности как целостная тема не рассматривалась ранее, хотя была богато представлена фрагментарными исследованиями, посвящёнными отдельным аспектам проблемы, например, развитию арифметической, алгебраической роли числа, методов приближений. Не была рассмотрена эволюция расширения числовой области во всей её полноте, хотя её истории посвящено много работ. Не было рассмотрено становление группы теорем о непрерывных функциях. Не было сравнительного анализа четырёх концепций непрерывности. В истории математики не был выделен момент возникновения теории функций как новой ветви математического анализа. Не было показано становление курса математического анализа XIX – начала XX вв.

В историко-математической литературе ощущалась потребность восполнить эти пробелы. Данная работа показывает ретроспективу развития числа и непрерывности, становление концепций XIX века, благодаря которым появились теория функций, теория множеств, функциональный анализ, общая топология, были созданы системы аксиом арифметики, геометрии, теории меры, метрического, топологического, векторного пространств, теории вероятностей, появились новые разделы математического анализа.

Объектом диссертационного исследования является генезис и развитие понятий числа и непрерывности, что привело к созданию современного математического анализа, а также к созданию современного учебного курса математического анализа; выявление и анализ неизвестных ранее фактов и нововведений, представляющих научную и историческую ценность для воссоздания истории математического анализа (пп. 1-5 паспорта специальности «История науки и техники»).

Предметом исследования является история исследований и открытий аналитических аспектов числа и непрерывности, расширения числовой области, понятий числовой прямой, становление теории функций и формирование в ней группы теорем о непрерывных функциях, включая историографию темы, исследование основных связей между запросами практики и развитием математического анализа, исследование качественных изменений и исторических переходов между различными этапами развития математического анализа (пп. 3, 8 паспорта специальности «История науки и техники»).

Соответствие паспорту специальности. В работе рассмотрена история становления и развития фундаментальных концепций числа и непрерывности, позволивших математическому анализу подняться на новую стадию развития; история возникновения и становления в рамках математического анализа новых областей, таких как теория функций, теория множеств, функциональный анализ, теория меры, теоретико-множественная топология и другие; формирование учебного курса математического анализа; взаимодействие мировой и отечественной науки в изучаемом процессе; обобщение историко-научного материала с целью воссоздания целостной картины становления и развития концепций числа и непрерывности. Для этого привлечено как большое количество первоисточников, так и обширный круг критической и историко-математической литературы. Всё это соответствует паспорту специальности 07.00.10 – «История науки и техники» в областях, соответствующих пп.1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10.

Целью работы является реконструкция исторических этапов развития понятия числа и непрерывности в математическом анализе до конца XIX в., и оценка как личного вклада математиков, так и вклада национальных математических школ в развитие этих понятий и становление концепций. Работа написана с целью восполнения пробелов в историко-математической литературе, в учебных курсах по истории математики, в исторических экскурсах учебников по математическому анализу, а также в помощь преподавателям истории математики и математического анализа, для студентов, аспирантов и профессиональных математиков.

В связи с поставленной целью было необходимо решить следующие **задачи**:

- провести анализ истории развития идей непрерывности и числа в работах Архимеда, Буридана, Штифеля, Галилея; а также закона непрерывности и геометрических представлений комплексных чисел и значения их генезиса в возникновении векторного анализа;

- провести анализ истории развития идей непрерывности и числа в эпоху зарождения математического анализа: анализ истории теоремы Ролля, теоремы Больцано–Коши; идей Грегори и Маклорена, истории правил дифференцирования; истории метода многоугольника и метода касательных Ньютона;

- проследить историю идеи непрерывности и числа в первой половине XIX в.: особенности французской математической традиции; идеи Коши; история теоремы о пределе сжатой переменной; история теоремы Лагранжа и языка «ε-δ»; изменение типа математических определений в XIX в.; анализ нового языка математического анализа и новых типов определений; анализ некоторых новых типов доказательства; выделение удачных и неудачных способов изложения новых теорий, терминов, образов, метафор, приёмов изложения с позиции требований теоретической, прикладной, педагогической практики своего времени и получивших либо не получивших признания математического сообщества.

- провести анализ особенностей развития понятий числа и непрерывности во второй половине XIX в. в работах Мере, Ганкеля, Вейерштрасса, Дирихле, Гейне, Кантора и Дедекинда; сравнение их работ в историческом контексте, их источники; анализ их позиций по отношению к понятиям числа и непрерывности; определение момента возникновения понятий равномерной непрерывности, упорядоченности, плотности, связности, метрического пространства, история формирования группы теорем о непрерывных функциях;

- установить время возникновения, развития и распространения концепций числа и непрерывности Мере, Гейне-Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса; феномен возникновения понятия числовой прямой; определение момента возникновения новых аксиоматик геометрии и арифметики;

- перевести на русский язык и дать анализ ключевых фрагментов работ европейских математиков М. Штифеля, К. Маклорена, П. Дирихле, Ш. Мере, Э. Гейне, К. Вейерштрасса, У. Дини, а также их научные биографии;

- историографический обзор.

Решение этих задач станет вкладом в изучение истории математического анализа.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач применялась отечественная историко-математическая методология, историко-генетический (ретроспективный) метод, проблемно-хронологический метод и частные методы историко-научного анализа математических и историко-математических работ в контексте математики своего времени (антикваристский метод) в сочетании с анализом вклада изучаемых работ в становление современного математического анализа (презентистский метод). Автор руководствовался принципом историзма, позволившего рассмотреть взгляды учёных в их развитии, выявить специфические особенности этапов развития рассматриваемых понятий, а также определить факторы, повлиявшие на их становление. В диссертации использовалась традиционная методология историко-математического исследования: работа с первоисточниками, общеисторический анализ эпохи и её научных потребностей. Определялась роль личности рассматриваемого автора, приводилась его научная биография, проводился как анализ его работ в целом, так и анализ открытия, имеющего отношение к теме; рассматривалось влияние его трудов на последующие поколения математиков, их интерпретация его открытия. Каждое открытие рассматривалось в контексте современных ему работ. Понятия непрерывности и числа рассматривались как в связи с потребностями практики своего времени, так и в их общем значении для развития математического анализа. Рассматривалась также дополнительная литература того времени, интерпретации анализировались в историческом контексте.

Источниковедческую базу исследования составили прежде всего первоисточники на латыни, французском, немецком, английском, итальянском языках - монографии, статьи и научная переписка учёных, а также критическая и историко-математическая литература по истории математического анализа, обзор которой дан в отдельной главе.

Теоретическая и практическая значимость работы. Положения, защищаемые в данной работе, расширяют представления о генезисе и исторических этапах формирования понятий математического анализа и являются существенным дополнением в историческом анализе развития математики XIX века. Развитые и дополненные методы исторического анализа, использованные в работе, значительно обогащают методологическую основу подобных исследований. Материалы исследования могут быть использованы в курсе истории математики, историографии истории математики и в курсе математического анализа, теоретические выводы могут быть востребованы в историко-философском анализе фундаментальных концепций XIX в., а также в изучении истории методологии математического анализа.

Научная новизна работы состоит в том, что впервые дана полная картина истории формирования понятий непрерывности и числа до конца XIX века, причём математические события XIX века изложены очень подробно (п.1 паспорта специальности «История науки и техники»); впервые переведены, проанализированы и введены в русскоязычную историко-математическую литературу ключевые работы европейских математиков М. Штифеля, К. Маклорена, П. Дирихле, Ш. Мере, Э. Гейне, К. Вейерштрасса, У. Дини, а также их научные биографии (п.2 паспорта специальности «История науки и техники»); впервые проведён историко-математический анализ формирования комплекса знаний по теории функций, предназначенного для преподавания (п.3 паспорта специальности «История науки и техники»). Показано связное развитие идей числа и непрерывности от работ Евдокса, Архимеда, схоластов и математиков XVI-XVIII вв. (пп.5,7 паспорта специальности «История науки и техники»). До появления первых публикаций автора в литературе, как отечественной, так и зарубежной, не был дан сравнительный анализ концепций числа и непрерывности Мере, Гейне-Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса, а также ранее никто не показывал дальнейшего развития этих концепций и выявления их эквивалентности, историю формирования на их основе аксиоматических теорий (п.6 паспорта специальности «История науки и техники») Новым является выявление международных научных связей и взаимной зависимости идей в области математического анализа (п.9 специальности «История науки и техники»). В отдельном разделе рассмотрена судьба идей Кантора в России. Впервые установлено, что понятие связности и метрического пространства появилось у Вейерштрасса. Дан сравнительный анализ понятий континуума и связности у Вейерштрасса и Кантора (п. 4 паспорта специальности «История науки и техники»). Дан обширный историографический обзор, посвящённый истории математического анализа. Эти исследования восполняют пробел как в западноевропейской, так и в отечественной литературе. Теоретически обоснованы и аргументированы закономерности развития математического анализа XIX в. (п. 5 специальности «История науки и техники»). Достоверность новых научных результатов обусловлена использованной методологией и работой с первоисточниками, позволяет использовать эти результаты для дальнейших историко-математических исследований и для преподавания математического анализа и истории математики. Оригинальность и обоснованность теоретических выводов, предложенных в работе, а именно: классификация этапов развития понятия числа и непрерывности, выявление и анализ соответствующих достижений каждого этапа позволили воссоздать ретроспективу развития концепций числа и непрерывности до конца XIX в. (п.6 специальности «История науки и техники»). Новизна состоит также в том, что в русскоязычную литературу введён обширный корпус первоисточников в переводе автора, что позволит объективно оценить историю исследуемых концепций, увидеть их новые аспекты (п. 4 специальности «История науки и техники»).

Практическая ценность исследования. Положения и методы, предложенные в данной работе, углубляют историю математического анализа, существенно дополнив историю математики XIX века. Результаты имеют значение для учебно-методической и преподавательской работы при подготовке курсов математического анализа и истории математики. Объективный анализ истории формирования таких фундаментальных понятий, как число и непрерывность, составляет базу для дальнейших методологических работ и обобщений. Работа также вносит вклад в историю аксиоматических теорий, лежащих в основе математики.

Положения, выносимые на защиту

— Характеристика этапов формирования понятий числа и непрерывности от античности до конца XIX в.: смена понятийного инструментария, методы обоснования и усиление критериев строгости.

— Анализ роли математических школ в развитии математического анализа XIX в.

— Сравнительный анализ основных концепций числа и непрерывности XIX в.

— Генезис возникновения новых областей в математическом анализе: теория функций, теория множеств и др.

— Установление этапов формирования объема знаний по теории функций, и соответствующего учебного курса, на протяжении XIX в.

— Систематизация этапов XIX в. формирования аксиоматической базы арифметики, геометрии, векторного, метрического и топологического пространств.

— Совершенствование проблемно-хронологического метода работы с первоисточниками при анализе генезиса понятийного инструментария математического анализа.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность подтверждается работой с многочисленными первоисточниками, содержащих значительный объём фактического материала, многочисленным экспертным оценкам и апробацией результатов исследований в практике. Подтверждение достоверности базируется на всестороннем анализе выполненных ранее научно-исследовательских работ по предмету исследования, применением в историко-математических исследованиях апробированного научно-методического аппарата. Исследования и выводы диссертации опубликованы в 5 монографиях, 19 статьях в журналах из списка ВАК, 97 статьях в других изданиях, а также доложены на 37 международных конференциях, конгрессах и научных семинарах, в том числе на International ISAAC Congress 2011, 24-th International Congress of History of Science, Technology and Medicine, Манчестер, 2013, и 7-th European Congress of Mathematics, Берлин, 2016, сделано 12 докладов на научном семинаре по истории математики ПОМИ. Количество опубликованных тезисов выступлений – 12, количество опубликованных переводов с предисловием и комментариями – 7. Статьи автора расположены на сайтах СПбГАСУ, ResearchGate, Academia.edu, ArXive.org и имеют более 6000 прочтений.

Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и четырёх приложений. Текст диссертации содержит 292 страницы, список литературы состоит из 459 наименований, текст четырёх приложений содержит 78 страниц. Приложение *A* содержит 7 страниц, приложение *B* содержит 34 страницы, приложение *C* содержит 15 страниц, приложение *D* содержит 21 страницу.

Глава 1. НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОНЯТИЙ ЧИСЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ ДО ПОЯВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1.1. Архимед: письма к Досифею и аксиома полноты

К концу XIX века в математическом анализе в работах Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда сформировалась концепция непрерывности. Гильберт добавил в аксиоматику геометрии аксиому Архимеда и аксиому полноты. Позже Колмогоров показал, что аксиома полноты может быть заменена принципом вложенных отрезков вместе с аксиомой Архимеда. В главе рассматривается развитие названных принципов в работах Архимеда.

Процесс реформы и арифметизации математического анализа XIX века завершился созданием концепции действительного числа, непрерывности и аксиоматизации арифметики. Было установлено взаимно-однозначное соответствие между областью действительных чисел и геометрической прямой. Появление неевклидовой геометрии привело к необходимости анализа аксиом геометрии, понятия непрерывности и полноты. В 1899 году Гильберт ввёл новую систему аксиом, к которой добавил аксиому Архимеда и аксиому полноты:

«Аксиома измерения или аксиома Архимеда. Пусть A_1 есть произвольная точка на прямой между произвольно данными точками *A* и *B*; строим затем точки $A_2, A_3, A_4, ...$ так, что точка A_1 лежит между точками *A* и A_2, A_2 между A_1 и A_3, A_3 между A_2 и A_4, и сверх того, отрезки $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ...$ равны между собою: тогда в ряду точек $A_2, A_3, A_4, ...$ всегда существует такая точка A_n, что точка *B* лежит между *A* и A_n.

Аксиома полноты. Элементы (точки, прямые, плоскости) геометрии образуют систему вещей, которая, при условии сохранения всех указанных выше аксиом, не допускает расширения, то есть к системе точек, прямых, плоскостей невозможно присоединить другую систему так, чтоб в новой расширенной системе были по-прежнему удовлетворены вместе все аксиомы» [24, с. 20].

Мы хотим показать, как первые теоретические методы работы с геометрическими величинами составили основу современного понимания действительного числа, рассмотрев здесь только тот аспект, который касается непрерывности области действительных чисел и его обоснования с помощью последовательности стягивающихся сегментов. Эта конструкция зародилось в античных методах – в методе исчерпывания Евдокса, принципе Евклида, их развитии в методах Архимеда. Логические схемы, предшествующие возникновению принципа стягивающихся последовательностей, встречаются в работах Ж. Буридана, П. Ферма, Д.

Грегори, Ньютона, К. Гаусса, Ж.-Б. Фурье. Сам метод возникает в XIX веке в работах Б. Больцано, О.-Л. Коши, П. Лежена Дирихле, Ш. Мере, Э. Гейне, Г. Кантора, Г. Дарбу. В XX веке принцип вложенных отрезков признан одним из фундаментальных в аксиоматике действительного числа.

V век до н.э,. Пифагор. «Пифагор открыл область иррациональных чисел[1]» [96, ч. II, гл. 8]. В IV веке до н.э. теорией иррациональных величин занимался Теэтет Афинский.

В IV веке до н.э. Евдокс создал теорию отношений для её применения к геометрическим величинам – длинам, площадям и объёмам. «Евдокс Книдский был немного младше Леонта и был дружен с окружением Платона; он первый увеличил число так называемых общих теорем, прибавил к трем пропорциям еще три и — взяв у Платона основу — разработал множество видов сечения, используя при этом метод анализа» [96, ч. II, гл. 8]. В III веке до н.э. его теорию отношений изложил Евклид в V книге «Начал», содержащей 18 определений и 25 предложений (теорем). Здесь ratio ещё не число, но может быть сравнимо по величине с другими отношениями: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга» (Начала, Книга V, определение 4) [37, с. 142]. Метод исчерпывания Евдокса изложен X и двух последующих Книгах «Начал» Евклида.

«*Немного младше ... – Евклид*, составивший "Начала", собравший многое из открытого Евдоксом, улучшивший многое из открытого Теэтетом, а помимо этого сделавший неопровержимыми доказательствами то, что до него доказывалось менее строго. Он жил при Птолемее Первом, потому что и Архимед, живший при Птолемее Первом, упоминает об Евклиде и, в частности, рассказывает, что Птолемей однажды спросил его, есть ли более короткий путь изучения геометрии, нежели "Начала"; а тот ответил, что нет царского пути к геометрии. Таким образом, он моложе платоновского кружка и старше Эратосфена и Архимеда, — они-то жили в одно время, как где-то говорит Эратосфен. Он принадлежит к платоникам и близок их философии [96, ч. II, гл. 8].

Евклид развивает идеи Евдокса, анализируя несоизмеримые в X Книге: «Соизмеримыми величинами называются измеряемые одной и той же мерой, несоизмеримыми же – для которых никакая общая мера не может быть образована» (Начала, книга X, определение 1) [38, с. 101]. В X книге Евклид доказывает предложение 1: «Для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины, и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины» [там же, с. 102]. Таким образом, искомая величина «исчерпывалась» последовательностью сумм известных величин, приближаясь к ней *с одной стороны* – либо с

[1] Величин.

недостатком, либо с избытком. Заметим, что именно к X Книге Евклида обращались Штифель, Больцано и Кантор в своих работах, посвящённых концепции числа [114 - 116].

III век до н. э. Архимед. Следующим этапом в развитии понимания числа было пять работ Архимеда, изложенных в его письмах к Досифею: «Квадратура параболы», «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах», «О спиралях» и венчающая этот цикл работа «Об измерении круга».

В «Квадратуре параболы» Архимед доказывает, что «всякий сегмент, заключённый между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с сегментом то же самое основание и равную высоту» [5, с. 89]. Для этого он использует две суммы трапеций, площади которых соответственно не достигают и превосходят описанный треугольник. «Я утверждаю, что треугольник ВΔΓ будет меньше утроенных трапеций КЕ, ΛZ, МН, NI вместе с треугольником ΣIΓ, но больше утроенных трапеций ZФ, ПΘ, ПI с треугольником IOΓ» [там же, с. 85].

Это *первое* в истории математики применение двух последовательностей вписанных и описанных площадей, приближающихся к искомому с разных сторон. Во второй части своей работы Архимед, следуя Евдоксу, «исчерпывает» искомую площадь сегмента с помощью сумм площадей треугольников, приближаясь к искомому с недостатком.

В работе «О шаре и цилиндре» Архимед показывает, что отношение сумм двух последовательностей всё ближе и ближе к единице. В работах «О спиралях», «О коноидах и сфероидах» Архимед показывает, что разность между этими суммами может быть сделана сколь угодно малой. Эта же идея использована в «Измерении круга», где Архимед получает приближение числа π. В сочинении «О спиралях» Архимед формулирует следствие: «Около упомянутой площади можно описать, как указано, плоскую фигуру так, чтобы описанная фигура была больше этой площади на величину, меньшую всякой наперёд заданной площади и затем вписать так, чтобы упомянутая площадь была больше вписанной фигуры на величину, меньшую всякой наперёд заданной площади» [там же, с. 254].

В античности метод исчерпывания мог быть применим лишь к однородным величинам: от отрезка можно было отнимать только отрезок, от площади площадь и так далее. Отношения были возможны лишь между однородными величинами. Длина, площадь, объём выражались не числом, а равновеликой длиной, площадью, объёмом известной элементарной фигуры (квадрат, треугольник, куб, цилиндр). Евклид говорит, что величины могут быть в математическом отношении, если меньшая из них, взятая кратно, может превзойти большую, то есть рассматривает это как свойство, присущее однородным величинам. Архимед заменяет эту формулировку на более сильную: величины могут находиться в отношении, если их *разность*, взятая кратно, может превзойти любую из них. Эта формулировка повторена им для площадей в «Квадратуре параболы»; для линий, поверхностей или тел в сочинении «О шаре и цилиндре», для отрезков в сочинении «О спиралях». Возможно, именно этим Архимед исключает появление неделимых, когда, например, точка может считаться частью линии и так далее. Это принцип был нарушен в Новое время в работах Кавальери и Кеплера, где точка входила как неделимая часть в линию, линия была неделимой частью плоскости и так далее.

В XIX веке к аксиоме Архимеда обратились многие математики, пытавшиеся построить геометрию без неё: Джузеппе Веронезе (1854-1917), который в 1890 году предложил концепцию линейного неархимедова континуума [443], Отто Штольц [431, 432], Давид Гильберт [341]. Как пишет Гильберт, «*Выполнимость аксиомы полноты существенно обусловливается предварительным установлением аксиомы Архимеда*; это значит – аксиома полноты привела бы к противоречию, если бы к аксиомам I-IV не была ещё присоединена аксиома Архимеда» [24, с. 20].

В 1887 году Георг Кантор, обсуждая попытки Веронезе и Штольца ввести в геометрию актуально бесконечные и построить неархимедову геометрию, в письме к Вейерштрассу писал: «Архимед, по-видимому, впервые обратил внимание на то, что применяемая в Евклидовых «Началах» теорема, согласно которой из любого сколь угодно малого ограниченного отрезка можно получить произвольно большие конечные отрезки путём умножения на конечные достаточно большие числа, нуждается в доказательстве, и он считал себя поэтому вправе назвать эту теорему «допущением»<…>. Факт существования актуально бесконечно малых чисел не только не является основанием для существования актуально бесконечно малых величин, но, скорее, как раз с помощью первых доказывается невозможность последних». Кантор приводит свою теорему: «Не существует отличных от нуля линейных числовых величин (т.е., короче говоря, таких числовых величин, которые можно представить в образе ограниченных непрерывных прямолинейных отрезков), которые были бы меньше сколь угодно малой конечной числовой величины, т.е. такие величины противоречат понятию линейной числовой величины», и добавляет, что «Потребность в нашей теореме особенно очевидна на фоне новейших попыток О. Штольца и П. Дюбуа-Реймона обосновать актуально бесконечно малые величины с помощью так называемой аксиомы Архимеда. Я думаю также, что этот результат невозможно вполне строго получить иным путём. Ход мыслей цитированных выше авторов (О. Штольц, указ. работы) заключается в том, что если отбросить эту мнимую «аксиому», то мы будем вправе создавать актуально бесконечно малые величины, названные там «моментами». Но из доказанной мною выше теоремы, если применить её к прямолинейным непрерывным отрезкам, непосредственно следует необходимость евклидова постулата. Следовательно, так называемая аксиома Архимеда вовсе не является аксиомой, а есть теорема, вытекающая с логической необходимостью из понятия линейной величины. В первую очередь следует указать на теорию иррациональных числовых величин, обоснование которой невозможно, если не привлечь в какой-нибудь форме а.б. Что это привлечение может совершаться по-разному, я вкратце указал в §9 «Основ общего учения о многообразиях». Для этого я ещё ранее (Math. An., Bd. 5, S. 123) [I.1] воспользовался особыми актуально бесконечными множествами рациональных чисел, которые я называю фундаментальными последовательностями. Г-н Э. Гейне последовал в этом за мной (Crelles, Bd.74, S. 172)» (Кантор Г. Труды по теории множеств. Москва: Наука, 1885 г. С. 294-297).

В XX веке исследования Колмогорова показали, что аксиома полноты может быть заменена принципом вложенных отрезков (фундаментальных последовательностей Коши-Кантора) вместе с аксиомой Архимеда [55, 89, 30, 125].

1.2. XIV в. и представления о континууме

Здесь мы рассмотрим некоторые представления о континууме в работах математиков XIV века. Нас будут интересовать только те понятия, которые востребованы в анализе и теории множеств XIX века, а именно понятия континуума, точки, границы, интенсивности, измерения.

В IX-XI вв. античное наследие переводилось на арабский и комментировалось в Багдаде и Толедо. С XII в. стали переводить в Толедо, затем в других городах Испании и Италии. Были переведены труды Аристотеля, Евклида, Архимеда, Аполлония, Птолемея, ал-Хорезми, Аверроэса, Платона, Плотина, Прокла. Выполнялись также переводы с греческого на латынь.

Появились первые европейские университеты. В Европе начинает формироваться научная среда. Европейская наука опиралась на достижения античности. Благодаря научным диспутам в науку вернулось искусство спора, аргументации. Латынь как язык, формировавшийся в богословских текстах, обладала арсеналом логических функторов, позволявшим создавать аргументированные рассуждения. Противоречия снимались введением более тонких различий. Зарождалась уверенность в том, что человеческий ум равномощен мирозданию и способен его объяснить (Данте).

В университетах Парижа и Оксфорда (XIII век) лекции профессоров заключались в чтении классиков, прежде всего Аристотеля, и их комментировании. Это породило плодотворные результаты схоластической логики, выработавшей аппарат толкования и оперирования философскими понятиями. В большинстве случаев трактаты писались по материалам лекций и диспутов, что вносило в них живость устной речи и выразительность аргументирования. В математику пришли новые понятия, имевшие большую общность с массовой математической культурой Средневековья – коммерческой и навигационной. В северной Италии и средиземноморских республиках началось развитие финансовой математики, формализуется понятие риска, с XV в. появляются первые коммерческие руководства [117].

Подобно спорам XIX века, математики пытались отделить понятия точки, линии и поверхности от их физической интерпретации (споры реалистов и номиналистов). Континуум рассматривался как целостный геометрический объект, понятие числового континуума формируется лишь в XIX веке [116]. В продолжение античной традиции в средневековье принцип континуума противопоставлялся принципу атомизма [43, с. 402-403].

«Физика» Аристотеля состоит из восьми книг, в первой и шестой из них он полемизирует с элеатами, и обсуждает апории Зенона. В ней же изложена теория континуума Аристотеля – пустота невозможна, поэтому материя не может состоять из неделимых атомов. По Аристотелю, вещи соприкасаются, когда границы их находятся «вместе», и непрерывны, когда границы их составляют «одно» [44, с. 306]. «Непрерывно то, чьё движение едино» [там же, с. 323].

Основные положения книги Аристотеля «Физика» были изложены Проклом в трактате «Начальные основания физики или о движении». Первый латинский перевод Прокла появился около 1160 года. «Новая Логика» Аристотеля переведена на латинский язык в 1121–1158 году, с XII века труды Аристотеля переводят преимущественно с арабского, но также и с греческого; к этому времени весь «Органон» Аристотеля уже был известен в Европе. В 1254 году в Париже переводят сочинения Аристотеля, Альберт Великий в Париже излагает его учение, в том числе и физику.

В XIII веке Р. Бэкон в толкованиях Аристотеля показывал, что при переходе качества из одного в другое нельзя указать последний момент существования прежнего качества, но лишь первый момент нового качества. Этот образ прошел долгий путь до понимания в XIX в. границы как сечения.

Труды Аристотеля толковались как христианскими, так и мусульманскими философами. Но если в христианской традиции основные усилия направлялись на адаптацию учения Аристотеля к доктрине Церкви, арабская традиция была свободна. В XIII–XIV веках распространяются работы арабских комментаторов Аристотеля. Самым значимым среди них был Аверроэс (ибн Рушд, 1126–1198), получивший за свои толкования Аристотеля имя Комментатор. Среди его христианских оппонентов выделяются Альберт Великий (1193–1280) и его ученик Фома Аквинский (1225–1274). Их полемика стимулировала развитие понятия континуума, его бесконечной делимости, понятия движения.

Как пишет В.П. Зубов, Аверроэс в комментарии к третьей части физики Аристотеля говорит: «Физик доказывает, что континуум делим до бесконечности, а геометр этого не доказывает, но предполагает как доказанное в физике» [43, с. 424-425].

Аверроэс утверждал невозможность неделимого движения в неделимом времени. В работах Аверроэса и Альберта Великого, возникает идея последовательности и бесконечной последовательности[2], как характеристики движения, зарождающегося различия между кинематическим и динамическим аспектами. Позже эта идея была развита в трудах Вычислителей – группы учёных Мертон-колледжа в Оксфорде (основан в 1264 году).

Уильям Оккам (ок. 1285–1358), английский философ и логик, преподавал в Оксфорде, был сторонником номинализма. Он отличал завершающую и соединяющую точки и утверждал, что между двумя примыкающими частями континуума нет ничего промежуточного [43, с. 428]. Комментируя определение Аристотеля: непрерывно то, чьи края образуют *одно*, Оккам писал: «*Одно*, (или *общая граница*) означает лишь отсутствие чего-либо между частями континуума, иначе говоря, линия непрерывна лишь благодаря отрицанию чего-либо между её частями, что могло бы стать причиной разрыва между ними» [44, с. 299].

Между первой точкой и всякой другой точкой, взятой на линии, существует какая-то промежуточная точка, но это не значит, что некая точка существует между первой и любой другой точкой линии (вместе взятыми) [там же, с. 308].

В XIV веке в Англии, в Оксфорде, в Мертон-колледже, работала группа математиков, значительность открытий которых дало им имя Калькуляторов или Вычислителей. Благодаря им античная традиция оценок с помощью неравенств сменяется новой традицией точного вычисления, равенства. Их заслугой было введение в науку понятий «интенсивность» и «мгновенная скорость», хотя и не определённых строго. Представителем Калькуляторов был Томас Брадвардин (1290–1349), написавший между 1328 и 1335 годом трактат «О континууме» (De continuo) [43, с. 385-440]. В его трактате содержится полемика с различными точками зрения на континуум. Одна группа его оппонентов – сторонники дискретной геометрии (финитисты), другая группа – это сторонники актуально-бесконечно малых.

Брадвардин близко подходит к пониманию плотности континуума: «две точки на плоской поверхности и неделимые в континууме не могут сочетаться (conjungi) друг с другом непосредственно, между ними должна находиться ещё одна точка, а, следовательно, много точек», «между двумя неделимыми любого континуума должно заключаться бесконечное множество точек» и «всякий континуум имеет бесконечное множество атомов» [там же, с. 406]. Он утверждает метод исчерпывания и аксиому Архимеда, отрицая существование бесконечно

[2] res successive

малых: «Всякую прямую можно разделить на множество отрезков [там же, с. 399], «любое конечное пространство может быть пройдено равномерным движением за любое конечное время» [там же, с. 401].

Идея сечения (деления) континуума широко обсуждалась в кругах номиналистов: «Время как континуум разделяется моментом таким образом, что либо в прошлом нет последнего момента, либо его нет в будущем в зависимости от того, к будущему или прошлому мы относим момент настоящего. Под настоящим понимается мгновение, а под прошлым и будущим – время» [там же, с. 401–402]. «Не существует минимального градуса формы, способного к интенсификации и ремиссии. Иначе существовало бы наиболее медленное движение. Если бы такой минимальный градус существовал, неделимые в континууме непосредственно смыкались бы друг с другом» [там же, с. 404]. «Если b есть момент первого бытия вещи, то не существует последнего момента её небытия, и наоборот, если момент b рассматривается как момент небытия, то не существует первого момента её бытия» [там же, с. 409].

Есть у Брадвардина и идея самоподобия континуума: «Всякий континуум состоит из бесконечного числа континуумов того же рода, имея бесконечное число атомов (то есть треугольник может быть разделён на бесконечное число треугольников, поверхность имеет бесконечное множество поверхностей, линий и точек)» [там же, с. 413]. «Ни один континуум не интегрируется (не слагается) из атомов[3], иначе говоря, не слагается из них как из своих интегрирующих и квантитативных частей. Заключение это вытекает с очевидностью из вышесказанного, а именно из 70-го и 114-го заключения. И так как автор с большим успехом разъясняет, каким образом континуум не слагается, здесь, в следствии настоящего заключения, он показывает, каким образом континуум слагается, и говорит, что всякий континуум слагается из бесконечного множества континуумов того же вида, что и он, что всякая линия слагается из бесконечного множества линий, а всякая поверхность – из бесконечного множества поверхностей» [там же, с. 424]. Брадвардин вслед за Оккамом говорит об условном, фиктивном понятии точки в математическом смысле: «поверхность, линия и точка вообще не существуют», «континуум получает непрерывность и границы не посредством таких вещей, а посредством самого себя» [там же, с. 428–429]. Брадвардин установил первые парадоксы бесконечного, сопоставляя бесконечные множества [там же, с. 420-423].

Крупнейшим представителем мертонской школы был Ричард Суисет (иначе Суайнсхед, жил в XIV веке). Около 1346 года была написана «Книга вычислений» Ричарда Суисета, в которой он впервые вводит в математику физические понятия изменения и движения, интенсию

[3] Nullum continuum ex athomis integrari.

и ремиссию качеств (густота и разрежённость, сила и сопротивление, скорость и медленность, тепло и холод). Суисет вводит упорядоченные шкалы непрерывных изменений, между которыми есть соответствие [138, с. 134]. Принцип однородности не позволял рассматривать отношение разнородных величин. Можно было сравнивать два отрезка пути, пройденных за одинаковое время, либо сравнивать два временных интервала, затраченных на преодоление одного и того же пути. Суисет впервые рассмотрел переменную интенсивность качества, взяв отношение пути ко времени.

Французский философ и математик Никола Орем (родился до 1330 года, умер в 1382) был знаком с трактатом Суисета и часто критиковал его в своих сочинениях [42, с. 721, 726]. Трактат Орема «О конфигурации качеств» был написан до 1371 года, В.П. Зубов относит его к 1350 году [там же, с. 604].

Заслуга Орема перед будущим исчислением состоит в том, что он разделил вещи на постоянные и переменные, рассматривал измерения по трём ортогональным осям, выделил понятие последовательности изменений, понятие мгновенной скорости, понятие непрерывной величины [90, с. 637], понятие длящейся последовательности[4] времени, в зависимости от которой изменяются вещи (качества), образуя последовательную длительность[5] [там же, с. 679-680]. После Суисета (и вероятно, независимо от него) Орем вычислил конечную площадь ступенчатой фигуры бесконечной длины [138, с. 140].

Орем геометризует интенсивность и экстенсивность качеств (например, скорость, кривизна кривой), создавая их образы как вертикальные отрезки с основанием на общей горизонтали. Интенсивность приобретается *последовательно*. Высота отрезка соответствует интенсивности предмета в данной точке, которая отложена по горизонтали. «Всякая вещь, поддающаяся измерению, за исключением чисел[6], воображается в виде непрерывной величины. Следовательно, для её измерения нужно воображать точки, линии и поверхности, или их свойства; стало быть, всякая интенсивность, способная быть приобретаемой последовательно, должна быть воображаема в виде прямой линии, поставленной отвесно в какой-нибудь точке пространства, то есть предмета, способного к интенсификации» [там же, с. 637]. Орем допускает распространение такой модели на трёхмерную для «плоского» качества, и на четырёхмерную (воображаемую телесную) для «телесного» качества. Величину линейного качества он представляет в виде площади [там же, с. 641]. Рассматривая скорость во времени и пространстве, Орем получает три взаимно ортогональные оси. Идея координатной системы в XVII веке неявно (с осью абсцисс и ординатой точки) воплотилась в геометрии Декарта, а для

[4] sucessio morosa
[5] duratio successiva
[6] exceptis numeris

трёхмерных величин в XVIII веке у Эйлера. Понятие несобственного интеграла впервые было рассмотрено Даламбером в 1768 г.

Жан Буридан (ок.1300–1358), младший современник Брадвардина, учился в Сорбонне у Уильяма Оккама. Впоследствии Буридан дважды был ректором Парижского университета. В.П. Зубов называет его «умелым спорщиком и глубоким мыслителем» [44, с. 307]. В «Вопросах к восьми книгам «Физики» Аристотеля» Буридан продолжает геометризацию учения об интенсии и ремиссии форм, а также рассматривает поверхности конечной площади, возрастающие до бесконечности в длину или высоту [138, с. 140].

Рассмотрим его концепцию континуума, изложенную в «Вопросах к восьми книгам «Физики» Аристотеля», и в трактате «О точке[7]». Он продолжает развивать взгляды Брадвардина на континуум. Буридан придаёт значение понятию границы, проявляет значимость геометрического понятия «касание», связь которого с понятием «касания» у Лобачевского отметил В.С. Широков [139, с. 254]. Как Брадвардин, Буридан полагал континуум состоящим из точек, но его «точка или мгновение до бесконечности малы[8]» [10, с. 257]. «Но отсюда не следует, наоборот, что точка есть некая определённая бесконечно малая величина, ибо точкой может назваться и $1/_{12}$ –я часть континуума, которая не есть нечто актуально-бесконечно-малое» [там же, с. 305]. «Точки в континууме взаимно упорядочены, и можно обособить первую, а, следовательно, и остальные точки. Бесконечность промежуточных точек не исключает предшествования, благодаря которому все точки полагаются существующими актуально одна вне другой и вполне упорядоченными[9]» [там же, с. 311-313].

Далее Буридан создаёт конструкцию, послужившую основой одного важного построения математики XIX века – последовательность интервалов, в каждом из которых содержится точка континуума: «если взять первую крайнюю точку, то можно указать часть линии, ближайшую к ней и более близкую, нежели все прочие части, которые не являются частями этой части и которых она не является частью. Но если мы возьмём несколько таких частей, из которых одна не является частью другой, то нет двух частей, одинаково близких к первой точке. Например: к первой точке непосредственно примыкает первая половина линии, первая четверть, или первая восьмая. Но среди четвертей одна предшествует всем прочим четвертям, и среди восьмых одна предшествует всем прочим восьмым. Следовательно, аналогично можно сказать о точках, а именно: поскольку все находятся совершенно друг вне друга, одна должна предшествовать всем прочим[10]» [там же, с. 313].

[7] J. Buridan. Quaestio de puncto. Ms. Paris, BNF Lat. 16621 и 2831. Заметим, что трактат «О точке» был переведён В.П. Зубовым в 1960-е гг., но опубликован только в 2006 г.
[8] in infinitum parvum est punctus vel instans
[9] Отметим, что вопрос о выборе и упорядоченности был рассмотрен в 1904 году Э. Цермело.
[10] Идея покрытий была высказана Больцано в 1817 году, встречается в лекциях Дирихле 1862 года, лемма о покрытиях сформулирована Гейне в 1872 году, теорема о покрытиях доказана Борелем в 1895 и обобщена Лебегом в 1898 году.

Интересны гипотезы, которые Буридан обсуждает, но отвергает. Первая из них – сечение линейного континуума, в результате чего на месте сечения появляются две новые завершающие точки, что ложно [там же, с. 319]; другая – о границах (завершении) континуума: каким образом линия завершилась бы в точке, а тело в поверхности? Ведь тело ограничено помимо души, иначе оно было бы бесконечным. Если оно ограничено посредством своей сущности, это ложно; если посредством чего-то привходящего, - мы имеем то, что нам требуется. Ложность первого члена очевидна, ибо тогда весь континуум имел бы свою границу, как в середине, так и в конце, или на краю, ибо тело одинаково имеет свою сущность и на краю и в середине» [там же, с. 335–336]. – Это следует понимать как то, что границей линейного континуума могут быть только крайние точки, и наличие граничных (предельных) точек внутри отрезка недопустимо. В 1870–80-е годы Вейерштрасс и Кантор разработали концепцию предельных точек, а Кантор создал понятие совершенного множества как содержащего все свои предельные точки (1872 г.), и континуума как связного совершенного множества (1883 г.). Буридан отвергал предположения, противоречащие его представлениям о природе континуума, например, такие, что граница континуума как множество предельных точек содержится всюду в нём самом. Но интуиция Буридана позволила ему сформулировать эту гипотезу, рассмотреть и отвергнуть её! Так же высоко следует оценить высказанную Буриданом идею последовательности.

Свой трактат Буридан заканчивает словами: «Итак, если против вышесказанного будут возражать, студенты сумеют на всё ответить, основываясь на вышеизложенном» [там же, с.347].

Термин пространство появился на латыни около 1300 года (согласно Кеджори). В XIV веке движение согласно античным представлениям понималось как поступательное или вращательное. Ещё не было понятия направленности движения; понятие вектора, оформившееся только к 1840 году, присутствовало лишь как радиус-вектор точки (от латинского "vehere"). Термин «направление» стал использоваться в математике с XVIII века. В XIV веке зарождаются понятия последовательности, упорядоченности, порядка. Понятия «течение», «изменение», «поворачивать», «продвижение в определённом направлении», «менять направление» были обыденными словами и не входили в научные рассуждения в качестве базовых терминов, например, «dies decem continuos» означало «10 дней подряд». Различие скалярных и векторных величин сформировалось к XIX веку, хотя термин «скаляр» впервые появился у Ф. Виета (изд. в 1646 г.) Благодаря схоластам некоторые из них становятся научными конструктами.

Очень важным было введение в математику понятия изменения, интенсивности качества, рассмотренное Вычислителями Мертон-колледжа. На значительность их вклада в дифференциальное исчисление обратил внимание Е. Медушевский в своей книге «Непрерывность» [388].

Понятие последовательности и мгновенного движения впервые появилось у Н. Орема, хотя истолковывалось оно на уровне представлений XIV века. В 1660-х годах понятие «ряд» появляется в переписке Коллинса и Грегори, в 1685 году Валлис в использует его в своей «Алгебре» (он же вёл термин «интерполяция» и «бесконечно малая»). Буридан формулирует тезис «точка и мгновение до бесконечности малы» (in infinitum parvum est punctus vel instans), само понятие бесконечно малой в 1656 году впервые использует Валлис.

Буридан в своём трактате делает попытку ввести в континууме отношение порядка и возможность обособления (последовательного перебора точек).

В 1879 году Георг Кантор вводит понятие полной упорядоченности.

В XIV веке спорили о понятиях «касание» и «пересечение», в частности, некоторыми авторами предполагалось, что при пересечении перпендикулярных прямых общей является одна точка, а при пересечении под углом будет несколько общих точек. Анализировался знаменитый пример Секста Эмпирика о точке касания при движении сферы по плоскости. Буридан опирается на этот пример в своих рассуждениях: «Поместим шар на плоскости, что вполне допустимо с точки зрения моих противников. Он будет касаться этой плоскости в одной точке. Допустим, что шар постоянно движется. Тогда он будет касаться этой плоскости на протяжении какого-то отрезка, и любой части этого отрезка, и в любой точке, которая существует в этом отрезке. Всё это они должны допустить. Ясно также, что после первой точки отрезка шар никогда не будет одновременно касаться каких-нибудь двух точек. Это явствует из того, что точки в линии упорядочены. Следовательно, отсюда по необходимости вытекает, что после первой точки шар коснётся одной из прочих точек раньше, чем двух, ибо никогда он не касается двух сразу. А из этого следует, что какая-то точка будет предшествовать всем прочим, ибо иначе одна точка не приходила бы в соприкосновение с шаром раньше, чем две, три, и т.д., можно сказать до бесконечности» [10, с. 313]. В 1830 году Лобачевский использует понятие касания как основное для геометрии.

Континуум толковался как замкнутый отрезок геометрической линии, либо как фрагмент физического материала, обладающего сплошной структурой, например, камня, либо как интервал времени. Движение понималось как набор статичных состояний. Не была прояснена разница между отрезком и интервалом. Понятие границы толковалось как понятие рубежа, ограничителя в физическом смысле. Разделялось понятие соприкасающейся и завершающей точки. Между двумя близкими отрезками времени предполагалось мгновение, либо точка, а между двумя соседними точками предполагалась линия (Евклид: линия есть длина, концами которой являются две точки) [44, с. 306]. Понятие соседства, окрестности ещё не было разработано, оно зародилось в работах Больцано и Коши, и достигло своего завершения в работах Вейерштрасса. В XIV веке не было понятий сближения, сходимости. Понятие плотности возникает в работе М. Штифеля в 1544 году [114]. Критерий сходимости последовательности был сформулирован Больцано в 1817 году и использован Коши в Курсе анализа в 1821 году.

К чести открытий номиналистов следует отнести развитие тезиса Аверроэса о том, что математика не существует вне души, математические понятия следует отличать от соответствующих им физических понятий. В XIX веке необходимость такого разделения обосновал Больцано, благодаря Ганкелю его идеи стали широко известны и привели к созданию теории множеств в работах Кантора и Дедекинда.

Как отдельное явление середины XIV века отметим описание Оремом различия между переменной и постоянной, описание трёх перпендикулярных осей, последовательное изменение интенсивности, представление величины линейного качества в виде площади и вычисление конечной площади бесконечной плоской фигуры. Безусловно, до создания анализа как теории было ещё очень далеко, но здесь начинает формироваться научно-логический аппарат, который спустя три века позволит Ньютону создать Исчисление. Ценность представляют даже те гипотезы номиналистов, которые, будучи высказанными, ими отвергались, но нашли своё воплощение много веков спустя.

Замечательным в работах схоластов XIV века является то, что они обсуждали все гипотезы, к которым приводила их интуиция, но отвергали те из них, с которыми не согласовывался их научный опыт, к XIV веку довольно скромный. Многие из идей, высказанных, но отвергнутых после обсуждения Оремом, Брадвардином и Буриданом, послужили конструктивной основой представлению о числе XVI века, понятию бесконечно малой XVII века, в анализе XIX века – понятию плотности, последовательности, границы, представлению о сечении, покрытии, упорядоченности, непрерывности.

1.3.Теоретико-множественные представления XVI и XVII в. Михаэль Штифель и Галилео Галилей

XVI век принёс много перемен в жизнь народов Северной Европы. Мартин Лютер в одной из своих проповедей в 1522 году так описывал эти изменения: «Сколько ни читай всемирных хроник, не найдёшь ни в одной из её частей, начиная от Рождества Христова, ничего подобного тому, что произошло на протяжении этих последних ста лет. Таких сооружений и посевов не было ещё в мире, так же как и столь разнообразной (на любой вкус) пищи, изысканных яств и напитков. Своего предела достигла также изысканность и роскошь в одежде.

Кто прежде знал о таком купечестве, которое, как нынешнее, объехало бы вокруг света и связало своими делами весь мир? Несравнимо с прежними временами поднялись и расцвели всевозможные искусства – живопись, резьба по дереву, чеканка по металлу, меди, шитьё» [46, с. 69].

Мощная волна Реформации возникла из гуманистических учений Возрождения. Новое мировоззрение, обращённое к внутреннему миру человека, признало действие мировых законов в малом и обыденном. Замечательным явлением математики стало рассуждение алгебраиста XVI века Михаэля Штифеля о бесконечном количестве рациональных и иррациональных чисел на единичном отрезке.

Михаэль Штифель родился в 1486 году в Эслинге (север Люксембурга). В юности вступил в монашеский орден августинцев. В этом же ордене состоял и Мартин Лютер, родоначальник Реформации, который в 1517 году опубликовал свои знаменитые 95 тезисов против папства. Штифель стал приверженцем Лютера и в 1521 или 1522 году покинул монастырь и перебрался в Виттенберг. После Лютер устроил его на место капеллана в одном дворянском поместье, а потом сельского священника.

Штифель стал проповедовать новое учение в разных районах Германии. Он заинтересовался изучением Библии с точки зрения нумерологии. Числа, встречавшиеся в книге Даниила и в Откровении Иоанна, Штифель подверг анализу. Эти числа он заменял словами, буквы которых должны были соответствовать треугольным числам. Анализ имени папы Климента VII побудил его предсказать на 19 октября 1533 года конец света. Но предсказание не сбылось, и гнев крестьян, продавших скот за бесценок, вынудил власти посадить Михаэля Штифеля в тюрьму на 4 недели [132, с. 25]. После этого Штифель начал заниматься изучением математики серьёзно. Он изучал Евклида (в обработках Кампано и Замберти), Пачоли, Кардано, Тарталью, Дюрера, Рудольфа, Ризе, Николая Кузанского.

В течение 10 лет Штифель напечатал 4 книги: 1544 год «Обобщённая арифметика» [429], 1545 год – «Немецкая арифметика», 1546 год – «Вычислительная книга по вельской и немецкой практике», 1553 год – обработка «Алгебры» Рудольфа, дополнения к которой, как заметил А.П. Юшкевич [47, с. 299], превосходят оригинальный текст.

Умер Штифель в 1567 году в Иене.

Штифель, как отмечает Цейтен, глубоко чувствовал внутренние связи математики [132, с. 25].

Штифель впервые стал рассматривать отрицательные числа как числа, меньшие нуля, а положительные, как большие нуля [там же, с. 103]. Дробные и иррациональные величины он начал называть числами. Он заметил соответствие между арифметической и геометрической прогрессиями. Например, Штифель приводит такую таблицу:

0	1	2	3	4	5	6
1	2	4	8	16	32	64

Здесь он указывает на то, что в обеих пропорциях каждый элемент является средним пропорциональным своих соседних [429, с. 39-40]. Пятьдесят лет спустя Джон Непер положил эту идею соответствия в основу принципа логарифмов. Штифель сравнивает пропорции по скорости их роста. Рассматривает он также проблемы акустики, математические закономерности гармонии [там же, с. 60-79].

У Штифеля удивительное геометрическое осознание числа. О целых, рациональных и иррациональных числах Штифель пишет, как они распределены относительно друг друга, то есть их расположение на числовой прямой. Столетием позже, в 1633 году, к этому же вопросу обратится Галилей [19, с. 141-148].

Теория действительного числа была создана в XIX веке в работах Ш. Мере, К. Вейерштрасса, Э. Гейне, Р. Дедекинда и Г. Кантора. Одной из проблем был геометрический образ числовой прямой. В 1886 году Вейерштрасс утверждал, что каждому числу соответствует точка, но не каждой точке соответствует число, а иррациональные числа - неопределяемы [450, с. 63]; Дедекинд в 1872 году называл числа существующими лишь в мире наших мыслей [27, с. 17-18]; Мере называл иррациональные числа фиктивными [385]; Кантор в 1872 году постулировал, что каждому числу соответствует точка на прямой, ибо доказать это невозможно [50, с. 13].

В 1553 году Штифель высказал идею многомерного обобщения куба. На этот факт обратили внимание Б.А. Розенфельд и А.П. Юшкевич. Штифель рассматривает геометрическую прогрессию $1, a, a^2, a^3, \ldots$ и ставит в соответствие первому элементу, то есть единице, точку; второму элементу – линию, третьему элементу – плоскую квадратную фигуру, четвёртому элементу, т.е. a^3 - куб, для которого проведённая линия, т.е. отрезок, является кубическим корнем. «Если с арифметической точки зрения можно идти дальше, то геометрически не разрешено переходить к бóльшим измерениям, так как это породило бы телесные линии и поверхности. Куб полагался бы за телесную точку, за которой полагали бы телесную линию, за ней – телесную поверхность, а за ней полагали бы куб, за которыми шли бы дальше, как сейчас указано, но не останавливаясь. Но следовало бы сделать здесь доброе снисхождение из-за красивого и чудесного применения алгебры» [47, с. 299].

Многомерное обобщение куба используется Штифелем в 1553 году для иллюстрации формулы бинома, которую он формулирует для любого натурального показателя. Штифель приводит таблицы биномиальных коэффициентов, где каждый элемент образуется как сумма элементов предыдущей строки, стоящих над ним и слева от него. «Так же как квадратные биномы разлагаются на 4 части, а кубические – на 8 частей, квадрато-квадратные биномы разлагаются на 16 частей, а сверхтелесные на 32 части и подобно этому идёт по двукратной прогрессии» [там же, с. 301].

Обратимся к книге Штифеля 1544 года «Обобщённая арифметика» [429]. Обзор этой книги по главам дан Г.П. Матвиевской [75, с. 148-157]. Но Матвиевская рассматривает алгебраический аспект истории числа, нашей целью является история понятия числа для математического анализа. Первая часть называется «О рациональных числах», вторая «Об иррациональных числах», третья «Об алгебре».

Рассмотрим подробно тот фрагмент, в котором Штифель устанавливает, что между двумя ближайшими целыми числами находится бесконечно много как дробей, так и иррациональных чисел[11].

Во второй части (Arithmeticae. Liber secundus, de numeris irrationabilisbus) Штифель обращается к X книге Евклида, посвящённой иррациональным числам. Заметим, что к этой же книге Евклида обращался и Георг Кантор, когда работал над созданием теории множеств.

Первая глава второй части называется «Сущность иррациональных чисел» (De essentia numerorum irrationalium) [429, с. 103].

«Иррациональные числа могут быть истинными или воображаемыми (ложными, неопределяемыми - *ficti*). Потому что в геометрических формах доказательства мы отказываемся от рациональных чисел в тех случаях, когда использование иррациональных чисел приводит к успеху, когда невозможно пользоваться в доказательствах рациональными числами; мы вынуждены пойти на то, чтобы признать иррациональные числа истинными, и как вы можете увидеть впоследствии, то, что мы считаем их реальными, подтвердит нашу уверенность, что это подлинные и точные постоянные. Но рассуждая иначе, мы придём к другому утверждению, так что будем вынуждены отрицать, что иррациональные числа – это тоже числа. А именно в том случае, когда истинные числа вычисляются как пропорции подлинного числа, все рациональные числа образуются как отношения, мы можем делать это вечно, так что никто не может быть в состоянии точно представить их все, что я и покажу далее в надлежащем месте.

Но оно [иррациональное число] не может быть названо также и числом истинным, которое обладало бы точностью, оно известно, но не представимо как отношение чисел. Поэтому, подобно тому как бесконечные числа[12] не являются числами, так и иррациональные числа не являются числами, они скрыты во мраке бесконечности (infinitatis nebula). Далее, если бы иррациональные числа были подлинными числами, они были бы либо целыми, либо

[11] На этот фрагмент обратил внимание В. Венслав в своей книге [455, с. 82]. Приношу искреннюю благодарность проф. В. Венславу за то, что он заинтересовал меня этим рассуждением Штифеля.

[12] Полагаю, что Штифелю имеет в виду числа, обозначаемые бесконечным числом символов.

дробными. Дробными (fractos) числами я называю такие, которые состоят из числителя и знаменателя, расположенные между двумя какими либо соседними целыми числами, например: $8\frac{7}{9}$ или $\frac{79}{9}$ расположено между 8 и 9. И между дробями $\frac{12}{3}$ и $\frac{12}{4}$ невозможно поставить целое число[13].

То, что иррациональные числа не являются целыми, легко показать. Любое иррациональное число расположено непосредственно между двумя определёнными числами. Например, $\sqrt{6}$ находится между числами 2 и 3, а $\sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ находятся между числами 3 и 4. И так в других случаях. Но очевидно то, что между двумя соседними целыми числами нет целого числа, что чётко выражено. Таким образом, иррациональное число не может быть целым, так как оно расположено между соседними целыми. Но также иррациональное число не может быть и дробным. Ибо невозможно умножая дробные числа на себя, получить целое число. Но умножая иррациональное число на себя, получим целое число: как $\sqrt{6}$ в квадрате даст 6, и $\sqrt[3]{6}$ в кубе даст 6, и так далее. Следовательно, иррациональные числа не есть дробные. Предшествующее ясно. Ибо если знаменатель больше числителя, то квадрат знаменателя гораздо больше квадрата числителя. Также и куб знаменателя больше куба числителя, и это меньше целого [числа], и так далее. И так как мы не умножаем целые числа, нарушена возможность получить само [целое] число, так что перемножение дробей не может привести к целому числу. Кроме того, каждая дробь состоит в отношении к любому целому числу [пропорциональна], но никакое иррациональное число не может быть пропорционально никакому целому или дробному числу, о чём я уже упоминал раньше. Поэтому иррациональное число не может быть целым числом, а также не может быть и дробным числом. Аналогичным образом, бесконечное дробное число располагается между двумя некими соседними числами, и подобно этому бесконечное иррациональное число располагается между двумя некими целыми соседними числами. Легко видеть, что ни одно из них не может быть перемещено в другую последовательность [ordine, отношение порядка] из двух этих пределов [ordinibus]. Так что ничто не позволяет допустить, что иррациональное число может совпасть с дробью или с бесконечной дробью.

Но давайте посмотрим последовательности, о которых я говорил. Последовательность дробей между 2 и 3.

$2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{2}{5}, 2\frac{3}{5}, 2\frac{4}{5}, 2\frac{1}{6}, 2\frac{5}{6}, 2\frac{1}{7}, 2\frac{2}{7}, 2\frac{3}{7}$. И так далее до бесконечности.

Последовательность, расположенная между 2 и 3.

---

[13] Можно заметить, что это рассуждение общностью не обладает. Но здесь есть предчувствие непрерывности числовой прямой.

$$\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8},\sqrt[3]{9},\sqrt[3]{10},\sqrt[3]{11},\sqrt[3]{12},\sqrt[3]{13},\sqrt[3]{14},\sqrt[3]{15},\sqrt[3]{16},\sqrt[3]{17},\sqrt[3]{18},\sqrt[3]{19},\sqrt[3]{20},$$

$$\sqrt[3]{21},\sqrt[3]{22},\sqrt[3]{23},\sqrt[3]{24},\sqrt[3]{25},\sqrt[3]{26},\sqrt[4]{17},\sqrt[4]{18},\sqrt[4]{19},\sqrt[4]{20},\sqrt[4]{21},\sqrt[4]{22},\sqrt[4]{23},\sqrt[4]{24},\sqrt[4]{26}.$$

И так далее до бесконечности[14]. В этих последовательностях нет движения, отметим, что здесь нет пропорциональности или закона прогрессии. Так определена эта последовательность»[15] [429, с. 104].

Штифель показал, что множество рациональных и множество алгебраических иррациональных чисел на единичном отрезке бесконечно и счётно. Более того, его пример можно интерпретировать и как демонстрацию плотности этих чисел.

Далее Штифель переходит к трактовке иррациональных чисел Евклидом.

Теоретико-множественные идеи Штифеля продолжил Галилео Галилей (1564-1642). Прошло сто лет, в математику пришёл эксперимент, связь с механикой, физикой, астрономией. Рассуждение Галилея о числах опирается на примеры из оптики и механики. В 1633 году в книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук», в главе «День первый», Галилей пишет: «Если я теперь спрошу вас, сколько квадратов, то можно по справедливости ответить, что их столько же, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень и каждый корень имеет свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня и ни один корень более одного квадрата.

Но если я спрошу, далее, сколько корней, то вы не станете отрицать, что их столько, сколько чисел вообще, потому что нет ни одного числа, которое не могло бы быть корнем какого-либо квадрата; установив это, приходится сказать, что квадратов столько же, сколько всех чисел, так как столько же корней, а корнями являются все числа. А между тем ранее мы сказали, что всех чисел больше, чем квадратов, так как большая часть их не квадраты. Действительно, число квадратов непрерывно и в весьма большой пропорции убывает по мере того, как мы переходим к большим числам; так, из чисел до ста квадратами являются десять, т.е. одна десятая часть; до десяти тысяч квадратами будет лишь одна сотая часть; до одного миллиона – только одна тысячная часть. А в отношении бесконечного числа, если бы только мы могли постичь его, мы должны были бы сказать, что квадратов столько же, сколько всех чисел.

Поскольку бесконечно много чисел вообще, бесконечно много квадратов, бесконечно много корней, то ни множество квадратов не меньше множества всех чисел, ни последнее не больше первого; в конечном выводе – свойства равенства, а также большей и меньшей величины, не имеет места там, где дело идёт о бесконечности, и применимы только к конечным количествам» [19, с. 141].

[14] Обозначения современные, Штифель для обозначения корней разной степени использовал коссические знаки.
[15] Перевод Синкевич.

Далее [там же, с. 142-148] Галилей рассуждает о непрерывности, континууме и возможности сравнения бесконечного количества чисел, обращаясь к примерам физики.

Но должно было пройти ещё двести сорок лет, прежде чем эти идеи нашли своё воплощение в работах Дедекинда и Кантора. о непрерывности, континууме и возможности сравнения бесконечного количества чисел, обращаясь к примерам физики.

Но должно было пройти ещё двести сорок лет, прежде чем эти идеи нашли своё воплощение в работах Дедекинда и Кантора.

1.4 Закон непрерывности от Аристотеля до Лейбница

«Супруга Фридерика Перваго Прусскаго писала
к супруге Георгия Перваго в Ганновер:
“Лейбниц провёл вчера
вечер со Мною, и ни о чём другом не говорил,
как только о безконечно малых.
Увы! Кто может их знать лучше Меня?”»
[133, с. 98]
Орфография первоисточника сохранена.

Непрерывное и дискретное входило в круг внимания учёных с античности. В Древней Греции философы рассматривали вопрос делимости пространственно-временных объектов. Демокрит, Левкипп, Лукреций склонялись к атомизму, дискретному представлению о мире; Аристотель различал следующее по порядку, соприкасающееся и непрерывное. Парменид и Гераклит утверждали непрерывность бытия. Апории Зенона Элейского (490 до н. э. – 430 до н. э.) показали противоречивость представлений о непрерывном и дискретном. Из 40 его апорий до нас дошли только четыре: Ахиллес и черепаха, Дихотомия, Стрела, Стадион.

Литература, посвящённая преодолению парадоксов (апорий), неисчислима. Благодаря этим апориям не угасает интерес к проблеме непрерывности пространства–времени–движения.

Первым при анализе апорий Зенона предложил принцип непрерывности Аристотель в книге «Физика». По Аристотелю, непрерывность – это определённый тип связи элементов системы, иной, нежели два других типа связи – последовательность и касание. Последовательность есть условие смежности (касания), а она, в свою очередь, есть условие непрерывности. Если предметы соприкасаются, но при этом сохраняют каждый свои края, так что соприкасающиеся границы не сливаются в одну общую, то мы имеем дело со смежностью; если же граница двух предметов (отрезков линии, «частей» времени и т.д.) оказывается общей, то тут речь идет о непрерывности. «Я говорю о непрерывном, – пишет Аристотель, – когда граница, по которой соприкасаются оба следующих друг за другом предмета, становится для обоих одной и той же и, как показывает название, не прерывается...» [3, т. III, с. 167]. Подлинно непрерывным Аристотель считал то, что непрерывно по движению. Говоря об апории Зенона «Дихотомия», Аристотель приводит своё толкование непрерывности: «Если, взявши от конечной величины определенную часть, снова взять ее в той же пропорции, т.е. не ту же самую величину, которая взята от целого, то конечную величину нельзя пройти до конца; если же настолько увеличивать пропорцию, чтобы брать всегда одну и ту же величину, то пройти можно, так как конечную величину всегда можно исчерпать любой определенной величиной» [там же, т. III, с. 118]. Это совпадает с принципом отношений Евдокса. Отношение величин и число рассматривались как разные объекты.

Философы Средних веков обогатили анализ непрерывного и дискретного развитием логики, углублением понятий континуума, бесконечности, введением логических квантификаторов. Назовём Фому Аквинского (1225/6–1274), Дунса Скотта (1265/6–1308), Уильяма Оккама (1281–1348/9), Томаса Брадвардина (1290–1349), Жана Буридана (1300–1358).

Лейбниц сначала находился на позициях Декарта в том, что пространство и время состоят из точек и моментов типа «здесь» и «теперь». Но после 1676 года он пришёл к иной концепции: «До обозначения нет никаких точек... Нет точек, линий, поверхностей, т.е. вообще оконечностей, кроме тех, которые возникают при делении: и в непрерывности нет частей, пока они не созданы делением. Но никогда не осуществляются все деления, какие только осуществимы...» [67, т. 3, с. 250]. В 1692 году Лейбниц писал Фуше о необходимости признания принципа непрерывности Аристотеля: «Вы правы, говоря, что коль скоро все величины могут делиться до бесконечности, не существует такой величины, сколь угодно малой, которая в свою очередь не могла бы быть разделена на еще меньшие части, число которых бесконечно… Впрочем, я не нахожу ничего дурного и в предположении, что эта делимость может быть в конце концов исчерпана, хотя и не вижу в этом никакой нужды» [там же, т. 3, с. 287].

Лейбниц рассматривал континуальность применительно к пространству и времени. Полемизируя с Галилеем, он пишет в 1676 году: «Я думаю так: нет такой части материи, которая не была бы актуально разделена на множество частей, и, следовательно, нет столь малого тела, в котором не содержался бы мир бесчисленных творений... Таким образом, и тело, и пространство, и время актуально подразделены до бесконечности» [там же, т. 3, с. 256].

Точка зрения Лейбница на континуум изменялась, что отмечает А.П. Юшкевич: «Великий философ и математик высказывал в разное время различные мнения о сущности исчисления бесконечно малых. Иногда, например, он рассматривал дифференциал dx как конечный, но крайне малый отрезок, по крайней мере, пропорциональный конечному отрезку. Очень часто, особенно в более поздние годы жизни, он отзывался о бесконечно малых как об идеальных вещах и понятиях, как об удобных в эвристическом отношении фикциях, результаты применения которых можно, если угодно, получить с помощью строгого доказательства исчерпыванием. Наконец, у него имеется и та мысль, что бесконечно малые суть величины, меньше всякой конечной величины, хотя и не нулевые, величины “несравнимые” в том смысле, что на какую бы конечную величину их ни умножить, результат не будет конечной величиной» [146, с. 14-15].

Лейбниц называл проблему континуума «узлом, который никто не развязал: «Ни Аристотель, ни Галилей, ни Декарт не могли обойти этот узел: один его скрыл, другой оставил неразвязанным, третий разрубил» [67, т. 3, с. 246]. Пытаясь объяснить непрерывность движения, Лейбниц приходит к необходимости ввести чередование покоя и скачков: «Всё, что движется, меняет место, находится в два смежных момента в двух противоположных одно другому состояниях. Что изменяется непрерывно, у того за любым моментом пребывания в одном состоянии непосредственно следует момент пребывания в другом состоянии. В частности, если тело находится в непрерывном движении, то за каждым моментом его пребывания в одной точке пространства непосредственно следует момент пребывания в другой точке пространства. Эти две точки пространства или ничем не отделены одна от другой, или отделены. Если не отделены, то отсюда следует, что линия состоит из точек, так как этими переходами от одной точки к другой исчерпывается прохождение по всей линии. Но предположение, что линия состоит из точек, приводит к нелепости. Если же точки отделены одна от другой, то тело, переходя от одной к другой в один момент, или окажется находящимся одновременно в обеих точках и в промежутке между ними, то есть во многих местах, что нелепо; или перейдёт от одного конца промежутка к другому скачком, минуя самый промежуток, что также нелепо. Итак, тело не движется непрерывно, но состояние движения и покоя чередуются. Но промежутки, в которых тело движется, в свою очередь, должны содержать движение либо непрерывное, либо чередующееся с состоянием покоя, и так без конца. Следовательно, или мы где-нибудь встретим чистое непрерывное движение, которое, как мы уже показали, невозможно, или мы должны будем признать, что вообще не остаётся никакого движения, кроме моментального, а всё прочее – состояние покоя. Итак, мы снова пришли к моментальному движению, то есть к скачку, которого хотели избежать» [там же, т. 3, с. 257–258].

Приведём также фрагмент из «Двух отрывков о принципе непрерывности»:

«Этот принцип может быть сформулирован следующим образом: когда различие между двумя случаями, представляющимися в том, что дано или допускается, может уменьшаться таким образом, что оно становится меньше всякой величины, то необходимо, чтобы и различие между соответственными случаями, представляющимися в искомых или в выводах, вытекающих из того, что дано или допускается, уменьшалось таким образом, чтобы оно становилось меньше всякой величины. Или, выражаясь яснее: когда случаи (или данные) непрерывно приближаются друг к другу так, что, наконец, один переходит в другой, то необходимо, чтобы и в соответственных следствиях или выводах (или в искомых) происходило то же самое. Это вытекает из еще более общего принципа: когда данные следуют одно за другим в определенном порядке, то и искомые следуют одно за другим в определенном порядке» [там же, т. 1, с. 203–204].

Из письма к Вариньону: «Но если непрерывность есть необходимый постулат (requisitum) и отличительный признак истинных законов сообщения движения, то можно ли еще сомневаться в том, что все явления подчинены закону непрерывности, или в том, что они разумно могут быть объяснены только по истинным законам сообщения движения. Поскольку, как я считаю, этот закон создает совершенную непрерывность в плане последовательности, он создает нечто подобное и в плане одновременности, что дает нам заполненную реальность и позволяет относить пустые пространства к области вымысла. В явлениях, существующих одновременно, имеет место и последовательность, хотя воображение замечает одни только скачки: ведь большое число явлений кажется нам абсолютно несхожими и разъединенными, но, когда мы пристальнее присмотримся, мы найдем их внутренне совершенно схожими и едиными. Если мы видим лишь внешние контуры парабол, эллипсов и гипербол, то мы можем подумать, что между этими кривыми существует значительное отличие. А между тем мы знаем, что они внутренне связаны, так что невозможно найти между двумя из них какое-либо промежуточное пространство, которое позволило бы нам более неуловимым образом перейти от одного к другому» [там же, т. 1, с. 211–214].

С.С. Демидов выделяет два аспекта принципа непрерывности у Лейбница: первый, заключённый в словах: «если упорядочены данные, то упорядочены и искомые. Говоря языком алгебры, если в одной формуле высшей характеристики выразить какое-либо одно существенное для универсума явление, то в такой формуле можно будет прочесть последующие, будущие явления во всех частях универсума и во все строго определённые времена» – отсюда происходит понимание непрерывности Эйлером. И второй аспект, заключённый в словах из письма к Вариньону: «когда различие между двумя случаями, представляющимися в том, что дано или допускается, может уменьшаться таким образом, что оно становится меньше всякой величины, то необходимо, чтобы и различие между соответственными случаями, представляющимися в искомых или в выводах, вытекающих из того, что дано или допускается, уменьшалось таким образом, чтобы оно становилось меньше всякой величины» – привёл к трактовке Больцано–Коши. Демидов указывает на связь принципа непрерывности Лейбница с пониманием непрерывности Эйлером, и далее Больцано и Коши: «Нет оснований сомневаться в том, что это понимание и соответствующий термин также восходят к лейбницевскому «закону непрерывности», но уже к первой из приведённых выше его трактовок» [32, с. 37-38].

1.5. История геометрических представлений комплексных чисел

Развитие понятия числа имеет длинную историю. В античности числом называлось только натуральное число: 1, 2, 3,…, были известны аликвотные дроби и пропорции, которые назывались ratio – отношения, и представляли собой отношения натуральных чисел. В античной Греции обнаружилось, что существуют величины, которые не могут быть выражены никаким отношением, например, диагональ единичного квадрата. Их вычисляли приближённо, с помощью метода исчерпывания. Коэффициенты уравнений, корни уравнений могли быть только положительными. Если при решении задач возникала отрицательная величина, она считалась не имеющей смысла, так как количество не может быть менее чем ничто, но иногда говорили, что в коммерческом смысле это может означать долг. В России XVIII века отрицательные числа называли убыточными [143, с. 10]. Поэтому при решении уравнений отыскивали только положительные корни. Так было до эпохи Возрождения.

Отрицательное число не признавалось полноценным математическим объектом также потому, что для величин должно было выполняться правило пропорции (ratio): если левая часть есть отношение меньшего к большему, то и правая часть пропорции также должна быть отношением меньшего к большему. Но для пропорции вида $\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$ это не выполнялось. Кроме того, количество не могло быть менее, чем ничего, относилось ли это к натуральным или рациональным (ratio) числам.

В 1494 год Лука Пачоли (1445-1517) написал трактат «Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций» («Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità»), в котором собрал сведения по арифметике, которыми обладали европейцы и индийцы.

В 1544 году Михаил Штифель впервые[16] сказал, что отрицательные числа – это числа, меньшие нуля (ниже нуля) [132, с. 94]. С этого момента постепенно начинает формироваться представление о числовой шкале, на которой положительные числа расположены вправо от нуля по возрастанию, а отрицательные числа – влево от нуля по убыванию. В XVII веке это нашло отражение в хронологической шкале – впервые разнородные хронологии были приведены к шкале, имеющей точку отсчёта, положительное направление (от Р.Х.) и обратный отсчёт (до Р.Х.) – Жозеф Жюст Скалигер (1540-1609) и Дионисий Петавиус (1583-1652). В 1742

[16] Подобное высказывание есть также в трактате 1484 г. Никола Шюке *Le triparty en la science des nombres*, но он был опубликован только в 1880 году, хотя его идеи были известны.

году шведский астроном Андерс Цельсий (1701—1744) создал температурную шкалу с нулём как точкой отсчёта. Современный вид шкала приобрела благодаря К. Линнею[17].

До XVII века движение рассматривалось только как равномерное по прямой или окружности. Более сложные траектории движения появились в XVII веке. Описывать неравномерное движение стало возможным после создания математического анализа. Механическая интерпретация отрицательного числа появляется впервые у Дж. Валлиса, который описал пример перемещения по прямой сначала вперёд на 5 ярдов, а затем назад на 8 ярдов [444, с. 265].

1545 г. «Великое искусство» Джероламо Кардано. 1545 год считается годом открытия комплексных чисел. Джероламо Кардано, исследуя решение кубического уравнения, пришёл в промежуточных выкладках к случаю мнимых корней вспомогательного уравнения, которые затем уничтожались. Он искал только положительные корни, отрицательные называл невозможными, а корни из отрицательных величин – поистине софистическими [207]. Напомним, что в те времена совсем не было ни алгебраической символики, ни формул. Правила излагались словами. Вот перевод страницы из «Великого искусства» Кардано, глава XXXVII (De regula falsum ponendi – правило ложного положения, отрицательное неизвестное): «Второй вид ложного решения заключается в корне из отрицательного количества (per radicem *m*). Я приведу пример. Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые по перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножении, скажем, 40, - как я объяснял это тебе в главе о действиях в 4-й книге; тогда останется $m:15$; если взять от этого R и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут: $5p:Rm:15$ и $5m:Rm:15$» [207, с. 67 (287)].

Здесь Кардано рассматривает уравнение $x(10-x)=40$, или $x^2+40=10x$ (уравнение должно было быть записано так, чтобы коэффициенты были положительны). Кардано решает его согласно своему правилу, в современной записи: $x=5\pm\sqrt{25-40}=5\pm\sqrt{-15}$. Двоеточие тогда использовалось вместо точки. Кардано показывает, что произведение корней равно 40. В тексте p означает plus, плюс; m означает minus, минус; R означает radix, корень; $5p:Rm:15$ означает $5+\sqrt{-15}$; $5m:Rm:15$ означает $5-\sqrt{-15}$; $25m:m:15$ quod est 40 означает $25-(-15)=40$. Кардано использует тот факт, что комплексно сопряжённые корни при сложении дают действительное число. История открытия формулы решения кубического уравнения описана в книгах [399, 188, 34, 25].

[17] Термометры изобретались и ранее, но на их шкалах не было разметки ниже нуля (реперной точки).

1572 г. «Алгебра» Рафаэля Бомбелли. В 1572 году последователь Кардано, инженер-гидравлик Рафаэль Бомбелли (1526-1572), написал книгу «Алгебра» [184], в которой впервые ввёл правила арифметических операций над отрицательными числами, и рассмотрел решение кубического уравнения в случае корней из отрицательных величин. Решая такие уравнения, где во вспомогательных уравнениях под знаком кубического радикала удавалось выделить куб суммы либо разности, а значит, и извлечь кубический корень, Бомбелли показал, что корни из отрицательных величин взаимно уничтожатся, так как слагаемые являются взаимно сопряжёнными. Бомбелли указал на возможность определить отношение равенства, сумму и произведение комплексных чисел. Но ни физического, ни геометрического смысла у корней из отрицательных величин ещё не было. Бомбелли, как инженер-гидравлик, относился к ним как к полезной вспомогательной конструкции.

1637 г. «Геометрия» Рене Декарта. В 1637 г. Рене Декарт (1595-1650) издал свою «Геометрию, в которой назвал мнимые корни «воображаемыми» (imaginariae). Там же впервые появился термин «действительный корень». Отрицательные корни он называл ложными. Мнимые корни появлялись у Декарта в решении задачи о пересечении окружности с параболой. Декарт рассматривает случаи их пересечения, касания и тот случай, «когда окружность не пересекает параболы ни в одной точке, то это означает, что уравнение не имеет ни истинных, ни ложных корней и что все они воображаемые». «Не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням» [31, с. 85].

1685 г. «Алгебра» Джона Валлиса. Первым математиком, попытавшимся дать геометрическую и физическую интерпретацию отрицательным и мнимым числам, был Джон Валлис. Это было в 1685 году в его трактате «Алгебра». Отрицательные числа он поясняет на задаче о перемещении: «Но если, продвинувшись вперёд на 5 ярдов в *B*, он пройдёт обратно на 8 ярдов в *D*, и будет спрашиваться, насколько он продвинулся вперёд, когда попал в *D*, или сколько это по ходу движения из *A*, то я скажу: – 3 ярда (так как +5 – 8 = –3). Иными словами, он продвинулся вперёд на 3 ярда меньше, чем ничто. Уместность этой речи сомнительна (так как не бывает меньше, чем ничто). И, следовательно, если [рассматривать движение] по линии AB вперёд, то этот случай невозможен». Мнимые – как стороны утраченного квадратного земельного поля [444, с. 265]. Мнимая величина для него есть «средняя пропорциональная между положительной и отрицательной величиной». На его рисунке мы видим, что мнимое число представляет собой отрезок касательной BP. Вот рассуждение Валлиса: «Глава LXVII. Представление того же геометрически.То, что уже было сказано о $\sqrt{-bc}$ в алгебре (как о среднем пропорциональным между положительным и отрицательным количеством), можно проиллюстрировать геометрически.

Если, например, вперёд от *A* я возьму $AB = +b$, а вперёд оттуда $BC = +c$ (составим $AC = +AB + BC = +b + c$, диаметр круга), тогда синус (полухорда), или среднее пропорциональное, $BP = \sqrt{+bc}$.

Но если я возьму $AB = -b$ в обратную сторону от *A*, а потом возьму $BC = +c$ вперёд от этого *B* (составим $AC = -AB + BC = -b + c$ как диаметр круга), тогда касательная будет средним пропорциональным $BP = \sqrt{-bc}$.

Так как $\sqrt{+bc}$ означает синус (полухорду), $\sqrt{-bc}$ будет обозначать тангенс (касательную) той же дуги *AP* от той же точки *P* до того же диаметра *AC*. <…>.

Это требует новых невыполнимостей в алгебре (которые не встречались в линейных уравнениях), не только отрицательных корней, и количеств, меньших, чем ничто, но и корней из отрицательных квадратов. Чего, строго говоря, быть не может: так как нет действительных корней (положительных или отрицательных), которые, будучи умножены сами на себя, дадут отрицательный квадрат.

Эта неосуществимость в алгебре аргументируется неосуществимостью рассмотренного случая в геометрии; и так как точка *B* не может (по нашему предположению) лежать на прямой *AC*, как бы ни располагать её (спереди или сзади) от *A*.

Так что, вопреки случаю отрицательных корней, мы должны сказать, что точку *B* невозможно найти, если предполагать её положение на *AC* впереди, но сзади от *A* может быть такой же отрезок: сейчас мы должны сказать, что для случая отрицательного корня точка *B* не может быть найдена, как предполагалось, на прямой *AC*, но она может быть выше этой линии в той же плоскости.

На чём бы я хотел бы особенно настаивать, так как понятие (я полагаю), новое, и это явное заявление, как я сейчас думаю, предназначено развить идею того, что мы называем *мнимыми корнями* квадратного уравнения.

Но когда мы приводим квадратное уравнение не к отрицательной величине, относительно которой мы говорили ранее, но к так называемой мнимой величине, это всё равно, что сказать, что точка *B* не может находиться на прямой *AC*, как мы предполагали, но, вне этой линии, она может находиться (на той же плоскости), на таком же расстоянии выше прямой *AC*» [там же, с. 266-268].

К сожалению, предположение Валлиса о том, что комплексные числа расположены не на прямой, а на комплексной плоскости, осталось непонятым современниками. Для того, чтобы число стало математическим объектом, нужно было определить отношения (равенство, больше, меньше, то есть порядок) и операции над объектами. Но было неясно, всегда ли операция над комплексными числами приведёт к числу такого же вида, то есть $x + y\sqrt{-1}$.

*1702 г., Г. Лейбниц.*Лейбниц попытался это показать в 1702 г., но потерпел неудачу. В статье «Наглядное доказательство нового анализа для познания бесконечности по отношению к суммам и квадратурам», раскладывая двучлен $x^4 + a^4$ на множители, Лейбниц пришёл к результату $x^4 + a^4 = \left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$ и сделал вывод, что существуют мнимости другого вида. Он назвал мнимые числа idealis mundi monstro[18] [368, с. 216].

1712 год. Логарифм отрицательного и мнимого числа. До 1702 года мнимые числа рассматривались лишь как корни из отрицательных величин. В 1702 году Иоганн Бернулли столкнулся с проблемой вычисления логарифма комплексного числа. К 1712 году Бернулли и Лейбниц спорили по поводу того, чем является логарифм отрицательного числа. Для положительного числа a справедливо $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$. Продолжая рассуждение, можно заключить, что $\ln i = \ln\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\ln(-1)$. Но чему равен $\ln(-1)$? Лейбниц полагал, что он должен быть комплексным. Бернулли, а потом и Даламбер, считали, что вещественным. Английский математик и астроном Р. Котс (Cotes, 1682-1716) в работе «Измерения отношений» (Logometria) 1714, опубликованной в Philisophical Transactions в 1717 г., поместил формулу $\ln(\cos x + i\sin x) = xi$, высказанную такими словами: «Если какая-либо дуга четверти круга, описанного радиусом *CE*, имеет синус *CX* и синус дополнения до четверти *XE* и если принять радиус *CE* за модуль, то дуга будет мерой отношения $EX + XC\sqrt{-1}$ к *CE*, умноженной на $\sqrt{-1}$ ». Котс не дал ей каких-нибудь применений.

В 1749 году Эйлер обосновал её, подтвердив правоту Лейбница. Сейчас мы знаем эту формулу в виде $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\varphi + 2k\pi i$.

*1707 и 1722 годы. Тригонометрическое представление Абрахама Муавра.*В 1707, а затем в 1722 году у Абрахама Муавра появилась тригонометрическая интерпретация комплексного числа. Кубические и выше уравнения решались не только алгебраическим, но и тригонометрическим способом, с помощью синусов кратных дуг [391, с. 2368-2371]. Известен эпизод с Франсуа Виетом, в 1594 г. решившим этим способом уравнение 45-й степени. Используя известные соотношения, Муавр пришёл к формуле возведения в степень и извлечения корня натуральной (до 7-й) степени из комплексного числа. Интересно, что он рассматривал дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$, а затем дуги гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, что привело его

[18] Itaque elegans et mirabile effugium repetir in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non-Ens Amphibio, quod radicem imaginariam appellamus - То, что мы называем мнимым корнем – это изысканное и замечательное изобретение в этом удивительном анализе, прообраз мирового чуда, амфибия между бытием и небытием.

к идее мнимой подстановки $y = v\sqrt{-1}$ [392]. Но, даже представив комплексное число в тригонометрической форме, Муавр не изображал его на плоскости.

Л. Эйлер. В 1730-1740-х годах в Петербурге Эйлер разработал основы теории функций комплексного переменного. В своих работах Эйлер переходил от координат точки (x, y) к комплексному числу $p = x \pm \sqrt{-1}y$, представлял его в полярных координатах $p = s(\cos\omega \pm \sqrt{-1}\sin\omega)$. Это представление использовали после Эйлера Лагранж и другие математики в двумерных задачах матфизики, но тогда ещё не было ни геометрического, ни тем более физического представления операций над комплексными числами. В 1743 году Эйлер создаёт метод решения линейных дифференциальных уравнений высших порядков, в котором при решении характеристических алгебраических уравнений возникают мнимые числа. При этом общее решение уравнения действительно [247].

В 1748 Эйлер доказал формулу Муавра для всех действительных n. Сейчас её доказывают как следствие из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Эйлер опубликовал эту формулу в статье 1740 года и в VII главе книги «Введение в анализ бесконечно малых» (Introductio in analysin infinitorum, 1748 г.)[19].

Понятие комплексного числа постигалось Эйлером постепенно. Большое число наблюдений собственных математических исследований не всегда находило геометрическую либо физическую интерпретацию. А.И. Маркушевич обратил внимание на такой факт. В 1741 году Эйлер в письме к Гольдбаху (9.XII. 1741) сообщает: «Я нашёл также недавно замечательный парадокс, а именно, что значение выражения $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ весьма близко к $\frac{10}{13}$ и эта дробь отличается только в миллионных долях от действительной. Истинное значение этого выражения есть косинус дуги $0{,}6931471805599...$». Смысл этой цитаты становится ясным, если представить $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ в виде $\frac{e^{+\sqrt{-1}\ln 2} + e^{-\sqrt{-1}\ln 2}}{2}$, что по формуле Эйлера из «Введения в анализ бесконечно малых» $\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ даёт $\cos\ln 2$. Значение $\ln 2$ и приводится Эйлером [73, с. 18].

1749/51 гг., Эйлер. Эйлер в статье «Исследованиях о мнимых корнях уравнений» (Recherches sur les raciness imaginaires des équations. Mém. Ac. Berlin, (1749) 1751) рассмотрел вопрос о возможном виде комплексного числа. «Мнимым количеством называют такое, которое ни больше нуля, ни меньше нуля, ни равно нулю; это, следовательно, нечто

[19] Euler L. Cap.VIII. De quantitatibus transcendentibus ex Circulo ortis // Introductio in analysin infinitorum. – 1748. Vol. 1. C. 104.

невозможное, как, например, $\sqrt{-1}$ или вообще $a+b\sqrt{-1}$, поскольку такое количество ни положительно, ни отрицательно, ни нуль» [252, т. 6, с. 79]. Доказываемую им основную теорему алгебры Эйлер рассматривает как частный случай следующего предложения: «Всякое мнимое количество всегда образовано двумя членами, один из которых есть действительное количество, обозначаемое через M, а другой – произведение также действительного количества N на $\sqrt{-1}$; таким образом, $\sqrt{-1}$ есть единственный источник всех мнимых выражений» [Там же, с. 121].

Для доказательства Эйлер применил к числам вида $a+b\sqrt{-1}$ различные алгебраические и трансцендентные операции, известные в его время, и показал, что результат будет числом того же вида.

1752. Жан Лерон Даламбер. Условия Коши-Римана. В XVIII веке бурно развивалась гидродинамика. В 1752 г. Даламбер рассматривал плоское движение идеальной жидкости. В статье «Опыт новой теории сопротивления жидкостей» Даламбер определил скорость $f(x,y)=u(x,y)+v(x,y)\sqrt{-1}$, где функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – проекции скорости частицы жидкости на оси координат. Они связаны уравнениями $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, то есть $vdx+udy$ и $udv-vdy$ – полные дифференциалы, компактная запись $\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0$. В 1755 году Эйлер пришёл к тем же результатам, а позже установил, что действительная и мнимая часть любой аналитической функции необходимо удовлетворяют этим условиям.

В работах Эйлера была изложена теория элементарных функций комплексной переменной. Сейчас эти условия носят имена Коши–Римана, и являются условиями аналитичности функции. Для такой функции семейства кривых $u(x,y)=C$ и $v(x,y)=C$ взаимно ортогональны.

1768 г. Эйлер. «Универсальная Арифметика». Операции извлечения корня ещё долгое время представляли трудности. В «Универсальной арифметике» 1768 г. [143] Эйлер пишет: «Корни из отрицательных чисел ни больше, ни меньше, нежели ничего, и самое ничего они также не будут, ибо 0 умноженный на 0 в произведении даёт 0, и, следовательно, не отрицательное число.

Когда все возможные числа, которые только представить можно, суть больше или меньше нуля или самой 0,то то из сего видно, что корни квадратные из отрицательных чисел в число возможных чисел включены быть не могут, следовательно, суть числа *невозможные*. Сие обстоятельство ведёт нас к познанию таких чисел, которые по их свойству суть невозможные и обыкновенно *мнимыми* числами называются, потому что их в уме только представить можно» [143, с. 90, курсив Эйлера].

Но далее Эйлер проводит ошибочное рассуждение: «Но когда $\sqrt{a}$, умноженный на $\sqrt{b}$, даёт $\sqrt{ab}$; то $\sqrt{-2}$, умноженный на $\sqrt{-3}$, даст $\sqrt{6}$; равным образом $\sqrt{-1}$, умноженный на $\sqrt{-4}$, даст $\sqrt{4}$, то есть 2, откуда видно, что два невозможные числа, помноженные сами собою, произвести могут возможное или действительное число. Но когда $\sqrt{-3}$ умножен будет на $\sqrt{+5}$, то получится $\sqrt{-15}$, или возможное число, помноженное на невозможное, всегда невозможное производит» [там же, с 93]. Как видим, операции над комплексными числами ещё были неясны, но спустя 9 лет Эйлер исправил свою ошибку, дав определение $\sqrt{-1}$ как мнимости *i*, квадрат которой равен -1, то есть $\frac{1}{i}=-i$. Эйлер обсуждал вопрос о целесообразности мнимых чисел: «Наконец ещё сомнение разрешить надлежит, которое состоит в том, когда такие сила суть невозможны, то кажется, что они совсем не нужны, и учение сие за самую малость почесть можно. Но, несмотря на сие, оно в самом деле весьма нужно, ибо очень часто случаются такие вопросы, о которых скоро узнать нельзя, возможные ли они или невозможные? А когда решение их приведёт нас на такие числа невозможные, то сие значить будет, что и самый вопрос невозможен. Для изъяснения сего примером рассмотрим следующий вопрос: данное число 12 разбить на две такие части, которых бы произведение было 40? Сей вопрос когда по предписанным в следующих правилах решать будем, то найдём для двух искомых чисел

$6+\sqrt{-4}$ и $6-\sqrt{-4}$, которые, следовательно, суть невозможные: итак, из сего видно, что вопроса сего решить не можно. Ежели бы должно было число 12 разделить на такие две части, которые в произведении дали 35, то сии части были бы без сомнения 7 и 5» [там же, с. 94-95].

1777 г., Эйлер вводит символ i. В докладе «О формах дифференциалов углов, особенно с иррациональностями, которые интегрируются с помощью логарифмов и круговых дуг, Магистр естественных наук Академии представил 5 мая 1777 года», опубликовано в 1794 г., Эйлер впервые ввёл символ мнимой единицы *i* по первому слову imaginaire, которым Декарт называл мнимые числа.

«Рассмотрим и исследуем дифференциальную формулу $\frac{\partial\Phi\cos\Phi}{\sqrt[n]{\cos.n\Phi}}$, интеграл от логарифма дуг окружностей. Решение. Для этого мне представляется доступным ещё один способ, который однако требует мнимой единицы $\sqrt{-1}$, которую в дальнейшем мы будем обозначать буквой i, так что $ii = -1$, или, что то же, $\frac{1}{i} = -i$. Прежде всего заметим, что значение нашей формулы – это $\cos.\Phi$ – можно заменить двумя частями $\partial p = \frac{\partial\Phi(\cos.\Phi + i\sin.\Phi)}{\sqrt[n]{\cos.n\Phi}}$ и $\partial q = \frac{\partial\Phi(\cos.\Phi - i\sin.\Phi)}{\sqrt[n]{\cos.n\Phi}}$, и тогда наша формула может быть представлена как $\frac{1}{2}\partial p + \frac{1}{2}\partial q$, и тогда интеграл выразится как $\frac{p+q}{2}$ [251, с. 184].

В семидесятые годы Эйлер меняет своё отношение к мнимым числам. Из вспомогательного формализма они приобретают необходимый теоретический статус, получив определение ($i^2 = -1$) и описание свойств. Эйлер разработал теорию интегралов функции комплексного переменного, в том числе выделив *принцип симметрии*: «Вся теория мнимых, которым анализ теперь обязан столькими успехами, опирается главным образом на следующее основание: если Z есть какая-либо функция от z, которая после подстановки $z = x + y\sqrt{-1}$ принимает такой вид: $M + N\sqrt{-1}$, то по подстановке $z = x - y\sqrt{-1}$ та же функция $M - N\sqrt{-1}$, где буквы M и N означают всегда действительные количества» [250, раздельная пагинация: Математика. с. 3]. Отсюда следуют формулы Эйлера-Даламбера, или, как мы их теперь называем, формулы Коши-Римана.

Тогда же Эйлер применил функцию комплексной переменной к конформным (сохраняющим углы и подобие в малом) преобразованиям.

*1797/1799 г., Каспар Вессель.*Геометрическую интерпретацию комплексных чисел и действий над ними впервые дал норвежский геодезист-картограф Датской академии наук Каспар Вессель (1745-1818) в работе «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников» [452], поданной в 1797 и опубликованной в 1799 году на датском языке. Работа была им написана для картографов.

Вессель ввёл понятие направленного отрезка, определил сложение как параллельное смещение плоскости, а умножение – как вращение плоскости с растяжением. В §5 своей работы Вессель пишет: «Пусть $+1$ обозначает положительную прямолинейную единицу, а $+\varepsilon$ – некую другую единицу, перпендикулярную положительной единице и имеющую такое же происхождение. Тогда направляющий угол $+1$ будет равен 0°, для -1 будет равен 180°, для $+\varepsilon$ будет равен 90°, для $-\varepsilon$ будет равен -90° или 270°. В силу того правила, что направляющий угол произведения равен сумме углов сомножителей, мы будем иметь: $(+1)(+1) = +1$, $(+1)(-1) = -1$, $(-1)(-1) = +1$, $(+1)(+\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+1)(-\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1)(+\varepsilon) = -\varepsilon$,

$(-1)(-\varepsilon)=+\varepsilon$, $(+\varepsilon)(+\varepsilon)=-1$, $(+\varepsilon)(-\varepsilon)=+1$, $(-\varepsilon)(-\varepsilon)=-1$. Отсюда видно, что ε эквивалентен $\sqrt{-1}$ и отклонение произведения определяется так, что ни одно из общих правил этого действия не нарушается» [там же, с. 60]. Вессель показал, что комплексные числ, представленные направленными отрезками, подчиняются собственной непротиворечивой арифметике. Суммой двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ Вессель называет диагональ параллелограмма, построенного на сторонах направленных отрезков, соответствующих слагаемым, т.е. параллельное смещение плоскости вдоль $a+bi$. Умножение двух комплексных чисел $(a+bi)(c+di)=(a+bi)\rho e^{i\varphi}$, где $\rho e^{i\varphi}=c+di$ отражает вращение плоскости около точки O на угол φ с удлинением всех размеров в отношении $1:\rho$. Работа Весселя содержала основы векторного исчисления для двумерного пространства и была геометрической моделью комплексных чисел, но, к сожалению, она не была замечена ни в Дании, ни в Европе. Европейцы не читали её, потому что не знали датского языка, а датские академики не обратили на неё внимания. Только спустя столетие, в 1897 г. в Копенгагене отдельной книгой вышел её перевод на французский язык при редакционном участии Цейтена. Сейчас она доступна на английском языке в хрестоматии Смита [426, т. 3 с. 55-66]. Открытие Весселя не оказало никакого влияния на европейскую математику. В XIX веке геометрическая интерпретация комплексного числа была вновь открыта Арганом, и развита в работах Гаусса, Грассмана, Гамильтона и других учёных.

1806, 1813/14. Жан Робер Арган (1768-1822). В 1806 году во Франции управляющий книжным магазином Жан Робер Арган (1768-1822) анонимно издал брошюру «Опыт некоторого способа представления мнимых величин в геометрических построениях» [164]. Арган весьма полно разработал геометрическую теорию комплексного числа, сделав те же выводы, что и Вессель. В частности, он заметил, что при умножении комплексных чисел их аргументы складываются (Арган, с. 20), а модули растягиваются. Арган ввёл так называемые диаграммы Аргана, изображающие операции умножения, возведения в степень и извлечения корня из комплексного числа

Арган близко подошёл к понятию тригонометрических многочленов Чебышева (наименее уклоняющихся от нуля) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ и т.д., т.е. $F_1(x)=x$, $F_2(x)=2x^2-1$, $F_3(x)=4x^3-3x$ и т.д.

Работа Аргана была переиздана в 1813/14 году Ж. Жергоном в 4-м томе журнала «Annales de mathématiques pures et appliquées» (том IV, 1813-1814, с. 61) вместе с его новой статьёй [там же, с. 133] в 5-м номере (т. V с. 197). Появились и другие работы на эту тему, о них пишет Ганкель.

1821 А. Коши (1789-1857). Analyse algébrique. В 1821 году Огюстен Коши читал курс анализа в Политехнической школе. Известно, что его студенты бурно протестовали против преподавания комплексных чисел, полагая эти знания бесполезными. Изложение этой темы в *Analyse algébrique* формально: Коши рассматривает действия над комплексными числами как операции над алгебраическими символами, что потом высмеивал Ганкель: теоремы сложения, тригонометрическая форма, арифметические действия над алгебраической формой, сводимость алгебраической формы к тригонометрической и обратно; возведение в степень и извлечение корня. Правда, Коши впервые даёт формулу $(\cos\vartheta+\sqrt{-1}\sin\vartheta)(\cos\vartheta-\sqrt{-1}\sin\vartheta)=1$, а также обращает внимание на периодичность комплексного числа [208, с. 173]. У Коши нет геометрической интерпретации комплексных чисел и операций над ними. Но это был учебный курс, а не научное исследование. Позже, в 1829-32 годах Коши сделал величайший вклад в теорию функций комплексной переменной – создал теорию вычетов.

1831 г. Карл Фридрих Гаусс. «Теория биквадратичных вычетов». Гаусс (1777–1855) был одним из самых скрытных учёных своего времени. Он знал всё, но публиковал очень немногое. Понимание геометрической природы комплексных чисел неявно присутствует ещё в его диссертации 1799 года, но строгое построение алгебры комплексных чисел сделано в «Теории биквадратичных вычетов» 1831 года. Гаусс писал: «Трудности, которой считается окружённой теория мнимых величин, по большей части имеют своей причиной мало удачные наименования (некоторые снабдили их даже неудачно звучащим названием невозможных величин). Если бы, исходя из представлений, даваемых многообразием двух измерений (которые с большой ясностью проявляются при пространственных соображениях), называть положительные величины прямыми, отрицательные – обратными, а мнимые – к ним перпендикулярными величинами, то мы имели бы простоту вместо путаницы, ясность вместо туманности» [22, с. 704]. Он рассматривал числа на комплексной плоскости, ввёл понятие сопряжённого числа, нормы, выделил целые и рациональные комплексные числа. Так как целью Гаусса в это работе была теория чисел, то и комплексные числа он привлёк именно с этой целью. Благодаря тому, что некоторые простые числа оказались сомножителями комплексно сопряжённых чисел, например, $2=(1+i)(1-i)$, $5=(1+2i)(1-2i)$, $13=(3+2i)(3-2i)$, $17=(1+4i)(1-4i)$, Гауссу удалось раскрыть теоретико-числовые закономерности разложения чисел.

1841 г., Г. Грассман. Учение о протяжениях. Герман Грассман (1809–1877), учитель прусской гимназии, исследовал природу сложения и умножения комплексных чисел и на этой основе создал «Учение о протяжениях» (*Ausdehnungslehre*), изданном в 1844 и затем в 1862 г.

Исходя из принципов и «требований статики и механики» [270, с. 43] он вывел понятие n-мерного многообразия с системой операций. В частности, Грассман писал: «*Под произведением двух отрезков* a, b *мы понимает площадь образованного ими параллелограмма, имея в виду как величину, так и его положение*, то есть мы полагаем $ab = cd$ только в том случае, если параллелограмм, образованный отрезками a и b, не только равен по величине параллелограмму, образованному из отрезков c и d, но и лежит в параллельной с последними плоскости и имеет одно и то же направление [там же, с. 48]. <…> Если мы изменим местами факторы произведения ab, то смысл параллелограмма изменяется на обратный» [там же, с. 61]. Но сложность изложения и философский язык вместо математического надолго затруднили понимание его открытия, только к концу XIX века послужившего основой введения n-мерного векторного пространства, что сделано в работах Гиббса.

1843 г. У. Р. Гамильтон (1805-1865). Создание теории кватернионов. Сэр Уильям Роуэн Гамильтон (англ. William Rowan Hamilton; 1805–1865) – королевский астроном Ирландии, математик, механик-теоретик, физик-теоретик. С 1835 Гамильтон рассматривал алгебру ни как искусство, ни как язык, ни как науку о количестве, но скорее как науку о порядке в определённых рядах. Примером такого процесса является для него идеальное время, освобождённое от всех связей причинности и воздействий, так как оно по Канту является чистой интуитивной формой нашего внутреннего восприятия и лучше поэтому приспособлено, чем пространство, то есть форма нашего внешнего восприятия; во всяком случае, понятия «прошедшее», «настоящее» и «будущее» возникают в нашем сознании скорее, чем понятия «вперёд» и «назад» в пространстве; поэтому алгебра у него – это наука чистого времени. «Если геометрия опирается на интуицию пространства, то алгебра могла бы опираться на родственную интуицию времени» [20, с. 466]. Гамильтон определил вектор как перенос. Его символ i означает, во-первых, единичный вектор оси Ox, во-вторых, мнимую единицу, и, в-третьих, оператор вращения – верзор.

В 1835 году Гамильтон опубликовал работу «Теория алгебраических пар» [283], в которой дал новое построение теории комплексных чисел. Это была следующая форма $(z = (a, b))$ комплексных чисел после алгебраической $(z = a + bi)$, тригонометрической $(z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi))$ и показательной $(z = re^{i\varphi})$. Гамильтон рассмотрел комплексное число $x + iy$ как алгебраическую пару (x, y) действительных чисел, то есть устранил геометрический элемент и свел комплексные числа к чистой алгебре, что позволило перейти к новому уровню геометрического обобщения – поворот и растяжение на плоскости. Это дало возможность формализовать методы матфизики в задачах потока жидкости или тепла, гравитации, звуке, оптике. Но эти задачи решались в двумерном пространстве.

Гамильтон хотел распространить систему комплексных чисел на трёхмерное пространство, но обнаружил трудности с определением умножения – нарушался либо коммутативный закон, либо закон дистрибутивности. Это противоречило принципу перманентности эквивалентных форм Дж. Пикока, установленного в 1830 году: законы операций алгебры должны оставаться неизменными, что бы ни означали символы, над которыми совершается операция[20]. Кроме того, у Гамильтона ненулевые сомножители могли дать нулевое произведение. Гамильтон пришёл к выводу, что можно построить алгебру только для четырёхмерных чисел.

Внезапное озарение, как нужно перемножать четвёрки чисел, настигло его 16 октября 1843 года в Дублине на мосту Брумбридж через Королевский канал [20, с. 443]: «И вдруг меня осеняет сознание, что для вычислений с триплетами мы должны допустить в некотором смысле четвёртое измерение пространства, или, перенося парадокс в алгебру, должны допустить третий мнимый символ *k*, отличный от *i* и *j*, не смешивающийся с *i* или *j*, но равный произведению первого как множителя и второго как множимого. Поэтому я пришёл к вверению кватернионов». «Там и тогда я почувствовал гальванизирующий ток от приближающейся мысли, и искры, произведенные им, представляли собой фундаментальные уравнения между *i*, *j*, *k*, причем в точности такие, какие я с той поры всегда и использую». Гамильтон был настолько потрясён, что тут же на перилах моста нацарапал формулы $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Сейчас на мосту Брумбридж установлена мемориальная доска.

Как писал сам Гамильтон в 1843 году о вращении, «Т.к. $\sqrt{-1}$ является в определённом хорошо известном смысле линией, перпендикулярной к линии 1, то кажется естественным, что должна быть некоторая другая мнимость для выражения линии, перпендикулярной к обеим первым. Вот почему вращение от 1 к ней, будучи удвоенным, также приводит к -1, и она также должна быть корнем квадратным из отрицательной единицы, хотя его не должно смешивать с предыдущим. Обозначая старый корень, как это часто делают немцы, через *i*, а новый – через *j*, я исследовал, какие законы надо принять для умножения» [там же, с. 442].

Для открытых им «четырёхчленных чисел» Гамильтон ввёл название кватернионы – от лат. quaterni ‘по четыре’. Он записывал кватернионы как суммы вида $q = a + bi + cj + dk$, где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – три кватернионные единицы (аналоги мнимой единицы *i*), *a*, *b*, *c*, *d* – действительные числа. Предполагая умножение кватернионов дистрибутивным относительно сложения, Гамильтон свёл определение операции умножения кватернионов к заданию таблицы умножения для базовых единиц 1 , $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$:

---

[20] “§132. Law of the permanents of equivalent forms stated: Whatever form is algebraically equivalent to another, when expressed in general symbols, must be true, whatever those symbols denote” [400, c. 104].

$$\begin{array}{ccccc}
\times & 1 & i & j & k \\
1 & 1 & i & j & k \\
i & i & -1 & k & -j \\
j & j & -k & -1 & i \\
k & k & j & -i & -1
\end{array}$$

Из таблицы видно, что умножение кватернионов не является коммутативным (поэтому алгебраическая система кватернионов не является полем). Сложение векторов коммутативно, оно означает параллельный перенос пространства. Но результат выполнения двух трёхмерных поворотов при умножении зависит их порядка. Вращение вокруг начала координат в пространстве определяет некоторую ось, и потому растяжение с вращением, которое в случае плоскости требовало двух констант, в пространстве может быть охарактеризовано лишь четырьмя параметрами.

Теория векторной функции скалярного аргумента была развита Гамильтоном в 1846 г. Гамильтон ввёл также понятия коллинеарности и компланарности векторов, ориентации векторной тройки и др. Он ввёл понятие годографа, оператор «набла» и применил теорию к задачам небесной механики.

Появление векторного анализа. Теорию кватернионов Гамильтона, описанную им в 109 статьях, компактно изложил его ученик, шотландский математик Питер Тэт. Друг и соученик Тэта, Дж. К. Максвелл (1831-1879) увидел в теории кватернионов удобный аппарат для математического описания теории электричества и магнетизма, содержащейся в концепции поля и силовых линий, опубликованной Майклом Фарадеем в 1839-1855. Максвелл выделил из теории кватернионов собственно векторное исчисление. Это было сделано в работе «Трактат по электричеству и магнетизму» 1873 г. в разделе «Предварительные сведения». В работе Максвелла почти нет символики кватернионов, но из неё взято самое полезное для задач физики. Максвелл назвал вектор $-\left(i\frac{d\psi}{dx}+j\frac{d\psi}{dy}+k\frac{d\psi}{dz}\right)$ скатом или склоном функции ψ, используя слово «склон» (*slope*), чтобы указать направление (и величину) наиболее быстрого убывания ψ [283, с. 15], а для функции двух переменных – направление самого крутого склона поверхности. Термин *gradient* образован от латинского *gradior* – «идти вперёд». Термин вошёл в употребление в метеорологии, затем Максвелл заменил им свой the *slope of* ψ.

Со временем произошла замена квадрата мнимой величины $i^2=-1$ на скалярное произведение $(i,i)=1$. В 1880-х были написаны «Элементы векторного анализа» Гиббса [263], после чего Хевисайд (1903) придал векторному исчислению современный вид. Термин «векторный анализ» предложил Гиббс (1879) в своём курсе лекций. Изложение векторного исчисления Гиббса стало классическим [2].

Кватернионы по-прежнему используются в геометрии и физике, например в преобразовании Лоренца, там, где важно задавать трёхмерный поворот при помощи минимального числа скалярных параметров, такое описание никогда не вырождается.

Г. Минковский в докладе, сделанном 1 сентября 1908 г. на 80-собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кёльне, назвал совокупность вещественных x, y, z, t *миром* [83, сю 304].

*1867. Герман Ганкель. «Теория комплексных числовых систем».*В 1867 году вышла обобщающая книга Германа Ганкеля (1839-1873) «Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием Д-ра Германа Ганкеля». Ганкель делает исторический обзор и анализ комплексных чисел и их систем. Например, таких, где соблюдается закон коммутативности, но нарушается ассоциативность и дистрибутивность (работа Шеффлера[21] 1851 г.), системы комплексных чисел Киркмана, не подчиняющихся закону ассоциативности, связанные с операционным гипердетерминантом Кэли. Ганкель замечает, что «существует связь между теорией функций от комплексных чисел высшего порядка и так называемым операционным исчислением, попросту символической совокупностью определённых операций над числами» [21, с. 129]. Именно благодаря пересказу Ганкеля стала понятна и обрела признание работа Грассмана «Учение о протяжениях».

Ганкель высказал предположение: «Химическая формула может быть рассматриваема, как комплексное число, единицами которого служат химические обозначения элементов, а коэффициентами значки, показывающие кратные количества каждого из элементов. Химическому соединению соответствует в теории чисел операция умножения; элементам или собственным их атомным весам отвечают первоначальные множители, а химические формулы для разложения тел суть буквально то же самое, что и формулы для разложения чисел» [там же, с. 128]. Это было за два года до открытия Менделеевым периодического закона.

Ганкель сформулировал закон перманентности формальных законов: «Если две части логической формы, выраженные общими знаками универсальной арифметики, равны между собой, то они должны оставаться равными и тогда, когда знаки, их выражающие, перестают обозначать обыкновенные величины, и вследствие этого и сами операции получают уже некоторый другой, но определённый смысл» [там же, с. 20].

[21] Scheffler Hermann (1820-1903).

Заключение. Вещественные числа, теория которых развивалась от метода исчерпывания Евдокса до понятия непрерывной числовой области, созданной одновременно Мере, Гейне, Кантором, Дедекиндом и Вейерштрассом, была обобщена А.Н. Колмогоровым. Вещественные числа замкнуты относительно арифметических операций и упорядочены.

Появление мнимой единицы расширило множество вещественных чисел, образовав двумерное пространство – комплексную плоскость. Это тоже полная и единственная система, но в ней уже нет упорядоченности.

Кватернионы имеют размерность 4 и утрачивают коммутативность умножения. В 1898 году Адольф Гурвиц доказал, что система кватернионов также единственна. Кватернионы являются единственной конечномерной алгеброй с делением, которая содержит вещественные числа и не совпадает с вещественными или комплексными числами [4].

Понятие комплексного числа развивалось исходя из внутренней логики математики, а также исходя из потребностей прикладных наук – картографии, гидродинамики и других естественных наук. Исследования показали, что операции над комплексными числами отражают свойства движения в пространстве – поворот и растяжение.

Постепенно менялась картина мира: ньютонианская механистическая сменилась на релятивистскую, изменились и геометрические представления о пространстве. Математическая аксиоматика метрического пространства сформировалась в первые десятилетия XX века (Фреше и Хаусдорф). Мнимая составляющая комплексных функций приобретала физические смыслы проекции силы, реактивного сопротивления, потери энергии, составляющей коэффициента преломления, гармонического колебания.

Мы рассказали здесь главное течение истории развития понятия комплексного числа. Были и другие попытки интерпретировать комплексное число и операции над ним, не получившие признания. В конце XIX века в попытках расширить понятие комплексного числа возникли сложные многомерные системы, рассказ о которых за рамками этой статьи.

Развитие понятия комплексного числа послужило базой для теории функций комплексного переменного, операционных методов решения дифференциальных уравнений, неевклидовой геометрии, теории чисел, геодезии и картографии, математической физики, теории упругости, теории электромагнитного поля, электро- и магнитостатики, электродинамики, квантовой механики [4]. Комплексность отражает фундаментальные свойства мира – симметрию и цикличность.

Выводы к первой главе

Изучение источников, рассмотренных в первой главе, показывает, что интересующий нас аспект числа зародился в работе с геометрическими величинами в методе исчерпываний Евдокса, принципе Евклида и его усилении в методах Архимеда[22]. В период с XII по XIV век шёл процесс освоения античного наследия, в том числе абстрагирования и математизации физических понятий континуума, непрерывности, точки, линии и поверхности. Среди рассматриваемых утверждений были такие, как отсутствие последнего момента существования качества, но лишь возможность первого момента нового качества; между двумя примыкающими частями континуума нет ничего промежуточного; линия непрерывна лишь благодаря отрицанию чего-либо между её частями, что могло бы стать причиной разрыва между ними; время как континуум разделяется моментом таким образом, что либо в прошлом нет последнего момента, либо его нет в будущем в зависимости от того, к будущему или прошлому мы относим момент настоящего.

В работах Ж. Буридана, Т. Брадвардина, У. Оккама и Р. Суисета появились логические схемы, спустя столетия востребованные в построении математического анализа. Новые понятия: изменение, интенсивность, мгновенная скорость, постоянная величина, непрерывная величина, последовательность, упорядоченность, хотя и неформализованно, были введены схоластами, которые располагали эти величины на упорядоченных шкалах, между которыми есть соответствие. Была признана условность понятия точки в математическом смысле, признана идея самоподобия континуума, установлены первые парадоксы бесконечного. Буридан рассмотрел последовательность интервалов, в каждом из которых содержится точка континуума. Ещё не было понятия «направление» (возникло в математике только в XVIII в.), понятия вектора (кроме радиус-вектора точки). Впервые около 1300 г. на латыни появился термин «пространство». Благодаря схоластам многие новые понятия стали научными конструктами. Ещё не было понятий соседства, окрестности, сближения, сходимости, движения. Граница трактовалась как рубеж, ограничитель фрагмента физического материала. Как отдельное явление середины XIV века отметим описание Оремом различия между переменной и постоянной, описание трёх перпендикулярных осей, последовательное изменение интенсивности, представление величины линейного качества в виде площади и вычисление конечной площади бесконечной плоской фигуры. Замечательным в работах схоластов XIV века является то, что они обсуждали все гипотезы, к которым приводила их интуиция, но отвергали те из них, с которыми не согласовывался их научный опыт, к XIV веку довольно скромный.

[22] Величины могут находиться в отношении, если их разность, взятая кратно, может превзойти любую из них; позже: если их отношение приближается к единице.

Многие из идей, высказанных, но отвергнутых после обсуждения Оремом, Брадвардином и Буриданом, послужили конструктивной основой представлению о числе XVI века, понятию бесконечно малой XVII века, в анализе XIX века – понятию плотности, последовательности, границы, представлению о сечении, покрытии, упорядоченности, непрерывности

К чести открытий номиналистов следует отнести развитие тезиса Аверроэса о том, что математика не существует вне души, математические понятия следует отличать от соответствующих им физических понятий. Философы Средних веков обогатили анализ непрерывного и дискретного развитием логики, углублением понятий континуума, бесконечности, введением логических квантификаторов.

Следующей вехой в истории расширения числовой области были исследования М. Штифеля. Он впервые стал рассматривать отрицательные числа как числа, меньшие нуля, а положительные, как большие нуля; он упорядочил целые, рациональные и иррациональные величины относительно друг друга на числовой шкале и установил, что между двумя ближайшими целыми числами находится бесконечно много как дробей, так и алгебраических иррациональных чисел. Его пример можно рассматривать как демонстрацию плотности этих чисел. Теоретико-множественные идеи Штифеля продолжил Галилео Галилей, создав пример соответствия бесконечных числовых множеств.

Принцип непрерывности эволюционировал от Аристотеля до Лейбница, приведя к возникновению понятия бесконечно малой (Валлис, Лейбниц).

Формировалось представление о числовой шкале, на которой положительные числа расположены вправо от нуля по возрастанию, а отрицательные числа – влево от нуля по убыванию. Механическая интерпретация отрицательного числа появляется впервые у Дж. Валлиса.

Дж. Кардано (1545 г.) открыл мнимые числа, Р. Бомбелли (1572 г.) ввёл правила арифметических операций над отрицательными числами, указал на возможность определить отношение равенства, сумму и произведение комплексных чисел. Но ни физического, ни геометрического смысла у корней из отрицательных величин ещё не было. Первую попытку дать геометрическую и физическую интерпретацию отрицательным и мнимым числам сделал. Джон Валлис (1685 г.). Для того, чтобы число стало математическим объектом, нужно было определить отношения (равенство, больше, меньше, то есть порядок) и операции над объектами. Но было неясно, всегда ли операция над комплексными числами приведёт к числу такого же вида. А. Муавр (1707, 1722 гг.) дал тригонометрическую интерпретацию комплексного числа. Л. Эйлер (1730-1740 гг.) рассматривал комплексные числа как точки на координатной плоскости, он же ввёл символ *i* (1777 г.), ввёл трёхмерную систему координат. Геометрическая интерпретация комплексных чисел была предложена К. Весселем (1797 г.) и

Ж.Р. Арганом (1806 г.). Строгое построение алгебры комплексных чисел было сделано Гауссом (1831 г.), при этом Гаусс обратил внимание на тот факт, что теория была бы развита раньше, если бы математиков не отпугивали неудачные термины «невозможное», «мнимое», «фиктивное» число и пр. У. Гамильтон (1843 г.) на базе комплексных чисел создал теорию кватернионов, послужившую ступенью для создания Дж. Гиббсом (1881, 1884 гг.) векторного исчисления. Появление мнимой единицы расширило множество вещественных чисел, образовав двумерное пространство – комплексную плоскость. Понятие комплексного числа развивалось исходя из внутренней логики математики, а также исходя из потребностей прикладных наук. Операции над комплексными числами отражают свойства движения в пространстве.

Таким образом постепенно шло расширение числовой области и обогащение её геометрической и физической интерпретации.

Глава 2. ПОНЯТИЯ ЧИСЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ В ЭПОХУ ЗАРОЖДЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2.1. Колин Маклорен (1698-1746) и метод сходящихся последовательностей в его «Трактате о флюксиях» 1742 г.

Метод сходящихся последовательностей начал формироваться в работах Архимеда при вычислении длин, площадей и объёмов. Своё продолжение он получил в работах Б. Кавальери, Дж. Грегори; был развит Маклореном. Обоснование метода было продолжено в работах К. Гаусса, Б. Больцано, О. Коши, Г. Дарбу, и завершено Г. Кантором как метод вложенных отрезков на языке последовательностей Коши-Кантора.

Колин Маклорен (МакЛорин) родился в приходе Кильмодан области Хайленд на западе Шотландии, в семье священника. Осиротев в 8 лет, воспитывался в семье дяди, священника соседнего прихода. Мальчик овладел латынью и греческим и в 11 лет поступил в университет Глазго. Его профессором был Роберт Симсон (1687-1768), математик, переводчик и издатель античных математиков. Его любовь к чтению первоисточников передалась Маклорену, увлёкшемуся Евклидом, а затем Архимедом. В 15 лет Маклорен окончил университет и получил диплом магистра, написав диссертацию о силе тяготения.

В 15 лет Маклорен получил первые математические результаты, защитив магистерскую диссертацию о силе тяготения. Последующий год был посвящён подготовке к должности пастора, но господствующий кальвинизм вызывал протест Маклорена. Он посвятил себя занятиям математикой, прожив 4 следующих года у дяди. Его математическая подготовка настолько возросла, что его пригласили занять профессорскую кафедру в Абердине (Marischal College, Aberdeen). Маклорену ещё не исполнилось 19 лет. Он выдержал 10-дневные испытания и стал самым молодым профессором[23]. В 1719 году Маклорен привёз в Лондон свою «Geometria organica, sive Descriptio linearum curvarum universalis» (Органическая геометрия или описание линий кривых, издана в 1720 году). Тогда же он стал членом Лондонского королевского общества за две своих работы, опубликованные в «Philosophical Transactions» в 1718 и 1719 годах, о кривых различных порядков и о построении кривых. Маклорен познакомился с Ньютоном и Галлеем. Дружбу с Ньютоном он считал величайшим счастьем своей жизни.

В 1722 году Маклорен отправился в континентальную Европу в качестве наставника сына лорда Полверса (Lord Polwarth)[24]. Они посетили Францию, где Маклорен познакомился с ведущими математиками Франции, и поселились в Лотарингии. Маклорен написал труд о

[23] Лагранж в 19 лет тоже стал преподавателем, но не был профессором.
[24] По другим источникам, он был наставником и компаньоном Джорджа Юма, сына 2-го графа Марчмонта.

гравитации, который в 1724 году получил приз Парижской академии наук. В Монпелье его подопечный умер от внезапной лихорадки, и Маклорен вернулся в Абердин. Вместо летних каникул они провели в Европе три года. Длительное отсутствие Маклорена вызвало недовольство Совета колледжа университета Абердина; было назначено рассмотрение его проступка, он был прощён, но вскоре перешёл в Эдинбургский университет, где сначала замещал (deputy) престарелого профессора Джеймса Грегори[25], а после его ухода занял его место.

Ньютон принял горячее участие в судьбе Маклорена, рекомендовав его в Эдинбургский университет и даже выразив желание платить ему жалование, буде в университете не найдётся денег. Сохранилось письмо Ньютона к Маклорену: «Я очень рад узнать, что у вас есть перспектива совместной работы профессором математики в Эдинбурге с господином Джеймсом Грегори, не только потому, что вы мой друг, но и в силу ваших способностей и осведомлённости в последних достижениях математики, равно как и в полном знании её состояния. Сердечно желаю вам прочного успеха и буду рад услышать о вашем избрании. Искренне ваш верный друг и покорный слуга И. Ньютон[26]» [416]. Второе письмо было адресовано Лорду Ректору Эдинбурга, без ведома Маклорена: «Я с радостью понимаю, что мастерство господина Маклорена в математике имеет по праву заслуженную хорошую репутацию в своей среде; чтобы заверить вас, что я не обольщаюсь по его поводу, а также способствовать его вхождению в должность заместителя господина Грегори, я готов (если вы позволите) ежегодно вносить двадцать фунтов в его обеспечение, пока не освободится место господина Грегори и пока я жив, я буду выплачивать это на его счёт в Лондоне[27]» (там же).

Маклорен был принят в университет Эдинбурга, ему было назначено жалование от университета. В Абердине об этом узнали из газетных новостей. Маклорен серьёзно отнёсся к своим новым обязанностям, заявив, что «он вынужден распределить более сотни молодых джентльменов, ежегодно посещающих его лекции, и имеющих различную подготовку и навыки, на четыре или пять классов, с каждым из которых он будет работать целый час ежедневно с первого ноября по первое июня[28]» [416, 440].

---

[25] Джеймс Грегори (1666-1742), профессор математики и племянник известного математика Джеймса Грегори (1738-1675), брат астронома и математика Давида Грегори (1659-1708).

[26] "I am very glad to hear, that you have a prospect of being joined to Mr James Gregory in the Professorship of the mathematics at Edinburgh, not only because you are my friend, but principally because of your abilities, you being acquainted as well with the new improvements of mathematics, as with the former state of those sciences. I heartily wish you good success, and shall be very glad of hearing of your being elected; I am, with all sincerity, your faithful friend and most humble servant, I Newton".

[27] "I am glad to understand that Mr Maclaurin is in good repute amongst you for his skill in mathematics, for I think he deserves it very well; and to satisfy you that I do not flatter him, and also to encourage him to accept the place of assisting Mr Gregory, in order to succeed him, I am ready (if you please to give me leave) to contribute twenty pounds per annum towards a provision for him, till Mr Gregory's place become void, if I live so long, and I will pay it to his order in London".

[28] "upwards of a hundred young gentlemen attending his lectures every year, who being of different standing and proficiency he was obliged to divide them into four or five classes, in each of which he employed a full hour every day, from the first of November to the first of June".

Обычно занятия начинались в семь часов утра. В первый год изучалась общая и десятичная арифметика, Евклид, плоская тригонометрия, логарифмы с приложениями к геодезии и фортификации, элементы алгебры; раз в две недели были лекции по географии.

На второй год он читал лекции по алгебре, измерению тел, сферической тригонометрии и учение о сфере и кониках, с применением к артиллерии, астрономии и оптики. На третий год он читал курс, включающий перспективу, астрономию и оптику, Начала (Евклида), прямой и обратный метод флюксий. Кроме того, с декабря по апрель трижды в неделю он давал демонстрации прикладной философии и, время от времени, практической астрономии, а также теории вероятности.

Он был блестящим лектором, и современники ценили его приятный голос и яркое воображение. «Все лекции господина Маклорена отличались такой ясностью метода и изложения, что его доказательства редко нуждались в повторении; он так заботился о ясности изложения для своих учеников, что, если в какой-то момент ему казалось, что они неполно усвоили смысл, или при тщательной проверке он обнаруживал, что они не могли легко доказать обоснованные им теоремы, он более склонялся к тому, что сам использовал неясные выражения, нежели к тому, чтобы требовать от них ума или внимания; и поэтому он повторял доказательство другим способом или пытался изложить вопрос в ином освещении для того, чтобы они получили о нём лучшее представление»(там же).

В 1727 году умер Ньютон, их восьмилетняя дружба принесла свои плоды в творчестве Маклорена, в зрелом и систематическом изложении трудов Ньютона.

К 1733 году Маклорен «жил холостяком, но созрев как для общества, так и для размышлений, и, желая объединить более изысканные и тонкие наслаждения с философией, женился на Анне, дочери Вальтера Стюарта, заместителя генерального прокурора при последнем короле Шотландии. У них родилось семеро детей» (там же).

Маклорен многое сделал для развития интеллектуальной жизни Эдинбурга. В 1739 году он предложил Медицинскому обществу Эдинбурга расширить тематику публикаций, добавив физику и историю античности, что позже, уже после его смерти, привело к созданию Королевского общества Эдинбурга. Маклорен участвовал в проектах, среди которых были организация исследований опасных участков шотландского побережья, подготовка таблиц смертности фонда вдов и сирот из семей священников и профессоров университетов, создание физической лаборатории и обсерватории в университете[29]; планы строительства университета, от которых пришлось отказаться из-за неустойчивости политической ситуации. В 1740 году Парижская академия наук присудила ему премию за работу о приливах и отливах («De causa

[29] Маклорен предложил финансировать обсерваторию из сборов, полученных за его лекции по практической физике.

physica fluxiis et refluxiis maris»). Премия была разделена между ним, Даниилом Бернулли и Леонардом Эйлером.

Известна роль Маклорена в обороне Эдинбурга. В конце августа 1745 началось Второе восстание якобитов, войска Стюартов двинулись к Эдинбургу. Маклорен, как приверженец вигов, одним из первых осознал эту опасность и в течение двух недель обороны Эдинбурга принял на себя заботы об охране городских стен, организации и вооружения добровольцев, укреплении порта и шлюзов. Работа под руководством Маклорена велась днём и ночью. Но он сталкивался со скрытым противодействием сторонников тори в руководстве города. В эти дни Маклорен вёл дневник, который сохранился и опубликован. Город был сдан 16 сентября. У Маклорена не было иного выбора, кроме как бежать из города. Ночью он отправился верхом в Англию, к архиепископу Йоркскому, который с радостью предоставил ему убежище. Как с горечью писал об этом Маклорен, «он жил там настолько счастливо, насколько может человек в неизвестности о судьбе своей семьи, который видит разорение своей страны» (там же). В декабре он счёл безопасным вернуться в Эдинбург. Зима была холодная и снежная, путешествие было трудным, к тому же Маклорен упал с лошади. В Эдинбурге он вновь начал работать, хотя обстановка была неспокойной. Как он писал 14 декабря капеллану архиепископа, «сегодня открылся колледж, но перспективы сомнительны. В умах брожение, за эти несколько дней якобитов всё больше в общественных местах города» [416]. Его жена тоже получила свою долю неприятностей. «Не менее восьми мужчин квартировали в моём доме, что намного превосходит его вместительность; повод очевиден. Моя жена, несмотря на недомогание, вынуждена их кормить, чтобы избежать грабежа» (там же).

К этому времени сам Маклорен был болен, его болезнь, водянка, прогрессировала, несмотря на лечение. Он по-прежнему продолжал писать заключительные главы своего изложения философии Ньютона: «трудно сказать, насколько нужно и полезно сразу постигать знание; следует овладевать знаниями постепенно, чтобы, сравнивая новые объекты или новые открытия с уже нам известными, получить полное и систематическое представление; мудрый человек должен пройти через некое младенчество знаний, далёкое от нужд практики[30]» [440].

Зрение Маклорена слабело. 14 июня 1746 года в возрасте 48 лет Маклорен умер. Похоронен в Эдинбурге [91].

Другие его сочинения: «De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus», «Трактат алгебры», «Трактат флюксий» (Эдинбург, 1742), «Изложение философских открытий Ньютона» (Лондон, 1748). В «Трактате о флюксиях» Маклорен использовал ряды Тейлора[31] для

---

[30] We know not how far it is proper or necessary that we should not be let into knowledge at once, but should advance gradually, that, by comparing new objects, or new discoveries, with what was known to us before, our improvements might be more complete and regular; or how far it may be necessary or advantageous, that intelligent beings should pass through a kind of infancy of knowledge.
[31] 1715 г.

характеристик экстремумов и точек перегибов. Разложения функций в окрестности нуля имели более раннюю историю, ещё до Грегори и Ньютона, прежде чем они получили имя Маклорена. Некоторые разложения, например, для арктангенса, были известны ещё в Индии XIV века. Но именно изложение Маклорена как наиболее удобное в применении и педагогически понятное, сделало их популярными не только в Англии и России, но и в Европе XVIII и XIX веков, где он и Тейлор были самыми цитируемыми английскими математиками, даже у Коши, который почти никого не цитировал. В России работы Маклорена высоко ценил Эйлер, продолживший его работы, в частности, в области техники интегрирования эллиптических функций. Независимо от Маклорена и одновременно с ним Эйлер получил формулу Эйлера-Маклорена.

Маклорен занимался задачами небесной механики, в том числе проблемой притяжения эллипсоидов и равновесием сплюснутых сфероидов.

После смерти Маклорена, в 1748 г., был опубликован его «Трактат об алгебре» (Treatise of Algebra), где приведены правила решения линейных и квадратичных систем для 2 и 3 неизвестных, рассмотрен случай 4-х неизвестных. Эта публикация предшествовала более общей работе Крамера, появившейся 2 года спустя. В качестве приложения к этому посмертному изданию Маклорена был «Tractatus de Linearum Geometricarum Proprietatibus generalibus» как продолжение его «Геометрии органика».

Здесь мы рассмотрим один из аспектов, изложенный в его «Трактате флюксий», содержащем систематизированное и понятное изложение метода Ньютона. Трактат был написан с целью защитить позицию Ньютона от критики Дж. Беркли (в сочинении «Аналист», 1734).

Маклорен стремился показать близость метода Ньютона и античного метода исчерпывания. Созданный Евдоксом и изложенный в «Началах» Евклида, метод исчерпывания был гениально использован Архимедом в «Досифеевском цикле» - пяти работах, посвящённых вычислению длин, площадей и объёмов. Архимед приближал искомую величину последовательностями величин с избытком и недостатком, и показывал, что искомое значение не может быть соответственно не больше и не меньше этих величин; либо показывал, что отношение приближающих величин приближается к единице.

В XVII веке этот метод продолжил итальянский математик, ученик Галилея, Б. Кавальери (1598-1647). Его традицию перенял шотландский математик Джеймс Грегори, который во время пребывания в Италии в 1664-1667 годах учился у Стефано дельи Анджели (Stefano degli Angeli), ученика Кавальери. В Пизе в 1668 году вышли две книги Грегори «Истинная площадь круга и гиперболы» и «Общие разделы геометрии» [276, 277], где, как он сам пишет, применяется метод Архимеда для вычисления криволинейных площадей, но, в сочетании с более удобным и кратким методом неделимых, принадлежащим Кавальери.

Грегори, выражая все соотношения в пропорциях вписанных и описанных фигур, строил последовательности, приближающиеся к истинному значению площади гиперболического сегмента с избытком и недостатком. Таким образом, традиция Архимеда получила новое развитие на базе метода неделимых, что позволило упростить работу с пропорциональными величинами (длинами, площадями и объёмами). Грегори впервые применил термин «сходимость».

Маклорен видел трудности для начинающих понимания метода на языке пропорций[32], и недостаточную обоснованность метода неделимых[33]. Он допускал использование бесконечно малых в геометрии, как это делал Ньютон: «Были и такие, кто допускал большее использование бесконечно больших и бесконечно малых в геометрии. Из их числа сэр Исаак Ньютон… Он рассматривал величины, образуемые потоком или движением, и показал, что скорости образуемых движений должны быть сравнимы друг с другом. В этой доктрине всё естественно и согласно античной геометрии. Но то, что он изложил этот предмет очень кратко, его лаконичность, создало повод для упрёков его методам» [382, с. 2].

«Когда уверенность в любой части геометрии поставлена под сомнение, наиболее действенным способом, чтобы пролить на истину полный свет, и предотвратить споры, будет вывести её из аксиом или первичных принципов с помощью безупречного доказательства, по обычаю античных геометров. Это составляет наше намерение в этом трактате, в котором мы намерены не переделывать понятие флюксии сэра Исаака Ньютона, а объяснить и обосновать его метод путём умозаключений (дедукции) из нескольких очевидных истин, в таком строгом порядке, и интерпретируя его, абстрагироваться от всех принципов и постулатов, которые могут потребовать воображения каких-то величин, но так, чтобы легко можно было представить себе их реально существующими. Мы не будем рассматривать какую-либо часть пространства или времени как неделимую или бесконечно малую; но нам придётся рассматривать точку как предел (as a term or a limit) линии, а момент как предел (as a term or a limit) времени: и не будем разлагать кривую линию или криволинейную поверхность на прямолинейные элементы любого рода. В ходе реализации принципов этого метода мы будем лучше воспринимать это, избегая таких предположений: но после того будут продемонстрированы короткие и лаконичные способы выражения, хотя они и менее точны, но допустимы, если нет опасности появления в науке неопределённости или неясности из-за их применения, или от их употребления в диспутах. Метод обоснования, который был изобретён автором флюксий, точен и элегантен; но мы полагаем начать несколько иным способом, менее удалённым от методов древних, что позволит облегчить переход к его методу для начинающих

[32] И в отсутствии понятия функции, возникшего впервые у Лейбница.
[33] Так как это учение не согласуется с принципами строгой геометрии, то вскоре оказалось, что в нём содержится опасность получения ложных выводов [382, с. 1].

(для кого, главным образом, и предназначен этот трактат), и устранить некоторые возражения, направленные против него» [там же, с. 2-3].

«У них был фундаментальный принцип, что разность двух любых неравных величин, из которых большая превышает меньшую, может быть сложена сама с собой столько раз, что она превысит любую предложенную конечную величину того же рода; и так или иначе они основывали свои пропорции в отношении криволинейных фигур на этом принципе, что очевидно из доказательств и из чётко выраженных высказываний Архимеда, который признаёт, что это основа, на которой он установил свои открытия, и ссылается на это как на принятое античными авторами в доказательстве всех такого рода пропорций. Но этот принцип кажется несовместимым с допущением бесконечно малых величин или разностей, которые, будучи многократно сложены сами с собой, никогда не станут равными никакой конечной величине» [там же, с. 4].

«Для того, чтобы эти общие рассуждения, с помощью которых они доказывали все свои теоремы такого рода, можно было бы раскрыть более лёгким способом, мы будем представлять круги и многоугольники с помощью прямых линий, таким же образом, как выражаются все величины в пятой книге Начал» [там же, с. 5].

Пусть отрезки прямых AB и AD представляют две круговые области, которые мы сравниваем; и пусть AP, AQ представляют два любых многоугольника, вписанных в эти окружности. Если две переменные величины AP и AQ, находятся в неизменном отношении друг к другу, приближаясь в то же время к двум определённым величинам AB и AD, так что они могут отличаться менее, чем на любую назначенную величину, то отношение этих пределов AB и AD, должно быть таким же, как неизменное отношение величин AP и AQ: и это можно рассматривать как наиболее простую и фундаментальную пропорцию этой доктрины, с помощью которой мы получаем возможность сравнивать криволинейные пространства в некоторых более простых случаях[34]» [там же, с. 6].

Маклорен усиливает это классическое положение следующим построением: «В общем, пусть любая определённая величина AB будет всегда пределом между двумя переменными величинами AP, AQ, которые по предположению приближаются к этому пределу и друг к другу, так что разность между ними может стать меньше любой назначенной величины, или так, что отношение AP к AQ может стать меньше, чем любое заданное отношение большей величины к меньшей. Предположим также, что любая другая определённая величина ab является пределом между переменными ap и aq, и aq будет всегда равна AQ, либо меньше её, и

[34] Ссылка на изображение: https://ia601404.us.archive.org/BookReader/BookReaderImages.php?zip=/24/items/atreatisefluxio00conggoog/atreatisefluxio00conggoog_tif.zip&file=atreatisefluxio00conggoog_tif/atreatisefluxio00conggoog_0020.tif&scale=2&rotate=0

пусть *ap* будет или равна *AP* или больше её» [там же, с. 10[35]]. Маклорен показывает, что пределы *AB* и *ab* будут равны друг другу[36]. При этом все величины у него расположены на отрезке, то есть наглядны. Иными словами, если $AP < AB < AQ$, $\frac{AP}{AQ}$ ограничено отношением большей величины к меньшей, и если $AP \le ap < ab < aq \le AQ$, то $ab = AB$.

Как мы видели, построение, использованное в целях геометрической наглядности, дало новое направление развитию математики. В XIX веке, когда в математику придёт понятие функции, это построение приведёт к возникновению критерия сходящихся последовательностей Больцано (1817) и Коши (1821), к формулировке теоремы о двух последовательностях, возникшей как поризм (вспомогательный приём, впоследствии получивший статус фундаментального результата) в работах Коши 1821 и 1823 годов. Далее этот принцип будет воплощён в лемму о вложенных отрезках Кантора, войдя вместе с аксиомой Архимеда в аксиоматику действительного числа.

2.2. История правил дифференцирования

У Архимеда встречается указание на связь между параболами и их площадями. К его работам обращались Ферма, Кавальери, Торричелли. Правила дифференцирования формировались постепенно, начиная с XVII века. В конце XVI в. Дж. Непер кинематическим способом определил скорость роста логарифма. Ещё когда Ньютону было 15 лет, а Лейбницу 12, алгебраисты знали процедуру дифференцирования многочлена – Гудде 1658 год, Ролль 1690 год. Для нахождения вспомогательного алгебраического уравнения каждый элемент исходного умножался на показатель степени и делился на неизвестное, что для нас равносильно взятию производной.

В работах Ньютона функции представляются рядами с помощью интерполирования – в 1665 логарифм, в 1676 бином, затем синус, косинус, как обращение ряда арксинус и экспонента. У Ньютона $y = y(t)$ – функция времени, и её производные обозначались $\dot{y}, \ddot{y}$. Вот, например, как выводит Ньютон производную степенной функции (ок. 1691 г., опубл. в 1704 г.):

«*Величина* x *течёт равномерно. Требуется найти флюксию величины* x^n.

[35] Ссылка на изображение https://books.google.ru/books?id=dCAOAAAAQAAJ&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false

[36] Ссылка на изображение: https://ia601404.us.archive.org/BookReader/BookReaderImages.php?zip=/24/items/atreatisefluxio00conggoog/atreatisefluxio00conggoog_tif.zip&file=atreatisefluxio00conggoog_tif/atreatisefluxio00conggoog_0021.tif&scale=2&rotate=0

В то же время, когда величина x в своём течении обращается в $X+o$, величина x^n переходит в $\overline{x+o}^n$, то есть, согласно методу бесконечных рядов в $x^n+nox^{n-1}+\frac{nn-n}{2}oox^{n-2}+\ldots$. Приращения o и $nox^{n-1}+\frac{nn-n}{2}oox^{n-2}+\ldots$ относятся между собой как 1 к $nx^{n-1}+\frac{nn-n}{2}ox^{n-2}+\ldots$

Если теперь эти приращения исчезают, то последнее их отношение будет 1 к nx^{n-1}, и поэтому флюксия величины x относится к флюксии величины x^n, как 1 к nx^{n-1}» [86, с. 169].

Лейбниц (1646–1716) ввёл символы $dx, dy, {dx}/{dy}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ и сформулировал правила дифференцирования суммы, произведения и частного в 1675 году. Он же сформулировал правило дифференцирования сложной функции $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ [66, с. 166-169].

Первый систематический свод правил дифференцирования был опубликован Эйлером в 1748 году во «Введении в анализ бесконечных» [140] и в 1755 году в «Дифференциальном исчислении» [142]. Он даёт правила исчисления конечных разностей первого и высших порядков степенной функции с любым показателем, далее логарифма, синуса, косинуса, представленных рядами, даёт формула для ряда обратных функций (без современной символики аркфункций, она была введена в 1770 году Клюгелем). Приводит правила дифференцирования произведения, частного, сложной функции. После этого Эйлер говорит: «правила дифференцирования, которые мы только что изложили, являются настолько общими, что нельзя придумать никакой алгебраической функции от x, которая не могла бы дифференцироваться с их помощью.

Каждая функция состоит из частей, связанных друг с другом сложением, вычитанием, умножением, или делением; эти части будут либо рациональными, либо иррациональными. Назовём эти количества, составляющие какую-либо функцию, её частями:

Тогда предложенная функция сперва будет дифференцироваться поочерёдно относительно каждой её части так, как если бы лишь одна эта часть была переменной, другие же все части – постоянными. После этого отдельные дифференциалы, полученные из отдельных частей описанным способом, нужно собрать в единую сумму, и таким образом получится дифференциал предложенной функции» [там же, с. 127–128].

Правила дифференцирования трансцендентных, то есть неалгебраических функций (круговых дуг, логарифмов и показательных функций, а также арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса) Эйлер рассматривает отдельно с помощью разложения в ряд [там же, с. 138]. Здесь же он вводит правило дифференцирования степенно-показательной функции.

Рассматривает Эйлер и правила дифференцирования функции двух аргументов $V = V(x, y)$: «Сперва будем считать переменным только количество *x*, другое же количество *y* будем рассматривать как постоянное и найдём дифференциал количества *V*, который пусть будет равен pdx. Затем будем считать переменным только количество *y*, другое же количество x –постоянным и будем искать дифференциал количества *V*, который пусть будет равен qdy. Тогда, считая оба количества x и y переменными, мы будем иметь $dV = pdx + qdy$». Далее Эйлер даёт правило для функции трёх и более переменных. Также он рассматривает вопрос о возможности восстановления функции нескольких переменных по её полному дифференциалу $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, называя это свойство изящным [там же, с. 154–161]. Демонстрирует независимость смешанных производных от порядка дифференцирования. Приводит правила повторного дифференцирования, правило Лопиталя (без имени) [там же, с. 489]. У Эйлера обозначение $D_x f(x)$ носит характер оператора.

Лагранж в 1770 году ввёл удобные обозначения производных y' в статье «Новый метод решения буквенных уравнений с помощью рядов» [357]. Раскладывая функцию в ряд, что он считал чисто алгебраической операцией, Лагранж выражал каждую очередную производную через предыдущую (dérivées) с помощью повторного дифференцирования. В 1772 в работе «О новом роде исчисления, относящемся к дифференцированию и интегрированию переменных величин» [358] он рассматривает разложение функции $u = u(x+\xi)$ по степеням ξ: $u + u'\xi + \frac{u''}{2}\xi^2 + \frac{u'''}{2\cdot 3}\xi^3 + \dots$, и последовательно определяет функции $u, u', u'', u'''\dots$ начиная с u', как коэффициенты при первой степени предшествующего разложения по степеням ξ. Так все функции могут быть произведены (dérivées) из начальной *u* с помощью одного и того же алгебраического закона разложения в степенной ряд. Здесь же у него впервые встречается запись $u' = {du}/{dx}, du = u'dx$. Лагранж использовал свою терминологию в «Теории аналитических функций» 1797 года [360], ввёл термин «примитивная».

С. Ф. Лакруа ввёл термин «дифференциальные коэффициенты».

В России термин «производная функции» впервые встречается у В.И. Висковатова (1779/80–1812).

Коши с 1821 года читал курс «Алгебраического анализа» в Политехнической школе, в 1823 году опубликовал «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении», в переводе В. Буняковского [61]. Коши рассматривает непрерывную функцию $y = f(x)$, при $\Delta x = i$ определяет производную как предел отношения бесконечно малых разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$, обозначая её y' или $f'(x)$. Коши определяет правила дифференцирования и приводит формулы производных для следующих функций: $a + x, a - x, ax, \frac{a}{x}, x^a, A^x, L(x), \sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x$, где $L(x)$ – натуральный логарифм, а также формулы производных тангенса, котангенса, секанса, косеканса и обратных к ним. Приводит правила дифференцирования сложных и неявных функций как для функции одной, так и нескольких переменных, нахождения производных высших порядков.

В 1907 году Улисс Дини в «Лекциях по инфинитезимальному анализу» [9] вводит понятие производной традиционно, по Коши, формулу производной степенной функции выводит через бином, а формулы тригонометрических функций получает, используя классические пределы [231, с. 24-64].

2.3. Метод многоугольника Исаака Ньютона и история метода касательных

Метод многоугольника Ньютона. В XVII веке уже была богатая традиция вычисления корней алгебраических уравнений, возникшая в античной математике, обогащённая арабской математикой, работами Франсуа Виета (1540-1603), изданными в 1646 году и увенчанная методом Рене Декарта (1596-1650). Как правило, разыскивались положительные корни. В 1637 году в Лейдене вышло первое издание его «Рассуждения о методе», содержащее в качестве третьего приложения «Геометрию», содержащую также и методы решения алгебраических уравнений. Корни уравнения искались как точки пересечения некоторых плоских кривых, как правило, прямой, парабол и окружностей. Декарт утверждал важность представления уравнений с правой частью, равной нулю. Он составлял уравнения с помощью перемножения двучленов и указал, что «Всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений» [31, с. 76]. Там же Декарт и привёл своё правило корней: если среди корней уравнения нет «невозможных» (то есть комплексных), то «истинных корней может быть столько, сколько раз в нём изменяются знаки + и –, а ложных[37] – сколько раз встречается подряд два знака + или дважды знаки –. Например, из того, что в уравнении $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$ после $+x^4$ имеется $-4x^3$, что представляет собой перемену знака + на –, после $-19xx$ имеется +106*x*, после +106*x* имеется –120, что даёт ещё две перемены знака, мы узнаём, что существуют три истинных корня. Имеется также один ложный корень, ибо встречаются подряд два знака минуса при $4x^3$ и

[37] отрицательных

19*xx*» [там же, с. 77]. Знак ∞ использовался как знак равенства. Общее доказательство этого правила принадлежит Гауссу (1828). Декарт не ставил проблемы отделения и локализации корней.

Сам геометрический образ задачи не соответствовал поиску пересечения кривой с осью, а осуществлялся как поиск точек пересечения двух кривых. Поэтому образ графика, имеющего на краях отрезка ординаты разных знаков, в терминах алгебры возникнуть не мог. И. Ньютон (I.Newton, 1642-1727), например, представлял переменные как изменяющиеся во времени, а не в зависимости друг от друга [84]. Представление о линии как о геометрическом месте точек началось с работы Лопиталя о конических сечениях, было развито Эйлером, а общий подход сформировался лишь в XIX веке.

В 1658 году голландский математик Иоганн Гудде (I. Hudde, 1628-1704) предложил способ отделения корней с помощью производного уравнения, а именно такого вспомогательного уравнения, каждый элемент которого получался умножением на свой прежний показатель степени и делением на неизвестное[38]. В нашем понимании это было дифференцирование многочлена.

В 1669 году Ньютон написал «Анализ уравнений с бесконечным количеством членов» (опубликован в 1711 году [397], в русском переводе [87, с. 3-24], в котором рассматривает различные методы решения уравнений и в котором впервые появляется его метод многоугольника. Рассмотрим, как Ньютон определял границы корней. Если нужно найти корень, ближайший к нулю, то уравнение $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$ заменяется на $a_0 + a_1x = 0$, из которого вычисляется первое приближение. Далее в исходное уравнение подставляется сумма этого первого приближения и новой неизвестной, процедура повторяется. Сходимость этого метода Ньютон не анализировал, лишь указав, что возможно как приближение к истинному корню, так и удаление от него.

Метод многоугольника (или параллелограмма) главным образом использовался Ньютоном для обращения рядов. Но, как заметил математик, переводчик и комментатор Ньютона Д.Д. Мордухай-Болтовской (1876–1952), «Ньютонов способ разложения в ряды содержит более чем одну вычислительную технику» [там же, с. XI]. Использованные Ньютоном ряды с дробными степенями переоткрыл в 1850 году французский математик Виктор-Александр Пюизё (1820–1883), который использовал их для исследования многозначных алгебраических функций вблизи точек ветвления и впервые рассмотрел вопрос об их сходимости.

[38] Реконструкция метода Гудде дана А.П. Юшкевичем в его комментариях к переводу Лопиталя «Анализ бесконечно малых» [69, с. 400].

Ньютон применяет метод многоугольника также и к уравнению с одним неизвестным; «Правило же это таково: из всех членов, в которых отсутствуют буквенные корни (y, p, q, r и так далее), выбери тот, в котором неизвестная буквенная величина (x или z и так далее) входит в наименьшей степени; затем выбери другой член, который содержит этот корневой вид, и таков, что прогрессия, составленная из измерений каждого из упомянутых выше неизвестных, при продолжении её от члена, принятого за первый, до этого члена либо возрастает настолько, насколько это возможно, либо убывает столь мало, насколько это возможно; и если имеется несколько таких членов, измерения которых принадлежат этой прогрессии, сколь угодно далеко продолженной, то их все следует брать». Ньютон наглядно показывает дальнейшее решение уравнения пятой степени путём последовательных приближений на диаграмме. Для верхних оценок Ньютон использует суммы степеней корней, вычисленные из коэффициентов уравнения, а также замену неизвестного на обратную величину. В «Методе флюксий» («De methodis fluxionum et serierum infinitarum» 1671 г., опубл. в английском переводе как «Method of Fluxions» в 1736 г.) [там же, с. 26–166] Ньютон подробно рассказывает о методе многоугольника в решении буквенных уравнений:

«Когда уравнение уже подготовлено (то есть приведено к целым положительным степеням), следует начать действия с определения первого члена результата. Когда оба неизвестных (x или z) предполагаются малыми, то к определению этого и следующих членов приведёт общее правило. К этому случаю могут быть приведены и два остальных.

Правило же это таково: из всех членов, в которых отсутствуют буквенные корни (y, p, q, r и так далее), выбери тот, в котором неизвестная буквенная величина (x или z и так далее) входит в наименьшей степени; затем выбери другой член, который содержит этот корневой вид, и таков, что прогрессия, составленная из измерений каждого из упомянутых выше неизвестных, при продолжении её от члена, принятого за первый, до этого члена либо возрастает настолько, насколько это возможно, либо убывает столь мало, насколько это возможно; и если имеется несколько таких членов, измерения которых принадлежат этой прогрессии, сколь угодно далеко продолженной, то их все следует брать.

Для лучшего уразумения этого правила поясню его на следующей диаграмме.

Построй прямой угол BAC, стороны его BA, AC раздели на равные части и, восстановив перпендикуляры, раздели угловую площадь на равные квадраты или параллелограммы, которые отметь вписанными в них измерениями букв x и y:

x^4	x^4y	x^4yy	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6 и т.д.
x^3	x^3y	x^3yy	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6 и т.д.
xx	xxy	$xxyy$	xxy^3	xxy^4	xxy^5	xxy^6 и т.д.
x	xy	xyy	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6 и т.д.
1	y	yy	y^3	y^4	y^5	y^6 и т.д.

Затем, когда дано уравнение, отметь каким-либо знаком параллелограммы, соответствующие всем его членам, и приложи линейку к двум, или же, что случается иногда, к нескольким из отмеченных таким образом параллелограммов, из которых один является самым нижним в столбике *AB* слева, другой попадает на линейку справа, а все остальные, не касающиеся линейки, находятся над ней. Затем возьми все те члены уравнения, которые содержатся в параллелограммах, задетых линейкой, и найди из них величину, которую следует положить в результате. Так, если следует определить корень уравнения $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7aaxxyy + 6a^3x^3 + bbx^4 = 0$, то я обозначаю, как видишь (фиг.1. табл.III), параллелограммы, соответствующие членам этого уравнения, звёздочкой *.

*						
*				*		
		*				
					*	
						*
A				*E*	*C*	

[Пояснение: точка *D* лежит на границе 2 и 3 клеток первого столбца, точка *E* лежит на границе предпоследней и последней клеток нижней строки – Г.С.].

Затем я прикладываю линейку *DE* к самому низшему из отмеченных параллелограммов в первом столбце слева и вращаю линейку снизу вверх в правую сторону, пока она не пройдёт через один или несколько различных отмеченных параллелограммов. При этом я вижу, что линейка заденет те места, в которых содержатся члены x^3, $xxyy$ и y^6. Поэтому я составляю из них уравнение $y^6-7aaxxyy+6a^3x^3=0$ (которое, если угодно, а затем, полагая $y=u\sqrt{ax}$, я привожу к $u^6-7u+6=0$) и из него нахожу y, который имеет четыре значения, а именно, $+\sqrt{ax},-\sqrt{ax},+\sqrt{2ax},-\sqrt{2ax}$. Из этих значений я могу взять за первый член искомого количества любое, но в различных случаях следует выбирать то из них, которое соответствует тому корню, который мы желаем найти.

Так, если дано уравнение $y^5-byy+9bxx-x^3=0$, то я собираю члены $-byy+9bxx$ и для первого члена результата получаю $y=3x$. А если дано $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$, то я беру $y^3+aay-2a^3$, корень которого есть $+a$, и с него я и начинаю писать искомое.

Равным образом, если бы я имел $xxy^5-3c^4xyy-c^5xx+c^7=0$, то я выбрал бы из него xxy^5+c^7, откуда вывел бы $y=-\sqrt[5]{\frac{c^7}{xx}}$, каковая величина и представляет первый член искомого результата. И так далее» [там же, с. 33-34].

Свой метод касательных Ньютон описал в двух названных работах. Метод Ньютона был изложен также в книге Дж. Валлиса 1685 года «A Treatise of Algebra both Historical and Practical». В 1690 в Англии опубликован трактат Дж. Рафсона (1647/48-1715) «Analysis Aequationum Universalis» [409], содержавший изложение метода Ньютона-Рафсона, или метода касательных. В 1707 году вышла книга Ньютона «Arithmetica Universalis» (Всеобщая арифметика), содержащая численные методы решения уравнений [88].

Ньютон, до появления «Трактата» Ролля, пользуясь методом касательных, не проверял знаки функции на краях интервала, что можно видеть, например, в его «Method of Fluxions»1671 г.

Первая публикация о многоугольнике Ньютона на русском языке принадлежала Синцову Д.М. [120]. Разнообразные возможности метода многоугольника Ньютона раскрыты в книге Н.Г.Чеботарёва [135]. История применения многоугольника Ньютона дана в статье С.С. Петровой и М.М. Булычёвой [45], в которой выделена как использование метода в разложении неявных функций в ряды, вообще говоря, по дробным степеням переменной, так и в решении целых алгебраических уравнений. Подробная история метода изложена в диссертации ученицы И.Г. Башмаковой М.Г. Буториной [11]. Из зарубежных авторов назовём Криса Кристенсена «Метод Ньютона для решения уравнений с неизвестными в разных степенях» [215] и Гарольда Эдвардса, в очерке которого рассказывается применение многоугольника для обращения неявной функции [244].

Парижская Академия и Лондонское королевское общество обменивались академической литературой. Несомненно, Ньютон получил «Трактат» Ролля, более того, он включил изложение его метода в своё издание 1707 «Всеобщей арифметики» [88, с. 267-270], правда, без указания авторства Ролля. Заметим, что Ролль при локализации корня, пожалуй впервые, проверяет знаки полинома на краях интервала, и Ньютон впервые начинает делать такую проверку во «Всеобщей арифметике» 1707 года. Способ сужения интервала, содержащего корень, с помощью проверки знака левой части уравнения (полинома) в некоторой внутренней (не обязательно средней) точке впервые встречается у Ролля. Больцано формализовал его 117 лет спустя как метод половинного деления. Добавим, что Ньютон все рассматриваемые функции полагал определёнными по непрерывности, а Ролль рассматривал только многочлены, являющиеся непрерывными функциями.

Метод Ньютона и использование разложения в ряды Маклорена пользовались большей популярностью у континентальных математиков. В 1740 году Т. Симпсон дал обобщённое описание метода Ньютона в работе «Essay on several subjects in speculative and mixed mathematics» [422].

История метода касательных[39]. У Ньютона происходит расширение понятия числа: «Под числом разумеется не собрание многих единиц, а скорее абстрактное отношение одного количества к другому количеству того же рода, которое рассматривается как единица» [87, с. XIII]. Ньютон разделял числа целые, отношения целых чисел (в нашем понимании рациональные) и surdus (глухие, невыразимые – в нашем понимании иррациональные). Как правило, разыскивался один положительный корень уравнения, в работах Ньютона задача при этом считалась решённой. Ньютон упоминает также о «невозможных» (мнимых) решениях и даже даёт им геометрическую интерпретацию, но это находится за пределами нашего вопроса.

Свой метод касательных Ньютон описал в двух работах: «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (Analysis per aequationes numero terminorum infinitas 1669 года, опубликован в 1711 году) [там же, с. 3–24], и в «Методе флюксий» (De methodis fluxionum et serierum infinitarum» 1671 г., опубл. в английском переводе как «Method of Fluxions» в 1736 г.) [там же, с. 26–166].

Ньютон для определения границ корней использовал оценки с помощью коэффициентов уравнения по теореме Виета, что позволяло ему получить верхнюю и нижнюю границу всех корней, а также по Декарту определить количество положительных и отрицательных корней. Некоторые виды замен (например, замена $y=\frac{1}{x}$, либо замена $x=x_0+\alpha$, где x_0 – первое приближение, а α – малая величина) позволяла ему определить ближайший к нулю корень.

[39] Опубликовано: Синкевич Г.И. История метода касательных // Математика и математическое моделирование: проблемы и перспективы. Международная научно-практическая конференция. Оренбург, 20-21 мая 2015 г.: сборник научных статей. Оренбург: Издательство ОГПУ, 2015. С.246-250.

После этого в качестве первого шага использовалось правило ложного положения (Regula falsi) в таком виде: в силу малости *x* уравнение

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0 \qquad (1)$$

можно заменить на уравнение $a_0 + a_1 x = 0$, откуда $x = x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$ – первое приближение. Подставляем его в (1), получаем новое уравнение

$$b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + ... + b_n y^n = 0 \qquad (2)$$

Вновь отбрасываем все члены, кроме двух первых. Остаётся $b_0 + b_1 y = 0$, откуда $y = y_0 = -\frac{b_0}{b_1}$ и второе приближение берётся $x = x_0 + y_0$, и так далее. Это и есть основная идея Ньютона. Рассмотрим, как он применяет её в “Analysis per aequationes numero terminorum infinitas” на примере уравнения $y^3 - 2y - 5 = 0$ [87, с. 9-11].

Сначала Ньютон замечает, что число 2 отличается от искомого корня менее чем на одну десятую часть. Тогда $2 + p = y$, подставляем в исходное уравнение, что даёт $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$. Пренебрегая двумя старшими членами уравнения в силу малости *p*, получим $10p - 1 = 0$, откуда $p = \frac{1}{10} = 0{,}1$ и далее $0{,}1 + q = p$. Подставляем во второе уравнение, получаем $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, откуда $11{,}23q + 0{,}061 = 0$ и $q = -0{,}0054$. Далее $-0{,}0054 + r = q$, в получаемом уравнении q^3 отбрасывается в силу его ничтожности, остаётся $6{,}3r^2 + 11{,}16196r + 0{,}000541708 = 0$, где $6{,}3r^2$ отбрасывается. Получаем $r = \frac{-0{,}000541708}{11{,}16196} = -0{,}00004853$.

Вычитая отрицательную часть результата из положительной, получаем искомый результат 2,09455147.

Сходимость этого метода Ньютон не анализировал, лишь указав, что возможно как приближение к истинному корню, так и удаление от него: «Следует отметить, что если бы я в этом примере сомневался в том, достаточно ли подходит к истинному значению $0{,}1 = p$, то я вместо $10p - 1 = 0$ взял бы $6p^2 + 10p - 1 = 0$ и написал бы первый знак его корня в результате. Определять второй или третий знаки результата таким путём следует только тогда, когда в последнем полученном уравнении квадрат коэффициента предпоследнего члена не более чем удесятерённое произведение последнего члена на коэффициент предпоследнего.

С другой стороны, ты большей частью облегчишь труд, в особенности в случае уравнений высоких степеней, если все знаки, вводимые в результат, будешь определять указанным образом (то есть определяя меньший корень уравнения, получаемого из трёх последних членов нового уравнения); при этом ты получишь в результате вдвое больше знаков.

Этот метод решения уравнений, – не знаю, опубликованный или нет, - мне кажется в сравнении с другими более простым и удобным для употребления. Доказательство его явствует из самого способа действия, на основании чего его легко в случае необходимости вспомнить» (Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов, [там же, с. 11]).

Фактически, рассуждение Ньютона таково:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\dots$$

Пусть $x-x_0=\Delta x$, тогда $x=x_0+\Delta x$, $f(x+\Delta x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)\Delta x}{1!}+\frac{f''(x_0)\Delta x^2}{2!}+\dots$, где слагаемые, начиная с третьего, – это бесконечно малые более высокого порядка, следовательно, $f(x_0)\cong f(x+\Delta x)-f'(x_0)\Delta x$. Но так как $f(x_0)=0$ по определению, то $f(x+\Delta x)=f'(x_0)\Delta x$ и $\Delta x=\dfrac{f(x+\Delta x)}{f'(x)}$.

Самое поразительное, что во время создания этого метода ещё не была известна формула Тейлора, и Ньютон шёл интуитивно. Он рассматривал последовательность полиномов, как мы видели из примера.

Этот метод завоевал популярность прежде всего благодаря своей быстрой сходимости. Он был изложен также в книге Дж. Валлиса 1685 года «A Treatise of Algebra both Historical and Practical». В 1690 в Англии опубликован трактат Дж. Рафсона (1647/48-1715) «Общий анадиз уравнений» [409], содержавший изложение метода Ньютона-Рафсона, или метода касательных. В отличие от Ньютона, Рафсон рассматривает последовательность не полиномов, а значений переменной. В 1707 году вышла книга Ньютона «Arithmetica Universalis» (Всеобщая арифметика), содержащая численные методы решения уравнений [88]. В этой книге Ньютон уже применяет изоляцию корня по Роллю.

В 1740 году метод Ньютона описал Томас Симпсон [422].

В 1768 году французский астроном и математик из Марселя Мурайль (Jean-Raymond Mouraille, 1721–1808) в своём трактате «Traité de résolution des équations algébriques en général» показал, что кривая $y=f(x)$ на интервале между корнем и его приближением должна быть направлена выпуклостью к оси абсцисс [153].

В 1817 году Больцано сформулировал критерий сходимости последовательности [179], а в 1821 году Коши ввёл его в систематическое изложение анализа [208]. Сейчас он носит название критерия Коши и эквивалентен методу вложенных отрезков.

На его основе метод касательных проанализировал и привёл к современному виду Жан Батист Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier; 1768-1830), французский математик и физик. Он обращался к проблеме решения алгебраических уравнений и сходимости численных методов в течение 18 лет, начиная с 1797 года. Рукопись была закончена в 1826 году, но опубликована была уже после его смерти, в 1831 году [259].

Фурье рассматривает историю методов решения уравнений $x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$ у Виета, Харриота, Оутреда, Ньютона, Валлиса [там же, с. 185–187], Ролля [там же, с.116] и Лагранжа; отмечает, что Ньютон не умел изолировать корни [там же, с. 116].

Условия сходимости метода Ньютона Фурье обсуждает на стр. 86, соединяя их с методом каскадов Ролля, то есть при сужении интервала проверяет знаки функции на краях интервала. У Фурье этот метод уже представляет собой процесс стягивания интервала, содержащего корень уравнения. На основании анализа знаков производной Фурье получает формулу $\omega' = \omega + \frac{f(x-\omega)}{f'(x-\omega)}$, и условие сходимости $\omega' = -\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{f''x}{f'x}$ (обозначения оригинала), [там же, с. 220]. Далее он рассматривает примеры, в том числе и уравнение, которое рассматривал Ньютон $y^3 - 2y - 5 = 0$.

Условия применимости метода Ньютона относительно поиска мнимых корней отметил в 1879 году Артур Кэли в маленькой заметке «Проблема мнимости Ньютона–Фурье» в разделе «Пожелания и предложения» [213, с. 97]. По его словам, легко локализовать мнимый корень в случае квадратного уравнения, но задача существенно усложняется при больших степенях.

В 1922 году С. Банахом был сформулирован принцип сжимающих отображений [169], а метод касательных был обобщён на его основе в нескольких работах Л.В. Канторовича, который посвятил методу Ньютона несколько работ с 1937 по 1957 годы, в том числе [51].

На примере истории метода касательных мы видим роль основообразующего принципа теории действительного числа.

2.4. История теоремы Ролля и теоремы Больцано-Коши. От метода каскадов к изучению свойств непрерывных функций: историческая хроника

Введение. История теоремы Ролля началась в XVII в. с решения алгебраического уравнения методом каскадов и формулирования понятия корневого интервала. В XIX в. Б. Больцано сформулировал на их основе понятие и теорему о непрерывной функции. Эволюция понятия непрерывности в работах О. Коши и К. Вейерштрасса привела к тому, что метод каскадов и метод отделения корней воплотились в две важнейшие теоремы, отражающие свойства непрерывных функций: теорему Ролля и теорему Больцано – Коши. Современная форма этих теорем такова: «Если функция непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$, тогда в (a, b) найдется хотя бы одна точка с такая, что $f'(c) = 0$» и «Если функция непрерывна на [a, b] и имеет разные знаки на краях интервала, то в (a, b) найдется хотя бы одна точка с такая, что $f(c) = 0$». В историко-математической литературе частично исследована история метода Ролля, но лишь до начала XIX в. и преимущественно с точки зрения истории алгебры.

Провозвестником реформы математического анализа XIX в. был Больцано, который дал первое строго аналитическое доказательство второй из названных теорем. Он полагал, что она выражает основное свойство непрерывной функции, и рассмотрел историю ее возникновения. В реальной же ее истории участвовало немалое число ученых, живших ранее (а потому во многом способствовавших развитию анализа) и их современников, без которых эта история лишается не только важных красок, но и требуемой от исторического свидетельства полноты. Настоящая статья представляет более полную историю вопроса, содержащую анализ работ Б. Больцано, О. Коши, К. Вейерштрасса, Г. Кантора и Н. Н. Лузина, и выделяет роль эволюции понятия среднего значения для развития теории функций.

До XVII в. при нахождении корней алгебраических уравнений пользовались геометрическими образами пересечения кривых, а интервал, в котором находились корни, оценивали на основе анализа коэффициентов. Например, И. Ньютон во «Всеобщей арифметике» писал: «Если вы пожелаете найти предел, которого не может превзойти ни один корень, то отыщите сумму квадратов корней и извлеките из нее квадратный корень. Этот квадратный корень будет больше, чем наибольший корень уравнения» [88, с. 265]. В середине XVII в. использовался метод локализации корня с помощью вспомогательного уравнения. Искали, как правило, положительные корни. Чтобы получить вспомогательное уравнение, степени переменных понижали на единицу и каждый коэффициент умножали на прежний показатель степени (И. Гудде, 1658 г.) [40]. Позже эта операция была определена как дифференцирование многочлена (И. Ньютон, Г. Лейбниц). М. Ролль нашел новый подход к решению этой проблемы. Рассмотрению его вклада и будет посвящен этот параграф.

1690 г. М. Ролль и его метод каскадов. Мишель Ролль (1652–1719) родился во Франции в маленьком городке Амбер провинции Овернь в семье сапожника. В возрасте 23 лет он приехал в Париж, где работал переписчиком. Ролль достиг таких успехов в самообразовании, что в 1682 г. решил трудную задачу Ж. Озанама: «Найти такие четыре числа, что разность между двумя любыми из них была бы полным квадратом и, кроме того, попарные суммы

[40] Реконструкция метода Гудде дана А. П. Юшкевичем в его примечаниях к переводу труда Г. Ф. Лопиталя «Анализ бесконечно малых» [69, с. 400].

первых трех чисел тоже были бы полными квадратами» [41]. Сам Озанам полагал, что каждое из чисел состоит по крайней мере из 50 знаков, но Ролль нашел такие числа, каждое из которых имело не более 7 знаков. Это решение принесло ему признание среди математиков, он был приглашен давать уроки сыну военного министра, получил пост в военном министерстве, пенсию от Людовика XIV, в 1685 г. стал членом Королевской академии наук (как ученик астронома (*élève astronome*), а с 1699 г. – ее пенсионером (как геометр, т. е. математик).

Ролль занимался проблемами алгебры – диофантовым анализом, решением алгебраических уравнений. Он во многом популяризировал алгебраическую символику Р. Рекорда и ввел обозначение $\sqrt[n]{x}$.

Ролль известен своими бурными нападками на дифференциальное исчисление и обвинением метода Р. Декарта в недостаточной обоснованности. Французские математики П. Вариньон и Ж. Сорен опровергли большинство доводов Ролля, в 1705 г. академия признала его неправоту, с чем он впоследствии согласился. Но эта дискуссия вынудила Лейбница излагать дифференциальное исчисление с большей строгостью.

В 1690 г. Ролль опубликовал «Алгебраический трактат» [412] о решении диофантовых и алгебраических уравнений произвольных степеней. В нем содержалось много новых идей, прогрессивных по отношению к таковому же методу Декарта, и как один из методов дан метод каскадов [там же, с. 124–152], в основе которого лежит идея о том, что корни исходного уравнения разделены корнями вспомогательного, производного уравнения. Корни вспомогательного уравнения также можно отделить с помощью следующего вспомогательного и т. д. Образуя каскады, мы нисходим до линейного уравнения, решив которое, совершаем восхождение к исходному. Обоснование своего метода Ролль опубликовал годом позже в небольшой работе «Обоснование метода решения уравнений любых степеней» [413].

Приведем решение самого Ролля для уравнения четвертой степени из его трактата [412, с. 124-126]:

$v^4 - 24v^3 + 198vv - 648v + 473 \infty 0$ (в записи Ролля знак ∞ означает равенство, vv означает v^2).

Для выделения корневого интервала он вводит предположения (гипотезы) о границах интервала: большую гипотезу (*grande hypothèse*), малую гипотезу (*petite hypothèse*) и крайнюю гипотезу (*hypothèse extrême*). Большая гипотеза – это величина, после которой нет ни одного корня полинома, которая вычисляется так: $\left(\frac{a}{c}+1\right)$, где a – это абсолютная величина

[41] На известном английском интернет-ресурсе *MacTutor History of Mathematics Archive* (*http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/*) приведен ошибочный перевод этой задачи с французского на английский.

наибольшего отрицательного коэффициента. Здесь $a=|-648|=648$; c – коэффициент при старшей степени, $c=1$, следовательно, большая гипотеза для нашего уравнения равна 649. Ролль утверждал, что это верно для всех многочленов. Малая гипотеза – это число, меньшее любого из корней. Так как рассматривались только положительные корни, в качестве малой гипотезы брался ноль. Крайняя, или краевая, гипотеза – это внутренняя граница, разделяющая корни вспомогательных уравнений, называемых каскадами. Все крайние гипотезы Ролль называет средними гипотезами (*hypothèses moyennes*).

Итак, $v^4-24v^3+198v^2-648v+473=0$, все положительные корни расположены в интервале (0, 649). Задача, которая стоит перед Роллем, – разбить этот интервал на несколько меньших интервалов, каждый из которых содержит только один корень исходного уравнения, т. е. выделить корневой промежуток.

Первое слагаемое имеет степень неизвестного, равную 4, Ролль умножает его на 4. Второе слагаемое имеет степень 3, он умножает его на 3. Третье слагаемое, имеющее степень 2, умножается на 2; четвертое, имеющее степень 0, умножается на 0. Далее Ролль получает: $4v^4-72v^3+396v^2-648v=0$ и делит все члены уравнения на неизвестное v. Получается $4v^3-72v^2+396v-648=0$. Он вновь умножает каждый член уравнения на показатель степени: $12v^3-144v^2+396v=0$ и делит на неизвестное: $12v^2-144v+396=0$. И еще раз: $24v^2-144v=0$, $24v-144=0$, $4v-24=0$.

Расположим каскады следующим образом:

Первый каскад: $4v-24=0$.

Второй каскад: $6v^2-72v+198=0$.

Третий каскад: $4v^3-72v^2+396v-648=0$.

Четвертый каскад: $v^4-24v^3+198v^2-648v+473=0$.

Корни каждого каскада разделены корнями предыдущего, и все положительные корни лежат в (0, 649). Так как 6 – это корень первого каскада, то корни второго каскада лежат в (0, 6) и (6, 13), причем в каждом интервале лежит только один корень, а число $13=\frac{|-144|}{12}+1$ – это большая гипотеза для данного уравнения (обозначения современные [42]). Будем искать только самый левый из корней, остальные вычисляются аналогично. Значения многочлена $6v^2-72v+198$ на краях интервала (0, 6) имеют разные знаки. Возьмем какое-нибудь среднее значение из интервала, не обязательно середину, и проверим знаки:

$f_2(5)=-12<0$, $f_2(4)=6>0$.

---

[42] Знак модуля ввел К. Вейерштрасс.

Следовательно, корень второго каскада лежит в (4, 5). Продолжая итерации или пользуясь известной формулой Виета, получим значение $6-\sqrt{3}$. Второй корень $6+\sqrt{3}$.

Следовательно, границы, в котором лежат корни третьего каскада, будут таковы: $\left(0,6-\sqrt{3}\right),\left(6-\sqrt{3},6+\sqrt{3}\right),\left(6+\sqrt{3},163\right)$, причем в каждом из интервалов лежит только один корень. Здесь число $163=\frac{|-648|}{4}+1$ – большая гипотеза для третьего каскада. Будем искать только самый левый корень третьего каскада. Проверим знаки третьего каскада на краях этого интервала – они различны. Возьмем какую-либо среднюю точку из интервала $\left(0,6-\sqrt{3}\right)$ и вычислим значение

$$f_3(v)=4v^3-72v^2+396v-648.$$

$$f_3(0)=-648<0,\ f_3(5)=32>0,\ f_3(4)=40>0,\ f_3(3)=0.$$

Следовательно, левый корень третьего каскада равен 3, значит, левый (положительный) корень четвертого каскада (т. е. корень исходного уравнения) лежит в (0, 3). Вычислим значения $f_4(v)=v^4-24v^3+198v^2-648v+473$ на краях интервала и в некоторых средних точках: $f_4(0)=473>0,\ f_4(3)=-256<0,\ f_4(1)=0.$

Таким образом, мы нашли левый корень уравнения $v=1$. Аналогично вычисляются и остальные корни. В случае приближенного вычисления процедура позволяет найти корень с точностью до любого десятичного знака. Для интервалов большой протяженности Ролль прибегает к вспомогательному уравнению, сделав замену $v=\left(\frac{a}{c}+1\right)-x$, где $\left(\frac{a}{c}+1\right)$ – это большая гипотеза.

Кроме этого метода решения алгебраических уравнений Ролль предлагает еще четыре других, а также методы решения неопределенных уравнений и способ нахождения общего делителя многочленов.

Как видим, Ролль с помощью коэффициентов выделяет пределы, между которыми лежат корни. В методе каскадов, хотя и без терминологии дифференциального исчисления, он использовал принцип разделения корней многочлена корнями его производной, а существование корней проверялось различием знаков многочлена на краях интервала. В 1691 г. в работе, посвященной обоснованию метода каскадов, Ролль доказывал, что значения производной (т. е. производного полинома) для двух соседних (однократных) корней целого многочлена имеют разные знаки [413, с. 47].

Понятие функции в XVII в. только формировалось, и еще не было понятия графика функции и понятия геометрического места точек. Поэтому представление о корне как о точке, в которой график функции пересекает ось, еще не существовало.

Этот образ возник у Ролля. Он убеждался в наличии корня в интервале, определяя знаки многочлена в левой части уравнения на краях интервала. Если знаки были различны, корень лежал в интервале. Ролль сужал интервал, проверяя знак многочлена в какой-либо внутренней точке интервала. Таким образом, Ролль явился родоначальником двух теорем анализа: теоремы о корневом интервале, которую мы сейчас называем теоремой Больцано – Коши, и собственно теоремы Ролля, гласящей, что корни непрерывной функции разделены корнями ее производной.

На русском языке метод каскадов Ролля изложен в работе С. А. Яновской (Яновская С. А. Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых // Труды Института истории естествознания. М., 1947. Т. 1. С. 327–346), хорошая реконструкция метода каскадов есть на английском языке [446]. Первоисточником биографии Ролля служит «Похвальное слово М. Роллю» его современника, секретаря Парижской академии наук Б. Фонтенеля [256].

1707 г. Ролль и Ньютон. До Ролля приближенное решение алгебраических уравнений производилось графическими методами, т. е. путем нахождения точки пересечения кривых и с помощью простых итераций. Вероятно, Ролль был первым, кто сформировал понятие корневого интервала исходя из сравнения знаков соответствующего многочлена.

Сам геометрический образ задачи не соответствовал поиску пересечения кривой с осью, а осуществлялся как поиск точек пересечения двух кривых. Поэтому образ графика, имеющего на краях отрезка ординаты разных знаков, в терминах алгебры возникнуть не мог. Ньютон, например, представлял переменные как величины, изменяющиеся во времени, а не зависящие друг от друга [84]. Представление о линии как о геометрическом месте точек уравнения [43] началось с работы Г. Ф. А. Лопиталя о конических сечениях, было развито Л. Эйлером, а общий подход сформировался лишь в XIX в.

Ньютон описал свой метод касательных в работах «Анализ уравнений с бесконечным числом членов» [44] и «Метод флюксий и бесконечных рядов» [45]. Этот метод был изложен также в книге Дж. Валлиса 1685 года «Трактат по алгебре» [444]. В 1690 г. в Англии был опубликован трактат Дж. Рафсона «Общий анализ уравнений» [409], содержавший усовершенствованное изложение метода Ньютона – Рафсона, или метода касательных [46]. В 1707 г. вышла книга

[43] Это понятие следует отличать от понятия геометрического места точек, обладающих заданным свойством (например, окружность), возникшего в Античности.

[44] *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* – рукопись лекций, которые Ньютон читал в университете, записанных на латыни в 1669 г. по настоянию И. Барроу. Известен вариант этого текста в виде письма Барроу к Дж. Коллинзу 1669 года. Текст был изложен в «Трактате по алгебре» Дж. Валлиса в 1685 г. (2-е изд. в 1693 г.) и опубликован Ньютоном в 1711 г. [397].

[45] *De methodis fluxionum et serierum infinitarum* – написана Ньютоном в 1671 г., опубликована на английском языке в 1736 г. [398].

[46] Если Ньютон рассматривал последовательность приближающих многочленов, Рафсон уже рассматривает последовательные итерации переменной.

Ньютона «Всеобщая арифметика» [396], рус. пер. [88], описывающая численные методы решения уравнений.

Ньютон, до появления «Трактата» Ролля пользуясь методом касательных, не проверял знаки функции на краях интервала, что можно видеть в его работах до 1690 г., например, в его «Методе флюксий и бесконечных рядов» [398], написанном в 1671 г., но опубликованном лишь в 1736 г. Для определения отправной точки процедуры вычисления корня Ньютон использовал метод ложного положения и так называемый «параллелограмм Ньютона», или «многоугольник Ньютона».

Парижская академия и Лондонское королевское общество обменивались академической литературой. Несомненно, Ньютон получил «Трактат» Ролля, более того, он включил изложение его метода в свое издание «Всеобщей арифметики» [88, с. 267-270] 1707 года, правда, без указания авторства Ролля. Но только после появления работы Ролля, в 1707 г., Ньютон впервые начинает проверять знаки полинома на краях интервала во «Всеобщей арифметике». Способ сужения интервала, содержащего корень, с помощью проверки знака полинома в некоторой внутренней (не обязательно средней) точке впервые встречается у Ролля. Больцано формализовал его 117 лет спустя как метод половинного деления. Добавим, что Ньютон все рассматриваемые функции полагал определенными по непрерывности, а Ролль рассматривал только многочлены, являющиеся непрерывными функциями.

Метод Ньютона и использование разложения в ряды Маклорена пользовались большей популярностью у континентальных математиков. В 1740 г. Т. Симпсон дал обобщенное описание метода Ньютона [47] в работе «Очерки по некоторым вопросам умозрительной и смешанной математики» [422].

1696 г. Г.Ф. де Лопиталь. В 1696 г. в Париже вышел первый учебник математического анализа «Анализ бесконечно малых для исследования кривых» [342] маркиза Г. Ф. де Лопиталя с изложением лекций И. Бернулли. В нем впервые изложено дифференциальное и интегральное исчисления, использованы понятия абсциссы, ординаты, координат, геометрического места точек. Правда, легкости и доступности изложения Лопиталь достигает за счет пренебрежения обоснованиями: «Я убежден, что в вопросах математики полезны лишь выводы и что книги, излагающие только подробности или частные предложения, заставляют лишь терять время тех, кто их пишет, и тех, кто их читает» [69, с. 57]. Но он дает геометрический смысл производной, связь возрастания и убывания функции со знаком первой производной, необходимое условие экстремума. Здесь же приведено такое рассуждение:

[47] Симпсон для итераций уже использовал производную.

Всякая непрерывно возрастающая или убывающая величина [48] не может превратиться из положительной в отрицательную, не проходя через бесконечность или через нуль, а именно: через нуль – когда она сначала убывает, и через бесконечность – когда она сначала возрастает. Отсюда следует, что дифференциал наибольшей или наименьшей величины должен равняться нулю или бесконечности. Легко можно понять, что непрерывно убывающая величина не может из положительной стать отрицательной, не проходя через нуль; но не так очевидно, что при возрастании она должна пройти через бесконечность [69, с. 130-132].

Эта книга открывает начальный период развития математического анализа, в котором все функции были непрерывными, потому что были целыми алгебраическими, и аналитические утверждения основывались на геометрическом представлении. Правила дифференциального исчисления XVII–XVIII вв. были определены лишь для алгебраических функций, формулы производных трансцендентных функций появятся позже в работах Эйлера и Коши.

1708 г. Метод Ролля в трактате Ш.-Р. Рейно. Труды Гудде, Декарта, Ролля, Ньютона, Лейбница, Бернулли и Лопиталя хорошо знал французский проповедник и профессор философии Ш.-Р. Рейно. Будучи знаком с упреками в недостаточности обоснования и отсутствии систематического изложения новой математики, он поставил себе целью дать полный курс анализа, алгебры и геометрии в их взаимосвязи с доказательствами. В 1708 г. в Париже в двух томах вышла его книга «Доказательный анализ» [410] с изложением результатов названных выше математиков. Заметим, что до того времени в математике доказывались лишь геометрические утверждения, а в алгебре и зарождающемся анализе ограничивались лишь демонстрацией примеров.

Первый том «Доказательного анализа» посвящен алгебраическим вопросам, второй – дифференциальному и интегральному исчислению, причем большинство утверждений автор пытается обосновать, давая большое количество примеров, не только математических, но и из области механики и астрономии. Примечания ко второму изданию 1736 г. написал П. Вариньон.

Шарль-Рене Рейно (1656-1728), профессиональный проповедник, хорошо владел искусством изложения и подбора терминов не только на латыни, но и на французском языке. Его язык выгодно отличается от тяжелого языка Ролля не только большей мелодичностью текста, но и последовательностью в обоснованиях, удачными определениями понятий. Рейно сначала рассматривает линейные уравнения, составляя уравнения высших степеней перемножением двучленов, доходя до уравнений шестой степени. Он показывает решения не только численных, но и буквенных алгебраических уравнений как в радикалах, так и

[48] Лопиталь имеет в виду подкасательную.

приближенно; приводит основную теорему алгебры, теорему о значении остатка от деления многочлена на двучлен [49]. Его доказательства представляют собой рассуждения с демонстрацией частных случаев и показ примеров. В алгебраических уравнениях Рейно различает случаи однократных, кратных, положительных, отрицательных, целых, дробных, неизмеримых, а также мнимых корней.

Рейно посвящает большой раздел [там же, с. 269–375] методу Ролля:

«В шестой книге объяснен и доказан метод нахождения величин, которые являются пределами неизвестных в степенном уравнении (господин Ролль является автором этого метода), и дается несколько способов решения с помощью этих пределов, причем корни могут быть вычислены с любой желаемой точностью» [там же, Т. 1, с. XII].

Рейно, развивая идеи Ролля, ввел свою терминологию. Каждое вспомогательное уравнение, корнями которого являются границы корней предыдущего уравнения, он называет уравнением пределов (*l'équation des limites*), а границы интервала, содержащего корень, называет пределами корней. Рейно определяет корневой интервал, содержащий действительный корень, по отличию знаков левой части уравнения на пределах корней; описывает восходящую и нисходящую процедуры по Роллю.

Второй том «Доказательного анализа» посвящен дифференциальному и интегральному исчислению. В нем содержится утверждение, что касательная к кривой (для конических сечений) в некоторой точке параллельна диаметру [там же, Т. 2, с. 176], а также такое: если ряд значений некоторой переменной, например, подкасательной [50], сначала положителен, а затем становится отрицательным, то он проходит некоторую точку, в которой значение рассматриваемой величины, наклона или подкасательной, равно нулю или бесконечности [там же, т. 2, с. 177].

1727-1729 гг. Теорема Ролля у Дж. Кемпбелла и К. Маклорена. «Доказательный анализ» Рейно был известен в Англии. Его цитирует Дж. Кемпбелл [51] в 1727 г. в работе «Метод определения количества невозможных (мнимых. – *Г. С.*) корней в низших уравнениях» [200].

Кемпбелл переводил французские математические сочинения на английский язык и сам занимался решением алгебраических уравнений. В упомянутой работе он пересказывает процедуру Ролля, привлекает метод максимумов и минимумов Ферма и рассматривает случай финального квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом. Тогда можно по перемене знаков коэффициентов исходного уравнения назвать количество мнимых корней, точнее, их наименьшее количество. По поводу строгости доказательств с ним полемизирует К. Маклорен (1698–1746) в своем письме [381] в этот же журнал. Маклорен формулирует

---

[49] Эта теорема носит имя Э. Безу (*E. Bezout*). Эта же теорема встречается и у Рафсона [410, с. 270-271].

[50] Подкасательной называется проекция отрезка касательной между точками пересечения с осью *OX* и точкой касания на ось *OX*.

[51] Об этом шотландском математике известно лишь, что он полемизировал с К. Маклореном и умер в 1766 г.

следующую теорему: «Корни уравнения $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \& c. = 0$ являются пределами корней уравнения $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \& c. = 0$» [там же, с. 88].

Перемена знаков перед коэффициентами обеспечивает n положительных корней. Это утверждение уже имеет статус теоремы. Маклорен рассматривает также более общий вид вспомогательного уравнения, использованный Гудде в 1658 г.

1746 г. А.К. Клеро. В 1746 г. вышла книга А. К. Клеро «Основы алгебры» [217], в которой рассказывается о методах решения алгебраических уравнений. Большое внимание уделено методу Ньютона и Маклорена, но ни слова о Ролле и его методе.

1755 г. Теорема Ролля у Л. Эйлера. В 1755 г. Петербургская академия наук опубликовала сочинение Л. Эйлера «Наставление по дифференциальному исчислению» [249]. Тенденция сближения алгебры и анализа, которую мы видели в трактате Рейно, обсуждения Даламбера и Эйлера уравнения струны привели к расширению понятия функции. Эйлер гордится тем, что при изложении анализа ему не требуется обращаться к прикладной интерпретации. В IX главе он пишет: «Понятие уравнения можно свести к понятию функции» [142, с. 367]. Здесь Эйлер рассматривает многочлен как заведомо непрерывную функцию, удовлетворяющую его представлениям о непрерывной функции – как функции, заданной единым аналитическим выражением. Эйлер повторяет теорему Маклорена, приведенную нами выше, о корнях уравнения $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + dx^{n-4} - и\,т.д. = 0$, которые разделены корнями производного уравнения, т. е. экстремумами. Заметим, что и Маклорен, и Эйлер рассматривали уравнение, заведомо имеющее *n* действительных корней. Проблема определения количества мнимых корней, поставленная Кемпбеллом, рассмотрена Эйлером в XIII главе. Эйлер обобщает свое рассуждение:

«Из сказанного, впрочем, ясно, что если у предложенного уравнения и не все корни действительны, все же всегда между какими-либо двумя корнями имеется максимум или минимум. Обратное же утверждение вообще несправедливо, т. е. между двумя какими-либо максимумами или минимумами может не содержаться действительный корень. Это заключение, однако, можно сделать, если добавлено условие, что одно из значений *z* будет положительным, а другое отрицательным <…>. Между двумя действительными корнями уравнения существует одно значение, при котором функция становится максимумом или минимумом» [там же, с. 435–436].

Обоснование Эйлера основано на представлении о непрерывном движении, он переносил на функции все свойства алгебраических выражений.

1797 г. Теорема о корневом интервале в «Основах алгебры» С.Ф. Лакруа. В 1797 г. в Париже вышло первое издание «Основ алгебры» С. Ф. Лакруа, автора многократно переизданных курсов высшей математики, известных в России XIX в. В «Основах алгебры» он приводит следующую теорему о корневом промежутке:

Если имеются две величины, которые, будучи подставленными в уравнение вместо неизвестной, дадут два результата противоположного знака, мы можем заключить, что корни данного уравнения находятся между этими величинами, и они действительны (Lacroix, S. F. Éléments d'algèbre, à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations. 15 ed. Bruxelles : H. Remy, 1830. P. 298).

В 1811 г. в Майнце вышел авторизованный немецкий перевод «Основ алгебры» Лакруа, сделанный М. Меттернихом, профессором математики и физики университета Майнца [353]. В этой книге также изложена теорема о корневом интервале. Эта книга многократно переиздавалась на немецком языке и широко использовалась немецкими математиками.

1768 г. А.Г. Кестнер о выделении корневого интервала. А. Г. Кестнер, профессор математики и физики в Гёттингене, был уважаем как известный методист по вопросам анализа. Отметим, что он еще до Коши рассматривал иррациональные числа как пределы рациональных последовательностей. Кестнер состоял в переписке с Эйлером.

В 1758–1769 гг. Кестнер опубликовал четырехтомный (каждый том содержал 2-3 части) курс «Основы математики» [346], превосходный методически, с хорошим историческим обзором, многократно переиздававшийся. В курсе отчетливо видно влияние Эйлера. На русском языке курс Кестнера был издан в 1792–1803 гг. Метода Ролля у Кестнера нет, но в третьем томе «Анализа бесконечных величин», вышедшем в 1760 г., есть теорема о корневом интервале многочлена с доказательством, использующим геометрическую аналогию. Приведем ее по доступному немецкому изданию 1794 г.): «Теорема. Если y положителен для $x = a$ и отрицателен для $x = c$, то между a и c найдется хотя бы одно значение $x = b$, для которого $y = 0$» [347, с. 198]. Влияние Кестнера на немецкое математическое образование было очень велико, к его работам обращался К. Вейерштрасс.

1798 г. Ж.Л. Лагранж о методе Ролля. В 1798 г. Ж. Л. Лагранж предложил свой метод отделения корней, основанный на методе Ролля [359]. Лагранж утверждает, что корни исходного уравнения разделены корнями производного уравнения и характеризуются подстановкой корней производного уравнения в исходное уравнение и определением его знака:

Таким образом, эти правила позволяют не только определять число действительных корней уравнения, но и границы, в которых они лежат; и если вы хотите ограничить корни между величиной, большей, чем α_1 и меньшей, чем v_1, нужен дополнительный поиск по методу, изложенному в главе IV (№ 12), о границах положительных корней данного уравнения.

Заметим, что правила, позволяющие найти эти пределы и изложенные нами по Ньютону и Маклорену, были известны еще Роллю, что видно из V и VI глав его “Алгебры”» [там же, с. 199].

1817 г. Б.Больцано и теорема о корневом интервале. Б. Больцано, чешский математик и философ, немало сделал для развития понятия непрерывного и бесконечного. В его работе 1817 года «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» [179] он критикует доказательства Кестнера, Клеро, Лакруа, Меттерниха, Реслинга, Клюгеля и Лагранжа за привлечение геометрических и физических образов (времени и движения, перехода) и за отсутствие аналитичности рассуждения, т. е. понимания непрерывности как математического понятия [52]. Больцано пишет (курсив оригинала):

«Ведь в самом деле, если учесть, что доказательства в науке вовсе не должны быть лишь *уверениями*, а, наоборот, *обоснованиями*, то есть изложениями того объективного основания, которое имеет доказываемая истина, то нам само собой станет ясным, что подлинно научным доказательством, или объективным основанием истины, которая верна для *всех* величин, безразлично, находятся ли они в пространстве или нет, никак не может быть истина, которая верна только для величин, находящихся в *пространстве* [...] Совершенно ошибочно выводить утверждение о том, что каждая непрерывная функция x, которая становится положительной для одного значения x, а отрицательной для другого значения x, должна стать нулем для какого-нибудь значения x, лежащего между ними, – совершенно ошибочно выводить это утверждение из того, что линия пересекает ось абсцисс. Не менее неприемлемо доказательство, которое строят на понятии *непрерывности* функции, примешивая сюда понятия *времени* и *движения*. Понятие *времени*, а тем более *движения* столь же чужеродно в общей математике, как и понятие *пространства*. Лишь одного требуем мы, однако, строго: чтобы никогда не выдвигали примеры вместо *доказательств* и чтобы никогда не основывали существо самого заключения на выражениях, употребленных только в несобственном смысле, и на побочных представлениях, которые они вызывают, так что заключение отпадает, как только меняют эти выражения.

Закон непрерывности Больцано формулирует так:

Функция $f(x)$ изменяется по закону непрерывности [53] для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, лишь то, что если x какое-нибудь из этих значений,

[52] Правда, как нам удалось убедиться, ни Клеро в упомянутом труде 1746 г., ни доктор Эрлангенского университета Х. Л. Реслинг в своей книге 1805 г. «Основы учения о формах, дифференциалах, производных и интегралах функций» [415] не обращаются к методу Ролля и его теореме о корневом промежутке. Приведенные Больцано ссылки на них не соответствуют заявленной теме [9, с. 171].

[53] Формулировка этого закона принадлежит Лейбницу.

тогда разность $f(x+\omega)-f(x)$ может быть сделана меньше, чем любая заданная величина, если можно принять ω столь малым, сколько мы хотим.

<...>*Истинным* является утверждение, что непрерывная функция никогда не достигает своего высшего значения без того, чтобы пройти сначала через все низшие, т. е. что $f(x+n\Delta x)$ может принимать всякое значение, лежащее между $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$, если принять *n* произвольно между 0 и 1. Однако это утверждение нельзя рассматривать как *объяснение* понятия непрерывности, оно является *теоремой* о непрерывности. Таким образом, эту теорему можно сформулировать так:

Если переменная величина, зависящая от другой переменной величины *x*, окажется для $x=\alpha$ положительной, а для $x=\beta$ – отрицательной, то всегда существует значение *x*, лежащее между α и β, для которых она становится нулем, или же такое, для которого она становится бесконечной.

Это теорема, говорит Больцано, и она должна быть доказана. Больцано также обращает внимание на то, что такая точка *x* может быть не единственной. Он полагает ее лежащей в основе теоремы алгебры о разложении многочлена на множители и теоремы Лагранжа о положительности определенного интеграла для положительной функции, равной нулю лишь в крайней точке интервала.

Больцано предлагает свой, более строгий, план доказательства этой теоремы, основанной на другой, более общей:

Если две функции *x*, $f(x)$ и $\varphi(x)$, либо для *всех* значений *x*, либо для всех, которые лежат между α и β, изменяются *по закону непрерывности*, если далее $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$ и $f(\beta)>\varphi(\beta)$, то имеется всякий раз значение *x*, лежащее между α и β, для которого будет $f(x)=\varphi(x)$» [9, с. 174-176].

Эту теорему Больцано доказывает с помощью предположения о существовании верхней грани такой области, где выполняется некоторое отвлеченное свойство функции [54], при этом использует во вспомогательной теореме метод деления интервала пополам. Он показывает, что существование точной верхней грани не приводит к противоречию, ибо более строгое доказательство существования границы стало возможно лишь после появления теории действительного числа, разработанной к 1872 г. Ш. Мере, К. Вейерштрассом, Э. Гейне, Р. Дедекиндом и Г. Кантором. Попытка разработать теорию действительного числа через сечение была сделана Больцано позже, в 1830-е гг. [104].

[54] Например, отрицательность.

После этого Больцано доказывает теорему о корневом интервале [55]. Здесь же он формулирует еще одну теорему: «Переходя от одного своего значения к другому, функция хоть раз принимает в качестве значения каждое промежуточное число» [9, с. 198][56]. Больцано подчеркивал, что указанное свойство есть следствие непрерывности, но его нельзя класть в основу определения непрерывности.

В этой же работе содержится и критерий сходимости последовательности [там же, с. 188–189], сформулированный четыре года спустя О. Коши и носящий его имя. Больцано принадлежат многие основополагающие идеи, воплощение которых принято связывать с именами Коши и Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда. Это понятие верхней грани (1817), осознание необходимости и попытка построения теории вещественного числа (1830-е гг.), теоретико-множественные представления [57].

1821 г. О.Л. Коши. Теорема о корневом промежутке в «Курсе анализа». В 1821 г. О. Л. Коши под названием «Алгебраический анализ» [208] издал первую часть «Курса анализа», написанного на основании лекций, прочитанных в Политехнической школе. Вторая его часть, посвященная дифференциальному и интегральному исчислению, была опубликована в 1823 г. В силу труднодоступности первого издания мы будем ссылаться на «Собрание сочинений» Коши [209].

Коши гениально перерабатывал идеи, высказанные его коллегами и порой нестрого либо неумело обоснованные. В качестве примера можно привести идеи Ампера, Абеля, Грассмана, Больцано и Галуа [108].

Определение непрерывной функции, введенное в «Алгебраическом анализе», в точности повторяет определение Больцано [109].

Коши не упоминает имени Ролля, хотя уделяет внимание приближенному решению алгебраических уравнений. В главе о решении уравнений он приводит следующую теорему:

Пусть функция $f(x)$ действительной переменной x непрерывна между пределами $x = x_0$, $x = X$. Если $f(x_0)$ и $f(X)$ имеют противоположные знаки, то уравнению $f(x)=0$ может удовлетворять по крайней мере одно или несколько (нечетное количество) действительных значений x, расположенных между x_0 и X [там же, с. 378].

Коши доказывает эту теорему, используя деление отрезка пополам, но, в отличие от Больцано, не пользуется понятием верхней грани, а опирается на сходящиеся последовательности.

---

[55] Заметим, что в русском переводе Кольмана содержатся неточности.

[56] То есть континуум.

[57] Идеи Больцано стали широко известны в Германии благодаря Г. Ганкелю, опубликовавшему в 1870 г. в Тюбингене упомянутую работу Больцано и популяризировавшего другие его работы. Интересна также работа О. Штольца о Больцано [431]. Коши был лично знаком с Больцано и использовал его идеи в своих работах (см.: [108]).

Что очень важно для анализа, Коши формулирует теорему о среднем значении как свойство непрерывной функции:

Теорема о непрерывной функции. Если $f(x)$ – непрерывная функция переменной x между пределами $x = x_0$, $x = X$, и число b расположено между $f(x_0)$ и $f(X)$, то уравнение $f(x)=b$ всегда имеет решение, расположенное между x_0 и X [там же, с. 50].

Коши приводит несколько методов решения алгебраических уравнений, в том числе метод Декарта, сравнивает методы Ньютона и Лагранжа на примере решения одного и того же кубического уравнения, но ничего не говорит о разделении корней уравнения корнями производной.

1834 г. Теорема Ролля у М.В. Дробиша. В 1834 г. профессор Лейпцигского университета М. В. Дробиш опубликовал «Лекции по уравнениям высших порядков» [232], где в § 107 [там же, с.161] рассказывает о методе каскадов Ролля. Он сетует на сложное изложение Ролля, но называет его метод достойным уважения, обосновывает и излагает его так:

«Эти теоремы (правила) получены в незавершенном виде в предложенном проекте Ролля, притом практически крайне затруднительном для понимания методе каскадов. В нем есть существенное зерно, что для решения исходного уравнения друг за другом формируются производные уравнения, что похоже на строительство дома таким методом. Таким образом, мы последовательно получаем корни уравнений низшего порядка, которые дают нам достоверные пределы корней уравнений высшего порядка и которые мы вычисляем приближенно, что изложим позже, вплоть до корней исходного уравнения. Этот метод основан на предположении, что исходное уравнение вообще имеет корни. Это обусловливает его ограниченность и непрактичную громоздкость, вместо поиска более прямого пути» [там же, с.186-188].

Дробиш цитирует теорему о корневом интервале из курса Коши и его теорему о среднем значении в седьмой главе «Альтернативный метод распознавания действительных и мнимых корней» [там же, с.161-176]. Он приводит теорему: «Два близлежащих действительных корня разделены корнем производной уравнения, корни которой в свою очередь разделяются корнями следующей производной» [там же, с. 176]. Далее Дробиш рассматривает частные случаи этой теоремы.

Теорема 1. Между двумя ближними действительными корнями исходного уравнения лежит по крайней мере один действительный корень производной; однако между ними также может находиться 3, 5, и т. д. вообще любое нечетное количество корней. Теорема 2. Между двумя ближними действительными корнями производного уравнения лежит не более одного корня первоначального уравнения, однако также может быть, что между ними совсем нет корней. Теорема 3. Не менее чем один действительный корень исходного уравнения может быть больше, чем наибольший действительный корень производного уравнения; не более чем один действительный корень первоначального уравнения меньше чем наименьший корень производного уравнения; однако может быть, что нет никакого действительного корня исходного уравнения больше большего корня и меньше меньшего корня производного уравнения. В этом последнем выводе мы соединили две половины второго следствия, т. е. наибольший корень исходного уравнения может лежать между первым и вторым или между вторым и третьим, третьим и четвертым и т. д. корнем производного уравнения. (К теоремам имеется примечание Дробиша: «Изложено в соответствии с *Lagrange's Résolution de l'équat. Numér. Not. VIII*, возможно первого изобретателя того и другого из вышеупомянутых тезисов, опирающихся на достойное уважения правило Ролля») [там же, с. 178-179].

Алгебраический аспект теоремы Ролля в решении уравнений привлек также внимание итальянского математика Дж. Беллавитиса, описавшего метод Ролля в своей книге «Простой способ нахождения действительных корней алгебраических уравнений и новый метод определения мнимых корней» [172].

Другие имена. В глубоком исследовании Дж. Барроу-Грин [170] по истории метода каскадов подчеркнута алгебраическая сторона вопроса, упомянуты работы О. Герли (*O. Gherli*, 1771), Ф. Мойно (*F. Moino*, 1840), О. Теркема (*O. Terquem*, 1844), Х. Кокса (*H. Cox*, 1851), Ж. Лиувилля (*J. Liouville*, 1864), Ж. Серре (*J. Serre*, 1868), П.-О. Боне (*P.-O. Bonnet*, 1868), но не выделена роль теорем Ролля в анализе (т. е. линия Больцано – Коши – Кантор).

1861 г. Теорема Ролля у К. Вейерштрасса. Представление о непрерывных функциях резко изменилось в середине XIX в. с появлением новых математических объектов, необходимостью классифицировать точки разрыва и оценивать объем этого понятия и возможность пренебрегать ими при разложении функций в ряды Фурье. Определение непрерывной функции на языке «$\varepsilon - \delta$» ввел К. Вейерштрасс в 1861 г., развитие концепции непрерывности было продолжено в работах Э. Гейне , Р. Дедекинда и Г. Кантора в 1870-х гг.

В летнем семестре (май – июнь) 1861 г. Вейерштрасс читал курс лекций по дифференциальному исчислению в Королевском торговом институте Берлина. Г. Шварц сохранил конспект этих лекций, опубликованный П. Дюгаком [236].

Вейерштрасс определяет непрерывные функции, выводит их свойства.

«Если $f(x)$ есть функция x и x – определенное значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f(x+h)$; разность $f(x+h)-f(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x в $x+h$. Если возможно определить для h такую границу δ, что для *всех* значений h, по абсолютному значению еще меньших, чем δ,

$f(x+h)-f(x)$ становится меньше, чем какая-либо сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции. Ибо говорят, что некоторая величина может стать бесконечно малой, если ее абсолютное значение может стать меньше какой-либо произвольно взятой малой величины. Если некоторая функция такова, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствует бесконечно малые изменения функции, то говорят, что она – *непрерывная функция* (курсив в оригинале. – *Г. С.*) аргумента или, что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом» [131, с. 189].

Под заголовком «Исследование хода функций» приводится следующая теорема:

Если для двух определенных значений x_1 *и* x_2 *аргумента* $f(x_1)=f(x_2)$*, то между* x_1 *и* x_2 *обязательно имеется по меньшей мере одно значение* x_0*, для которого первая производная* $f'(x)$ *равна нулю* (курсив в оригинале. – *Г. С.*) [там же, с. 192].

Как полагает А. П. Юшкевич, «это первая или одна из первых формулировок так называемой “теоремы Ролля”» [там же, с. 193].

Позже, в 1886 г., Вейерштрасс, анализируя расширение понятия функции, писал, что сначала рассматривались только функции, представленные рациональным числовым выражением, например, рядом с рациональными коэффициентами.

Они изменялись по закону непрерывности, и тем исчерпывалось все наше понятие о функции. Но открытие рядов Фурье показало, что это не так, существуют непрерывные функции, которые не могут быть получены прежним способом задания. Для строго определенной непрерывной функции всегда можно найти математическое выражение. Благодаря этому можно вывести свойства любой функции из основных понятий непрерывности, так как в любом научном исследовании важно извлекать из основных понятий дальнейшие последующие [450, с. 21].

Теорема о корневом промежутке, теорема о среднем значении, теорема о корне производной приобрели статус теорем, описывающих свойства непрерывных функций. Если во времена Коши таковых свойств было около четырех, то у Дини их уже одиннадцать.

1878 г. Теорема Ролля у У. Дини. В 1878 г. вышел «Курс лекций по теории функций действительного переменного» [228] профессора Пизанского университета У. Дини. В этом курсе впервые вводится определение непрерывной функции через односторонние пределы. Теорема Ролля, без указания его имени, сформулирована так:

Если в интервале (α,β) функция $f(x)$ конечна и непрерывна и во всех точках, кроме краев интервала, имеет конечную и определенную, либо бесконечную и определенную производную, и, кроме того, в крайних точках a и b принимает одинаковые значения, то в интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка x', для которой $f'(x')=0$ [там же, с. 76-77].

1879 г. Теорема Ролля у Г. Кантора. В период с 1874 по 1884 г. Кантор написал свои основные статьи по теории множеств [50]. В 1872 г. он создает свою теорию вещественных чисел, в 1874 г. доказывает счетность множества алгебраических чисел, в 1878 г. формирует понятие мощности и рассматривает проблему сравнения по мощности непрерывных многообразий любого числа измерений, получив парадоксальный вывод, что все они имеют одинаковую мощность и эквивалентны единичному отрезку. «Я вижу, но не верю», – писал Кантор Дедекинду. Кантор приходит к выводу, что понятие размерности должно опираться на взаимно непрерывное отображение многообразий друг на друга.

В 1879 г. Кантор сделал попытку доказать теорему о том, что два непрерывных многообразия M_μ и M_ν разных порядков μ и ν, где $\mu < \nu$, нельзя отобразить друг на друга непрерывно и двусторонне однозначно. Кантор использовал для доказательства теорему Ролля о корневом интервале. Примечательно, что Кантор ссылается на «Курс анализа» Коши 1821 г., но схема его рассуждения близка интерпретации Больцано 1817 г. Эта попытка доказательства изложена Кантором в статье «Об одной теореме из теории непрерывных многообразий» (*Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*) [там же, с. 36-39]. Его доказательство не было полным [58]. Однако теорема о корневом интервале приобретает у него фундаментальный смысл для понятий непрерывности и размерности.

1886 г. К. Вейерштрасс и обоснование непрерывности. В летнем семестре1886 г. (май – июнь) К. Вейерштрасс читал лекции по обоснованию теории аналитических функций. На основе понятия предельной точки Вейерштрасс развивает понятие точной верхней грани [59], используя теорему о корневом интервале. На ее основе он вводит понятие связности: «...исходя из любой точки континуума, мы всегда в нем и останемся» [450, с. 70].

К названным теоремам обращались многие математики XIX в., во многих случаях их анализ был весьма интересен. К сожалению, за пределами этой главы остались работы Г. Ганкеля и многих других.

Анализ алгебраического уравнения привел к формулировке двух фундаментальных положений теории функций – теоремы о корневом промежутке и теоремы о корне производной – и созданию теоремы о среднем значении. Теорема о корневом промежутке в русской литературе у разных авторов названа и «второй теоремой Ролля»: О. С. Шатуновский [137, с. 121-122] и «теоремой Больцано – Коши» – ученик Шатуновского Г. М. Фихтенгольц [129. С.

---

[58] Первое удовлетворительное доказательство общей теоремы, что многообразия различного числа измерений нельзя отобразить друг на друга одновременно взаимно однозначно и взаимно непрерывно дал Л. Э. Я. Брауэр в статье: (*Brouwer L. E. J.* Beweis der Invarianz der Dimensionzahl / /Mathematische Annalen. 1911. Bd. 70. S. 161–165).

[59] При этом Вейерштрасс использует методы вариационного исчисления.

128]. Теорема о среднем значении называется второй теоремой Больцано – Коши [там же, с. 131].

Заключение. За триста лет сформировалась одна из самых фундаментальных теорем анализа, имеющая не только большое методологическое, но и прикладное значение, например, в дифференциальной геометрии, функциональном анализе, механике. Н. Н. Лузин с ее помощью доказывал теорему о соприкасающемся круге и теорему о центре кривизны [70, с. 137]. В западной историко-математической литературе прежде всего рассматривается ее алгебраический аспект (J. Barrow-Green [170], а также J. Shain [421]). Первоначально предназначенная для многочленов, теорема Ролля была распространена на непрерывные функции, обогатив их свойства. Н. Н. Лузин говорил, что «эта теорема лежит в основании теоретического развития дифференциального и интегрального исчисления» [70, с. 317].

Выводы ко второй главе

Изучение источников, проведённое во второй главе, показывает историю формирования группы теорем о непрерывных функциях и историю расширения понятия действительного числа. Зарождение первых теорем о непрерывных функций началось в алгебре XVII в. Изучен «Трактат о флюксиях» К. Маклорена (1742), в котором он обосновывает метод флюксий Ньютона и показывает важную роль в этом обосновании аксиомы Архимеда. Маклорен освободил приближённые методы от античного принципа однородности, ввёл удачный образ, расположив сходящиеся последовательности на отрезке (понятие сходимости и ряда впервые появилось у Грегори в 1660 г.). Впоследствии этот приём Маклорена войдёт в аксиоматику действительного числа.

Изложено развитие правил дифференцирования в работах Эйлера (1748, 1755), Лагранжа (1770), С.Ф. Лакруа, О.Л. Коши, и развитие двух методов поиска приближённого решения алгебраического уравнения Ньютона – метод многоугольника, применяемый, в частности, для поиска корня, и метод касательных, при этом показано расширение понятия числа у Ньютона. Отмечено, что Ньютон не анализировал сходимости своих методов. Это сделали Ж.Б. Мурайль (1768), Ж.Б. Фурье (опубл. 1831), А. Кэли (1879) и Л.В. Канторович (1937-1957). Дан библиографический обзор истории вопроса.

Изучена эволюция теорем Ролля и Больцано-Коши, начиная с создания М. Роллем метода каскадов в 1690 г., в работах И. Ньютона (1707), Г. Ф. Лопиталя (1696), Ш.-Р. Рейно (1708), Дж. Кемпбелла и К. Маклорена (1727-1729), А.К. Клеро (1746), Л. Эйлера (1755), С.Ф. Лакруа (1797), А.Г. Кестнера (1768), Ж.Л. Лагранжа (1798), Б. Больцано (1817), О.Л. Коши (1821), М.В. Дробиша (1834), К. Вейерштрасса (1861, 1886), У. Дини (1878) и Г. Кантора (1879).

Показано, как анализ алгебраического уравнения привел к формулировке двух фундаментальных положений теории функций – теоремы о корневом промежутке и теоремы о корне производной – и к созданию теоремы о среднем значении.

До конца XVII в. доказательства были приняты только в геометрии, а в алгебре и зарождающемся анализе они заменялись рассуждениями и демонстрацией примеров. Отправной точкой исследования был многочлен, т. е. заведомо непрерывная функция, а необходимость формулирования свойств непрерывных функций назревает после 1822 г. Понятия функции в XVII в. только начало складываться, не было представления о графике как геометрическом месте точек, поэтому не было и представления о корне как о точке пересечения графика с осью. Этот образ возник у Ролля. У Лопиталя использованы понятия абсциссы, ординаты, координат, геометрического места точек, изложен геометрический смысл производной, связь возрастания и убывания функции со знаком первой производной, необходимое условие экстремума. Самую значительную роль в теории функций сыграл Б. Больцано, подробно исследовавший теорему Ролля, и давший первое строгое её доказательство. Это было первым доказательством в математическом анализе. Больцано использовал метод дихотомии, предположение о существовании верхней грани, сформулировал определение непрерывной функции, критерий сходимости последовательности и теорему о среднем значении, что было огромным вкладом в развитие понятий непрерывного и бесконечного. В 1821 г. Коши доказал теорему Ролля с помощью сходящихся последовательностей. С 1861 г. в лекциях Вейерштрасса теорема о корневом промежутке, теорема о среднем значении, теорема о корне производной приобрели статус теорем, описывающих свойства непрерывных функций. Если во времена Коши таких теорем было четыре, то у У. Дини (1878) их уже одиннадцать.

Глава 3. РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЙ ЧИСЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XIX в.

3.1. История теоремы о пределе сжатой переменной

Теорема. Если переменная величина остаётся заключённой всё время между двумя переменными величинами, стремящимися к одному и тому же пределу, то она необходимо стремится к тому же самому пределу (формулировка Лузина).

Логическая схема, лежащая в основе этой теоремы, восходит к методу Архимеда. В «Квадратуре параболы» Архимед использует две суммы трапеций, площади которых соответственно не достигают и превосходят параболический сегмент. Это *первое* в истории математики применение двух последовательностей вписанных и описанных площадей, приближающихся к искомому с избытком и недостатком.

В 1668 году Джеймс Грегори в работе «Истинная площадь круга и гиперболы» [277] использует последовательности отношений вписанных и описанных фигур.

В 1669 году Ньютон создаёт свой метод касательных, в 1830 году сходимость метода была обоснована в работе Ж. Фурье, а в XX веке метод обобщен Л.В. Канторовичем как метод сжимающих отображений.

В 1809 году Гаусс в работе «Теория движения небесных тел» (Theoria motus corporum coelestium, §178-182) с помощью стягивающихся последовательностей выводит формулу $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ [там же, с. 259]. Принято считать, что это первая формализация теоремы о сжатой переменной.

В 1821 году Огюстен Коши в Курсе анализа впервые систематически излагает теорию пределов и доказывает первый классический предел с помощью рассуждения: так как $1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$, и $\cos\alpha \to 1$, то тем более $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ всегда находится между 1 и $\cos\alpha$, следовательно, $\lim . \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ [208, с. 63-64, обозначения оригинала]. Теоремы о сжатой переменной как таковой он не формулирует.

В 1875 году Гастон Дарбу в «Мемуаре о разрывных функциях[60]» строит стягивающиеся последовательности интегральных сумм.

В разных странах эта теорема называется теоремой сжатия, теоремой о промежуточной функции, о двух карабинерах, о сэндвиче (или правило бутерброда), о трёх струнах, теорема о

[60] Darboux G. Mémoire sur les fonctions discontinues //Annales de l'École Normale. 1875. 2-e Série. Tome IV. p. 57–112.

двух жандармах, о двух городовых. Несмотря на её вспомогательную роль, она является одной из фундаментальных теорем анализа.

3.2. История языка «ε-δ». Теорема Лагранжа

«Читая Коши, так и хочется понимать его с позиций Вейерштрасса, но это антиисторический подход. Хотя переходный период до Вейерштрасса тоже нуждается в реконструкции». *А. Граттан-Гиннесс* [274, с. 176].

«Первый этап любого историко-математического исследования состоит в «переводе» изучаемого текста на язык современной науки. После уяснения математического содержания текста наступает второй, более трудный этап работы. Необходимо вложить изучаемое произведение в контекст науки его времени. Нужно выяснить, каковы были исследования предшествующих авторов, какие проблемы стояли перед наукой того времени, кто и как продолжил изыскания, содержащиеся в тексте, как понимались те или иные понятия. После первой, чисто математической интерпретации текста, встаёт более сложный вопрос о его историко-математической интерпретации, о месте изучаемого текста в той модели развития математики, которую мы строим для данной эпохи». *И.Г. Башмакова* [6, с. 191].

Принцип непрерывности. Понятие непрерывности с раннего античного времени имело много аспектов – пространственно-временной, физический, геометрический. С расширением круга задач и с развитием представления о функции физического и геометрического понимания непрерывности становилось недостаточно, требовалась арифметизация этого понятия.

В XVII веке Г. Лейбниц сформулировал «Закон непрерывности»: «Если явления (или данные) непрерывно сближаются так, что напоследок одно переходит в другое, то это же должно произойти и с соответствующими последующими или результатами (или искомыми)[61]».

Валлис в «Арифметике бесконечного» ввёл определение: «предел переменной величины – это величина постоянная, к которой переменная приближается так, что разность между ними может быть сделана менее любой данной величины». Экземпляр этой книги Валлиса, принадлежавший Эйлеру, сейчас находится в фонде Эйлера[62] в Архиве академии наук в Санкт-Петербурге.

Эйлер считал непрерывными функции, изображаемые одной формулой (для него функция $y = 1/x$ непрерывна в своей области определения, а функция $y = |x|$ разрывна, потому что определяется двумя формулами). По Эйлеру «правила исчисления опираются на закон непрерывности, согласно которому кривые линии описываются непрерывным движением точки», «непрерывная линия строится так, что её природа выражается с помощью одной определённой функции от *x*» [142, с. 21]. Знаменитой стала эйлерова формулировка непрерывности: «Нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги».

[61] Подробно этот вопрос изложен в [32]. Благодарю С.С. Демидова, обратившему внимание на близость этой идеи Лейбница и понимание непрерывности Больцано и Коши.

[62] Архив АН. Ф. 136. Д. 137. Оп. 1.

В 1765 г. Ж. Даламбер даёт следующее определение предела: «Говорят, что величина является пределом другой величины, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую данную величину, сколь бы малой её не предположить, без того, однако, чтобы приближающаяся величина могла когда-либо превзойти величину, к которой она приближается; таким образом, разность между такой величиной и её пределом абсолютно неопределима» [131, с. 155-156]. Определение предела у Даламбера носило кинетический характер: «Не раньше, чем вы пройдёте предел, и не позже, но в момент прохождения предела» [435, с. 14].

Усилению интереса к инфинитезимальным вопросам способствовал конкурс, объявленный по инициативе Ж. Лагранжа Берлинской академией наук в 1786 году: «... требуется *ясная и точная теория того, что в математике называют бесконечным»* [150, с. 140]. 23 сочинения, присланные на конкурс, не удовлетворили Академию: «…требуемый принцип не должен ограничиваться исчислением бесконечно малых, но распространяться также на алгебру и на геометрию, трактующую на манер древних» [там же, с. 141]. Лауреатом стал швейцарский математик, проживавший в те годы Варшаве, Симон Люилье (1750 – 1840). В его работе «Элементарное изложение принципов высших исчислений», изданной Академией в 1786 году, впервые появляется символ $\lim \frac{\Delta P}{\Delta x}$ [343, с. 31]. Потом этот символ стал использовать Лакруа[63].

Лагранж был разочарован инфинитезимальными методами и в последующие годы избегал использования бесконечно малых.

Самым востребованным методом геометров XVIII века была аппроксимация. Например, «решая уравнение типа $(x+1)^{\mu}=a$ при нецелом μ, мы не можем найти точное решение, но аппроксимируем его бесконечным рядом. Определив конечное число элементов аппроксимирующего ряда, геометры XVIII века старались вычислить верхнюю границу ошибки аппроксимации (error, ε) – разность между суммой ряда и её n-й частичной суммой. Доказательной техникой здесь служила алгебра неравенств» [269, с. 4]. Математики работали с целыми функциями – рядами по целым степеням. Неявно предполагалось, что любая функция представима рядом сколь угодно точно. Теорема Вейерштрасса о приближении функции многочленом была сформулирована гораздо позже, в 1885 году. К операциям, производимым над функциями, относились, как к алгебраическим.

[63] Сильвестр Лакруа (1765 – 1843) был последователем Лагранжа в Политехнической школе и профессором анализа у Коши. В 1850-х годах Вейерштрасс стал использовать обозначение $\lim\limits_{x=c}$; в 1905 году английский математик Джон Лезем впервые использует $\lim\limits_{x\to c}$ в книге [366].

Первые десятилетия XIX века можно охарактеризовать как период «наивной» теории функций – математический анализ развивался на базе элементарных функций, непрерывных и дифференцируемых, на основе интуитивных, качественных определений предела, окрестности, непрерывности и сходимости.

Лагранж. В 1797 г. Лагранж публикует «Теорию аналитических функций, содержащую начала дифференциального исчисления, освобождённые от всякого рассмотрения бесконечно малых, исчезающих пределов и флюксий и сведённые к алгебраическому анализу конечных величин». Рассматривая функцию fx и подставляя вместо x новую величину $x + i$, Лагранж утверждает, что $f(x+i)$ может быть разложена в ряд по положительным степеням i, а коэффициенты при них находятся дифференцированием, что справедливо для известных функций. Рассматривая первый член разложения, Лагранж получает $f(x+i) = fx + iP$, откуда $P = \frac{f(x+i) - fx}{i}$. При этом i может быть настолько малым, чтобы любой член разложения был более суммы всех следующих членов разложения, и это имеет место также для всех меньших значений i [360, с. 160-168]. Лагранж добавляет: «Совершенство методов приближения, в которых применяются ряды, зависит не только от сходимости рядов, но ещё от возможности оценить ошибку, происходящую от членов, которыми пренебрегают; и можно сказать, что все приближённые методы, употребляемые в геометрических и механических задачах, ещё очень несовершенны. Предыдущая теорема во многих случаях сможет сообщить недостающее им совершенство, без чего их часто бывает опасно применять» [там же, с. 67-68][64].

В 1800 г. появляется работа К.Ф. Гаусса «Основные понятия учения о рядах» [262], где он рассматривает ряды как последовательности частичных сумм.

Ампер. В 1806 г. вышла статья Анри Ампера «Исследование некоторых вопросов дифференциального исчисления, позволяющих получить новое представление ряда Тейлора и его выражение в конечном виде, если ограничить суммирование» [159], имеющая непосредственное отношение к нашей истории. Здесь на 33 страницах Ампер доказывает теорему Лагранжа о среднем значении и на её основании получает то, что мы называем рядом Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа. А.П. Юшкевич называет эту работу Ампера попыткой аналитически доказать дифференцируемость непрерывной функции [48, с. 243].

Основным инструментом доказательств у Ампера были неравенства[65], с их помощью он оценивал приближения, характеризовал погрешность интерполяции. Следуя Лагранжу, Ампер рассматривает $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ как функцию двух переменных x и i, выражающую разностное

[64] Цитируется по [48, с. 298], перевод А.П. Юшкевича.
[65] В работах Ж. Лагранжа, Ж.-Б. Фурье (1822 г.), П.А. Рахманова (1803 г.) используется этот же метод.

отношение двух значений x и $x + i$ одной переменной, причём эта разность не равна ни нулю, ни бесконечности ни при каком x, а при $i = 0$ превращается в $\frac{0}{0}$, но не равна ни нулю, ни бесконечности. Эту функцию Лагранж назвал *следующей из производной*.

Заметим, что символ i здесь означает действительное число, мнимую единицу тогда обозначали символом $\sqrt{-1}$. Ампер оговаривает, что будет рассматривать только функции действительной переменной. Разумеется, в рассмотрение по умолчанию включались только «хорошие» функции – непрерывные и дифференцируемые на конечном интервале[66]. Ампер замечает, что эта функция должна уменьшаться или увеличиваться с изменением i. Переменная x изменяется от $x = a$ до $x = k$, соответствующие значения функции $f(x)$ обозначаются через A и K. Ампер делит интервал от $x=a$ до $x=k$ промежуточными величинами b, c, d, e, которым отвечают значения функции B, C, D, E . Затем он строит разностные отношения вида $\frac{K-E}{k-e}$ и $\frac{E-A}{e-a}$ и доказывает справедливость неравенств вида

$$\frac{E-A}{e-a} < \frac{K-A}{k-a} < \frac{K-E}{k-e}.$$

Далее между старыми значениями вводятся новые и записываются новые неравенства, в результате для некоторого x происходит постепенное приближение $f'(x)$ к величине $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$. Отсюда получается, что эта величина всегда расположена между двумя значениями производной, вычисленными между x и $x + i$.

Пусть $x+i=z$ и $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=p$.

Тогда $f(z)=f(x)+p\cdot(z-x)$..

Продолжая процедуру, Ампер получает $f(z)=f(x)+f'(x)\cdot(z-x)+p'\cdot(z-x)^2$,

$$f(z)=f(x)+f'(x)\cdot(z-x)+\frac{f''(x)}{2}\cdot(z-x)^2+\frac{p''}{2}(z-x)^3,$$

$$f(z)=f(x)+f'(x)\cdot(z-x)+\frac{f''(x)}{2}\cdot(z-x)^2+\frac{f'''(x)}{2\cdot 3}(z-x)^3+\frac{p'''}{2\cdot 3}(z-x)^4,$$

и так далее.

[66] Сам Ампер в своём мемуаре нигде не употреблял термины точка, интервал, наклон, хорда, касательная, и не делал рисунков.

Ампер приводит примеры разложения некоторых элементарных функций. Далее, рассматривая $f(x)$ как примитивную (первообразную) по отношению к $f'(x)$, он получает связь знака производной с возрастанием или убыванием функции [159]. Доказательство Ампера выглядит громоздким и неуклюжим. Именно это несовершенство и вызвало у Огюстена Луи Коши (1789−1857) желание дать лаконичное и красивое построение, что, как мы увидим далее, послужило источником создания языка «ε−δ».

Коши. С 1813 г. Коши преподавал в Политехнической школе, в 1816 стал академиком. В 1821 году был опубликован его «Курс анализа» [208] (в русском переводе 1864 г. «Алгебрический анализ» [62]) - прочитанный в Королевской Политехнической школе, в котором Коши определяет понятие непрерывной функции: «Функция $f(x)$, данная между двумя известными пределами переменной x, является непрерывной функцией этой переменной, если для всех значений переменной x, взятой между этими пределами, численное значение разности $f(x+\alpha)-f(x)$ бесконечно уменьшается вместе с α. Иными словами, функция $f(x)$ остаётся непрерывной для x между двумя данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной всегда влечёт бесконечно малое приращение самой функции. Добавим также, что функция $f(x)$, непрерывная для x, будет непрерывна и для соседних (voisinage) значений переменной x, лежащих между этими же пределами, как бы близко к этим пределам ни находился x » [208, с. 43]. Здесь он понимает предел как крайнюю точку рассматриваемого интервала.

В дальнейшем при всех обращениях к непрерывной функции Коши повторял и использовал только это определение. Английский историк математики Дж. Грей замечает: «Хотя пределы действительно появились в определениях Коши, но только в смысле конечной точки области определения» [280, с. 62]. Грей выделяет лишь один из двух аспектов понимания предела у Коши – как границы интервала (инселимитный предел), оставляя без внимания исследования Коши неопределённостей в предельной точке (интралимитный предел), например, предел отношения синуса к дуге.

В § 3 первой главы «Курса анализа» Коши рассматривает особые значения функции и доказывает теорему, которая будет ему нужна для рассмотрения эквивалентности бесконечно малых:

«Если с возрастанием переменной x разность $f(x+1)-f(x)$ стремится к известному пределу k, то и дробь $\dfrac{f(x)}{x}$ в то же время стремится к тому же пределу.

Доказательство. Предположим, что количество k имеет конечное значение и что ε есть произвольно малое число. По условию, с возрастанием x разность $f(x+1)-f(x)$ стремится к пределу *k*; кроме того, всегда можно взять столь большое число *h*, что при *x*, равном или большем *h*, эта разность постоянно будет между пределами *k* – ε, *k* + ε. Приняв это, означим через *n* какое-нибудь целое число, тогда каждое из количеств примет вид: $f(h+1)-f(h),\ f(h-2)-f(h+1),\ldots,\ f(h+n)-f(h+n-1)$, а потому их средняя арифметическая, т.е. $\dfrac{f(h+n)-f(h)}{n}$, будет заключаться между пределами *k* – ε, *k* + ε. Поэтому $\dfrac{f(h+n)-f(h)}{n}=k+\alpha$, где *α* – количество между пределами –ε, +ε.

Пусть теперь $h+n=x$, тогда предыдущее уравнение обратится в

$$\frac{f(x)-f(h)}{x-h}=k+\alpha, \qquad (1)$$

отсюда $f(x)=f(h)+(x-h)\cdot(k+\alpha)$ и

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(h)}{x}+\left(1-\frac{h}{x}\right)\cdot(k+\alpha). \qquad (2)$$

Чтобы значение *x* могло возрастать неопределённо, достаточно неопределённо увеличивать число *n*, не изменяя значение *h*. Поэтому положим *h* постоянным в уравнении (2), а *x* примем за переменную, стремящуюся к пределу ∞; тогда количества $\dfrac{f(h)}{x}, \dfrac{h}{x}$, содержащиеся во второй части, будут стремиться к пределу нуль, и вся вторая часть к пределу вида *k* +α, где α постоянно заключается между –ε и +ε. Поэтому отношение $\dfrac{f(x)}{x}$ будет иметь пределом количество, заключающееся между *k* – ε и *k* + ε.

Так как это заключение справедливо как бы мало ни было ε, то искомым пределом функции будет количество *k*. Другими словами, $\lim\dfrac{f(x)}{x}=k=\lim\left[f(x+1)-f(x)\right]$» [62, с. 46].

Аналогично рассматривается случай стремления *x* к $\pm\infty$ [там же, с. 46 – 49].

Как видно, здесь уже имеется структура, развитие которой привело к появлению метода «ε–δ». Но ε является здесь конечной, хотя и произвольно малой оценкой погрешности. Коши улучшает построение Ампера. Спустя два года он усовершенствует аргументацию из этого доказательства. Но необходимость читать курс традиционно, не отклоняясь на новшества, пока не позволяла Коши экспериментировать с введением новых методов. Судя по тому, что Коши приходилось рассказывать студентам основы (приведение к общему знаменателю, основания тригонометрии, свойства показательных функций), базовая подготовка слушателей была скромной. Известно, что студенты Коши шумно протестовали против изучения комплексных чисел – совершенно бесполезного, по их мнению, раздела математики.

В основном курсе Коши содержится изложение элементарных функции одной и нескольких переменных, функций действительной и мнимой (комплексную переменную тогда называли мнимой) переменной, их свойств, теория пределов со сравнением бесконечно малых, теория рядов, интерполяционные формулы Лагранжа.

В 1822 году вышла «Аналитическая теория тепла» Ж.-Б. Фурье, в которой он пользуется δ-приращениями [258, с. 139].

В 1823 году опубликован «Конспект курса лекций по инфинитезимальному исчислению» [210], прочитанных Коши в Политехнической школе. Курс рассчитан на 40 лекций. На русском языке он вышел под названием «Дифференциальное и интегральное исчисление» в переводе В.Я. Буняковского в 1831 году [61]. В нём содержатся определение предела: «Ежели величины, приписываемые какому-либо переменному количеству, приближаются более и более к величине определённой так, что наконец различествуют от оной столь мало, сколь угодно, то сии последние величины называются пределом всех прочих» [там же, с. 3] и определение непрерывной функции: «Ежели функция $f(x)$ изменяется с величиною x таким образом, что для каждого значения сей изменяемой величины, заключающейся в данных пределах, она имеет одну совершенно определённую величину, тогда разность $f(x+i) - f(x)$ между пределами величины x будет количество бесконечно малое; функция же $f(x)$, удовлетворяющая сему условию, называется между теми пределами непрерывною функцией изменяемой x» [там же, с.11]. И далее во второй лекции:

«Если переменные величины связаны между собой так, что по значению одной данной величины можно получить значения остальных, под этим понимают, что эти различные величины выражены с помощью одной из них, называемой *независимой переменной,* а представимые через неё величины называют *функциями* от этой переменной.

Часто при вычислениях пользуются буквой Δ для обозначения одновременного увеличения двух переменных, зависящих одна от другой[67]. Тогда переменная y будет выражена как функция от переменной x равенством

$$y = f(x). \qquad (1)$$

Тогда, если переменная y выражена как функция переменной x равенством $y = f(x)$, то Δy, или приращение y от приращения Δx переменной x, будет определено формулой

[67] Этого замечания не было в курсе 1821 года. Здесь Коши указывает на наличие связи между приращением функции и приращением аргумента, но не конкретизирует зависимость в их изменении, как это сделал сорок лет спустя Вейерштрасс. Вместо этого следует типичный для XVIII и XIX века термин «одновременно» (simultané). Добавим, что метод исчерпывания соизмерялся с антропоморфным временем. Ньютон говорил, что может сосчитать площадь под параболой за половину четверти часа, у него же [201, с. 103]: «в мгновение, когда истекает час, нет уже более какой-либо вписанной или описанной фигуры; но каждая из них совпадает с криволинейной фигурой, которая есть предел, которого они достигают». Другие математики XVIII века также определяли предельный процесс как занимающий некоторое количество часов, обозримый во времени. При этом символ ε обозначал погрешность вычисления, в том числе и у Коши.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \qquad (2)$$

<…> Очевидно, (1) и (2) связаны, следовательно

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (5)$$

Пусть теперь *h* и *i* – две различные величины, первая из них конечная, а вторая бесконечно малая, и пусть $\alpha = \frac{i}{h}$ – бесконечно малая величина, данная отношением этих двух величин. Если Δx соответствует конечная величина *h*, тогда величина Δy, заданная равенством (5), будет так называемой конечной разностью функции $f(x)$, и будет, естественно, конечным количеством.

Если же, наоборот, придать Δx бесконечно малое значение, например, $\Delta x = i = \alpha h$, значение Δy будет $f(x + i) - f(x)$ или $f(x + \alpha h) - f(x)$, и будет, естественно, бесконечно малым. В этом легко убедиться на примере функций $A^x, \sin x, \cos x$, которым соответствуют разности

$$A^{x+i} - A^x = \left(A^i - 1\right)\cdot A^x, \qquad \sin(x+i) - \sin x = 2\sin\frac{i}{2}\cos\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

$\cos(x+i) - \cos x = -2\sin\frac{i}{2}\cos\left(x+\frac{i}{2}\right)$, каждая из которых имеет множитель $\left(A^i - 1\right)$ или $\sin\frac{i}{2}$, который вместе с *i* бесконечно приближается к пределу, равному нулю.

Таким образом, для функции $f(x)$, принимающей единственным образом конечные значения для всех *x*, содержащихся между двумя данными пределами, разность $f(x + i) - f(x)$ будет всегда между этими пределами бесконечно малой, т.е. $f(x)$ есть непрерывная функция в тех пределах, в которых она изменяется.

Ещё говорят, что в окрестности какого-либо частного значения переменной *x* функция $f(x)$ всегда является непрерывной функцией этой переменной, если она непрерывна между двумя, даже весьма близкими, пределами, содержащими эту данную точку» [210, с. 17].

В предположении, что любая непрерывная функция дифференцируема, Коши доказывает теорему о среднем значении:

«*Теорема*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна между двумя пределами $x = x_0, x = X$. Обозначим через *A* наибольшее значение её производной, *B* – наименьшее значение её производной между теми же пределами. Тогда разностное отношение $\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$ необходимо будет заключаться между *A* и *B*.

Обозначим буквами δ, ε бесконечно малые числа, из которых первое пусть будет такого рода, что для численных величин *i*, меньших чем δ, и для какой-нибудь величины *x*, заключённой между пределами x_0, x, отношение $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ будет всегда больше, чем $f'(x)-\varepsilon$ и меньше, чем $f'(x)+\varepsilon$ ».

Коши упоминает, что следует в этом доказательстве мемуару Ампера, который мы цитировали выше.

Подобно Амперу, Коши вставляет между x_0 и x новые значения[68] $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ так, чтобы разность $X - x_0$ была разложена на положительные части $x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., - x_{n-1}$, не превосходящие δ.

«Дроби $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \frac{f(X)-f(x_{n-1})}{X-x_{n-1}}$, находясь между пределами: первая: $f'(x_0)-\varepsilon, f'(x_0)+\varepsilon$, вторая: $f'(x_1)-\varepsilon, f'(x_1)+\varepsilon$, будут более $A-\varepsilon$, но менее чем $B+\varepsilon$. Так как дроби имеют знаменатели одного знака, то разделив сумму их числителей на сумму их знаменателей, получим среднюю дробь, то есть такую, значение которой лежит между меньшей и большей из дробей. Но так как $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$ является средней дробью, следовательно, оно заключается между пределами $A - \varepsilon$ и $B + \varepsilon$. И так как это справедливо при сколь угодно малом ε, то, следовательно, $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$ лежит между пределами A и B» [61, с. 36] и [210, с. 44].

Иными словами, $A < f'(x)-\varepsilon < \frac{f(x+i)-f(x)}{i} < f'(x)+\varepsilon < B$ для $i < \delta$.

Коши гениально упростил доказательство Ампера, введя более простые обозначения. У Ампера доказательство занимает половину из 33 страниц, у Коши – две страницы. Ампер вводит восемь вспомогательных величин и для каждой строит оценку отношения, вместо усреднения он доказывает громоздкие неравенства. У Коши доказательство изящно и лаконично.

Но Коши не анализирует зависимости ε и δ друг от друга и зависимости δ от очередной разности между соседними значениями переменной. Практически δ входит декларативно, вне всякой связи с остальным построением.

Американская исследовательница Джудит Грабинер считает [269], что Коши трансформировал доказательную технику алгебры неравенств в строгий инструмент оценки погрешности аппроксимации.

---

[68] Как и Ампер, Коши не использует никаких геометрических образов – ни точек, ни отрезков.

Голландский исследователь Т. Кётсиер полагает [351], что Коши пришёл к своей концепции непрерывности, анализируя своё доказательство теоремы о среднем, возможно, только в случае многочленов. Очевидно, что x_n у него – это переменные величины, отличающиеся от бесконечно малой на постоянную величину *a*. По определению непрерывности Коши, $f(x_n)$ должны отличаться от $f(a)$ на бесконечно малую величину. В отличие от точки зрения Грабинер, Кётсиер, анализируя доказательство Коши, не обнаруживает никаких следов ε – δ.

Анализируя предположение Грабинер о том, что Коши лишь оценивал погрешность приближения, П. Блащик (Польша), М. Кац (Израиль) и Д. Шерри (США) приходят к выводу: «Это были в большей степени затруднения инфинитезимального анализа, нежели затруднения эпсилонтики. После построения нижней и верхней оценок Коши заключает, что последние значения отличаются от первоначальных сколь угодно мало. Здесь слышатся слабые отзвуки ε – δ. Между тем Лейбниц использовал язык, близкий Коши: “Когда говорят, что какие-то бесконечные ряды имеют сумму, я понимаю это как то, что любые конечные ряды с тем же правилом имеют сумму, и что ошибка уменьшается с убыванием ряда, и становится произвольно малой”. Коши пользовался эпсилонтикой? – в таком случае за сто лет до него ею пользовался Лейбниц» [435, с. 18].

Как пишет А.В. Дорофеева о теореме о среднем у Коши, «это заключение верно только если можно подобрать одно и то же δ для всех *x*, а этот факт нуждается в доказательстве» [35, с. 48].

В 1985 году в Париже вышла книга Бруно Белоста[69] «Коши. 1789 – 1857» [171]. В 1997 году опубликован её перевод [7] на русский язык. Вот что пишет написано [там же, с. 90] по поводу доказательства Коши этой теоремы Лагранжа: «Вместо формулы $f(x+i)-f(x)=pi+qi^2+ri^3+\ldots$, которая позволяла Лакруа представить приращение разложимой в ряд функции и определить дифференциал, Коши доказал теорему о конечных приращениях: если функция *f* непрерывно дифференцируема между *x* и *x*+*i*, то существует действительное положительное число θ < 1, такое, что

$$f(x+i)-f(x)=i\cdot f'(x+\theta i).$$

Он вывел эту формулу, применяя теорему о промежуточных величинах, изложенную в «Алгебраическом анализе», из неравенства

[69] Правильной является именно такая транскрипция фамилии Belhoste, хотя, к сожалению, написание «Белхост» уже закрепилось в русскоязычной библиографии.

$$\inf_{x\in[x_0,X]} f'(x) \le \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} \le \sup_{x\in[x_0,X]} f'(x), \qquad (*)$$

которое верно для любой непрерывной функции (и, значит, дифференцируемой в смысле Коши) между x_0 и X».

Заметим, что теорема о промежуточных значениях в «Курсе анализа» 1821 года [209, с. 50] приведена так: *Теорема о непрерывной функции.* Если функция $f(x)$ – непрерывная функция переменной x между пределами $x = x_0$, $x = X$ и b расположено между $f(x_0)$ и $f(X)$, то уравнение $f(x) = b$ всегда имеет решение, расположенное между x_0 и X.

Белост сопровождает теоремы Коши рисунками, подобно тому, как мы, читая студентам лекцию, сопровождаем теорему Лагранжа графиком функции и изображаем хорду, стягивающую крайние точки. Но в курсе Коши нет ни одного рисунка, и нигде не говорится о геометрической интерпретации теорем[70]. Формулировка, приведённая Белостом, носит современный характер.

Далее Белост продолжает: «Доказательство, данное Коши в 1823 году только для функций непрерывно-дифференцируемых на $[x_0, X]$, прославило его новые методы и позволило увидеть различие, которое существует между простой и равномерной непрерывностью.

Но его доказательство неравенства (*) было основано на неверном вообще предположении: если функция f непрерывна (и, значит, дифференцируема в смысле Коши) между x_0 и X и если ε положительное число настолько малое, как мы того хотим, то существует, как утверждает Коши, положительное число δ такое[71], что для всех i, меньших δ и для всех x между x_0 и X

$$f'(x) - \varepsilon \le \frac{f(x+i)-f(x)}{i} \le f'(x) + \varepsilon.$$ [72]

В самом деле, это неравенство истинно только для всех x, расположенных между x_0 и X, если только f' равномерно непрерывна между двумя этими числами (или непрерывна в замкнутом ограниченном интервале $[x_0, X]$. Отсутствие чёткого разграничения между непрерывностью и равномерной непрерывностью, как показывает эта ошибка, было слабым

---

[70] Рисунков нет ни у Коши, ни у Лагранжа, ни у Ампера. Появляются они только у Лакруа, но не к этой теореме. Белост даёт современную геометрическую интерпретацию. Автор благодарит С.С. Демидова за следующее замечание: «*Престарелый Лакруа, конечно, работает в стиле 18-го века. Поэтому рассматривать его в контексте развития анализа как следующего за Лагранжем, Коши и Ампером не стоит. Просто он не усвоил манеры, введённой Лагранжем, которой следуют и Коши, и Ампер* (*но не Лакруа*)*: в тексте не должно быть чертежей – никакой ссылки на наглядность!*».

[71] Отметим, что у Белоста явно сказано, что по эпсилон выбирается дельта, тогда как у Коши такого указания нет.

[72] Заметим, что в русском переводе [7] потеряны штрихи в этой формуле и в цитированной выше формуле (*). Выражаю признательность Г.М. Полотовскому, обратившему внимание на это обстоятельство.

местом курса Коши. Как бы то ни было, теорема о конечных приращениях постоянно использовалась и показала себя как центральная теорема дифференциального исчисления» [7, с. 90-91].

Заметим, что и Ампер, и Коши имели в виду как раз замкнутый ограниченный интервал, хотя сторогое разграничение этих понятий появилось только в 1864 г. Все примеры к этой теореме были приведены для элементарных функций, которые равномерно непрерывны на замкнутом интервале. Повторим ещё раз слова Коши: «Ещё говорят, что в окрестности какого-либо частного значения переменной x функция $f(x)$ всегда является непрерывной функцией этой переменной, если она непрерывна между двумя, даже весьма близкими, пределами, содержащими эту данную точку» [210, с. 17]. Возможно, я увлекаюсь, но здесь предвосхищается равномерная непрерывность, пусть и не формализовано. Эту формализацию сделал Э. Гейне в 1872 году [333].

Никогда больше в своих работах, даже в поздних, Коши не пользовался языком «ε–δ». Как пишет А.П. Юшкевич, «определение непрерывности у Коши столь же далеко от «эпсилонтики», как и его определение предела» [151, с. 69]. Для того чтобы метод работал, ε и δ должны быть связаны между собой и со структурой интервала (области). Для этого в 1823 году ещё не было развито понимание континуума. Приведём ещё точку зрения Х. Патнема: «Если бы Вейерштрасс не обосновал метод эпсилон–дельта, пришлось бы актуализировать бесконечно малые, как это случилось с мнимыми числами. Мы постепенно расширяем систему вещественных чисел» [408].

Развитию эпсилонтики сопутствовало развитие понятия непрерывности. Рассмотрим вопрос о сходстве определения непрерывной функции у Больцано и Коши.

Больцано. В 1817 году в Праге вышла небольшая брошюра Бернарда Больцано «Чисто аналитическое доказательство теоремы, о том, что между двумя значениями, имеющими разные знаки, лежит по крайней мере один действительный корень уравнения» [180]. Он определяет непрерывную функцию так: «под выражением, что функция $f\ (x)$ изменяется по закону непрерывности для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, понимают лишь то, что если x есть какое-нибудь из этих значений, то разность $f(x + \omega) - f(x)$ может быть сделана меньше, чем любая данная величина, если можно принять ω столь малым, сколь угодно, или пусть будет $f(x + \omega) = f(x) + \Omega$» [там же, с. 427 – 428].

Мы можем отсюда заключить, что Больцано был знаком с работами Лагранжа и Лакруа.

Заметное сходство идей Коши и Больцано привело английского историка математики Айвора Граттан-Гиннесса к спорной мысли о заимствовании [273][73]. Он предполагает, что

[73] По поводу этой спорной статьи с разрешения С.С. Демидова привожу его мнение: *«О возможных* (*или невозможных*) *идейных связях Больцано и Коши, о которых идёт речь в путанной и очень субъективной статье А. Граттан-Гиннеса: Айвор, конечно, волен любить или не*

Коши мог прочитать работы Больцано, имевшиеся в Национальной библиотеке (тогда Bibliothèque Impériale) в Париже, что в «Курсе анализа» Коши 1821 года встречаются идеи и формулировки Больцано 1817 года. Сравнивая формулу 1797, 1806 и 1813 годов Лагранжа [360, с. 24]: $f(x+i)=f(x)=iP$, формулу Коши 1823 года [61, с. 10]: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, а также формулу конечных приращений, приведённую выше, мы видим, что Коши следовал своим учителям Лагранжу и Лакруа. В предисловии к «Курсу анализа» Коши благодарит Пуассона, Ампера и Кориолиса [209, с. VII], но не упоминает о Больцано. Теорема о непрерывной функции у Больцано звучит так: «Между двумя значениями функции, имеющей разные знаки, лежит хотя бы один корень уравнения»; у Коши: «Если между пределами $x=x_0, x=X$ дана функция непрерывной переменной $f(x)$, и b расположено между $f(x_0)$ и $f(X)$, то уравнение $f(x)=b$ всегда имеет решение для x, расположенного между x_0 и X» [там же, с. 50].

Граттан-Гиннесс соглашается с тем, что в бумагах Коши не сохранилось никаких письменных свидетельств о работах Больцано, в библиотеках нет пометок о том, что Коши читал Больцано. Но он приводит много параллельных формулировок теорем Больцано и Коши. Приводит он также богатый материал о сложном характере Коши и о его невысокой научной щепетильности: «Если Коши и был величайшим математиком своего времени, он был одним из самых неприятных людей своего времени: католический фанатик и бурбонист до абсурда, он всё время утверждал своё превосходство во всех направлениях своей работы [273, с. 393].

Требования к понятию непрерывности функции во второй половине XIX в. В истории науки есть немало примеров одновременного возникновения идеи у разных учёных. Можно не согласиться с Граттан-Гиннесом в том, что в основе этого лежало заимствование. Традиция предшествующей постановки проблемы могла быть настолько сильна, что обусловила одинаковый отзыв у математиков, работавших в разных странах. Так было с неевклидовой геометрией. Так было с понятием непрерывной функции, в чём Больцано и Коши шли от Лагранжа. Так было с понятием иррационального числа и непрерывности континуума, когда Мере, Гейне и Кантор одновременно предложили схожие концепции, которые основывались на критерии сходящейся последовательности Коши.

В 1868, 1869 и 1872 гг. выходят работы Шарля Мере, где он с помощью предела строит теорию иррациональных чисел. Наиболее полное изложение его теории в томе 1872 года [385], комментарии можно найти в работах Пьера Дюгака [36, 236].

любить любого из математиков существующих и уже умерших, но статья его крайне бездоказательная и реакция на неё специалистов (например, А.П. Юшкевича) была далеко не положительная. Крайняя нелюбовь, которую испытывает к Коши, основана на идеологии: Коши «был одним из самых неприятных людей своего времени: католический фанатик и бурбонист до абсурда»! Отсюда нелюбовь к нему Абеля, его студентов в Политехнической школе. Отчасти такое отношение переламывает Бруно Белост. В его книге Коши просто человек определённых убеждений, которые никогда не были популярны во Франции. Человек, который всегда плыл против течения. Делать отсюда крайние выводы («невысокая научная щепетильность» и т.п.) следом за Граттан-Гиннесом нужно очень аккуратно. Его «щепетильные» противники рассыпали набор его книг, содержавших выдающиеся научные результаты».

С 1854 года Карл Вейерштрасс начинает читать лекции в Берлинском Промышленном институте и Берлинском университете. Именно у него появляется такая символика, как $\lim_{n=\infty} p_n = \infty$ (опубликовано в 1856 году) [151, с. 76].

К сожалению, сам Вейерштрасс не публиковал и не редактировал своих лекций, в большинстве случаев они дошли до нас в записях его слушателей. Эдвард Гейне сокрушался по этому поводу: «Принципы г-на Вейерштрасса изложены непосредственно в его лекциях и косвенных устных сообщениях, в рукописных копиях его лекций, и имеют весьма широкое распространение, но они не опубликованы в авторской редакции под контролем автора, что мешает целостному восприятию» [333, с. 172]. Но основная концепция метода «ε–δ» формировалась в его берлинских лекциях. Как пишет А.П. Юшкевич, «Современное изложение дифференциального исчисления, с его ε, δ-техникой формулировок и доказательств, восходит, как известно, к лекциям Вейерштрасса в Берлинском университете, обработки которых были изданы его слушателями» [131, с. 192].

Наиболее ранний известный текст Вейерштрасса с использованием техники «ε–δ» – это конспект его лекции по дифференциальному исчислению, прочитанной в летнем семестре 1861 года в Берлинском королевском ремесленном институте. «Конспект был составлен учеником Вейерштрасса Г.А. Шварцем и хранится теперь в институте Миттаг-Леффлера в Швеции. Шварцу было тогда 18 лет и конспект он составил для себя лично, а не для печати» [Там же, с.192]. Записи Шварца были обнаружены и опубликованы П. Дюгаком [236]. В этих записях впервые появляется определение непрерывной функции на языке эпсилонтики: «Если $f\,(x)$ есть функция x и x – определённое значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f\,(x+h)$; разность $f\,(x+h) - f\,(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x в $x + h$. Если возможно определить для h такую границу δ, что для *всех* значений h, по абсолютному значению ещё меньших, чем δ, $f(x+h) - f(x)$ становится меньше, чем какая-либо сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции. Ибо говорят, что некоторая величина может стать бесконечно малой, если её абсолютное значение может стать меньше какой-либо произвольно взятой малой величины. Если некоторая функция такова, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствует бесконечно малые изменения функции, то говорят, что она – *непрерывная функция* аргумента, или что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом» [131, с. 182].

В 1872 году выходит статья Э. Гейне «Лекции по теории функций», где он даёт определение непрерывной функции по Вейерштрассу на языке эпсилон–дельта [333, с. 182].

В 1885 году вышел учебник О. Штольца «Лекции по общей арифметике согласно новой точке зрения», в котором Штольц излагает определение Коши по Вейерштрассу, на языке «ε–δ» [432, с. 156-157].

Легенда о том, что язык эпсилонтики создал Коши, появилась с лёгкой руки А. Лебега в его «Лекциях по интегрированию и отысканию примитивных функций» 1904 года: «Для Коши функция $f(x)$ непрерывна для значения x_0 , если, каково бы ни было положительное число ε, можно найти число $\eta(\varepsilon)$ такое, что неравенство $|h| \leq \eta(\varepsilon)$ влечёт за собой $|f(x_0+h)-f(x_0)| \leq \varepsilon$; функция $f(x)$ непрерывна в (a, b), если соответствие между ε и $\eta(\varepsilon)$ может быть выбрано независимо от x_0 для любого x_0 в (a, b)» [64б сю 13]. По этому поводу А.П. Юшкевич пишет: «В своём знаменитом труде по теории интегрирования А. Лебег почему-то приписывает Коши определение непрерывности функции в точке, сформулированное в терминах «эпсилонтики» начала XX века и характеризует это определение как классическое. Это один из многих примеров того, как модернизируют высказывания авторов прежних времён даже столь крупные математики, каким был А. Лебег» [151, с. 69].

К сожалению, большинство исторических ошибок происходит оттого, что авторы не обращаются к первоисточникам, а верят опосредованному вольному пересказу, как правило, использующему современный язык. Мы видели выше интерпретацию Белоста через супремум и инфимум, добавление им геометрического образа, интерпретации Лебега, Штольца и другие. В 1978 году вышел «Справочник математических терминов» Н.В. Александровой, в котором в статье «Предел» написано: «Определение предела через ε и δ дал Больцано (1817), а за ним Коши (1820)» [1, с. 13]. Как мы с вами убедились, это не так. Больцано в 1817 и Коши в 1821 году дали определения предела в качественной форме и определения непрерывной функции на языке приращений; Коши один раз применил ε и δ при улучшении доказательства Ампера, но Коши использовал ε и δ как конечные оценки погрешности, где δ не зависит от ε. Больцано нигде не использует эту технику. Согласно конспекту лекции Вейерштрасса 1861 года, именно Вейерштрасс был первым, кто использовал язык «ε–δ» как метод.

В 1821 году, когда Коши писал свой «Курс анализа», в Берлине родился Эдвард Гейне, который спустя 51 год сформулирует понятие равномерной непрерывности. Вейерштрассу в 1821 году было 6 лет, и прошло около 40 лет, прежде чем он использовал эпсилонтику на полную мощь. Потребность в языке эпсилонтики возникла лишь в середине XIX века с развитием новых теорий физики – теории потенциала, волновой теории света, кинетической теории тепла, электромагнитной теории – породили новые функции в виде тригонометрических рядов, непрерывные недифференцируемые, с неограниченным изменением, с бесконечным числом экстремумов. Для характеристик таких функций было недостаточно прежнего аппарата описания непрерывности, для характеристик точек разрыва и их количества также было недостаточно прежних понятий. Нужны были более детализированные характеристики непрерывности функции, в частности, равномерная непрерывность. Поэтому во второй половине 19 века произошла вторая реформа анализа, в основе которой были работы Вейерштрасса, и прежде всего язык эпсилонтики.

3.3. Особенности французской математической традиции. Коши о числе и непрерывности

Логика Пор-Рояля. Во Франции, в 6 лье от Парижа с XII века существовал женский монастырь Пор-Рояль. Близость столицы сказывалась в составе обитательниц монастыря – среди воспитанниц и монахинь были члены аристократических семей, а некоторая свобода нравов позволяла родственниками и знакомым навещать обитательниц и жить подолгу в доме для гостей. В XV веке здесь скрывался от правосудия Франсуа Вийон. При монастыре была школа, в которой преподавали известные учёные. Эту школу закончил Жан Расин, написавший историю Пор-Рояля (*Abrégé de l'histoire de Port-Royal).* К XVII веку при монастыре образовался кружок отшельников – постоянно проживающих дворян, военных, учёных – богословов, философов, филологов, математиков. Как приверженцы янсенизма, они состояли в оппозиции к иезуитам, имевшим большое влияние во Франции. Среди отшельников были Блез Паскаль, Антуан Арно, Пьер Николь, Клод Лансло. Бывал в Пор-Рояле и Рене Декарт. В школе при монастыре обучали по собственным учебникам, написанным членами кружка и отпечатанными в собственной типографии. В 1660 вышла «Грамматика Пор-Рояля» Арно и Лансло, в 1662 «Логика Пор-Рояля» Арно и Николя. Арно и Лансло впервые выделяют порождающую роль французского языка, общую для всех языков смысловую основу, разделяют объём понятий и структуру понятий, смысловую и логическую стороны утверждений. В качестве примеров рассматриваются представления о числе от Евклида до Стевина. Рассмотрены способы доказательств, приведены рассуждения о принципе предвосхищения основания. Постулируется неизменность понятия на протяжении всего рассуждения. «Логика Пор-Рояля» на два века стала методологической основой французских математиков. Ж.Адамар прямо высказывался о своей приверженности к логике Пор-Рояля. Н.Н.Лузин, анализируя противоречия математики конца XIX – начала XX века, указывал на влияние логики Пор-Рояля на Лебега, Бэра, Бореля и Пуанкаре.

Это было время, когда научная и учебная литература начала издаваться на французском языке, в школе Пор-Рояля занятия велись по-французски, и сам французский язык преподавался по новой, фонетической методике. Латынь, как единственно возможный язык науки, постепенно уступает свои позиции. Филологи Пор-Рояля – Клод Лансло и Антуан Арно в своей «Грамматике» обсуждают вопрос об общей логической основе всех языков, соответствующих структуре мысли, о степени точности передачи смысла при переводе с одного языка на другой. Авторы стремились выявить фундаментальные структуры человеческого сознания. В «Логике» эта проблема рассматривается применительно к понятиям в науке вообще и математике в частности. В текст включены критически переработанные рассуждения Декарта и Паскаля. Паскаль был в большей степени реалистом, нежели Декарт, он утверждал независимость науки от философии. В «Логике» искусство думать предполагало освобождение от вербальных форм, стремление к изначальному смыслу. Впервые различались определение идеи (definition nominis) и определение реальной вещи (definition rei). Этот метод должен был стать не только методом обоснования, но и методом открытия. Авторы упрекали математиков в недостаточной строгости, в использовании принципа предвосхищения основания (petitio principii). В разделе «Пятый недостаток – не думать о естественном порядке» Арно и Николь пишут: «Это самый большой недостаток геометров[74]. Они решили, что им не надо соблюдать никакого другого порядка, кроме того, чтобы первые положения служили для доказательства предыдущих. И таким образом, не заботясь о правилах истинного метода, состоящего в том, чтобы всегда начинать с самого простого и самого общего и затем переходить к более сложному и более частному, они вперемешку говорят о линиях и площадях, треугольниках и квадратах, доказывают через посредство фигур свойства простых линий и допускают множество других нарушений [естественного порядка], искажающих эту прекрасную науку. В «Началах» Евклида этот недостаток встречается повсюду»[75].

Утверждался принцип сохранности объёма и структуры понятия в процессе рассуждения. Например, если в рассуждении используется понятие «чётное число», что означает число, которое делится на 2, то в любой момент рассуждения мы тождественно можем вместо слов «чётное число» подставить слова «число, которое делится на 2».

Вновь к этим вопросам математики обратились в XIX веке, когда в математике возникла проблема строгости. Французские математики сохранили традицию логики Пор-Рояля. Дискуссия о строгости и определённости в математике хорошо изложена в книге М. Клайна [52].

К концу XVIII века Франция была сильным государством с ведущей научной ролью в математике. Но закрытие и последующая реформа Академии наук и образования изменило научное направление на более прагматическое и милитаризованное. Наука переместилась из

---

[74] Геометрами называли всех математиков.
[75] Арно А., Николь П. Логика, или искусство мыслить. М.: Наука. 417 с., с. 337–338.

университетов в военные школы, усилились требования к строгости и отчётливости преподавания, его ориентацию на практическую пользу.

Огюстен Коши преподавал математику в Политехнической школе инженерам, его задачей было кратко и системно изложить курс математического анализа. В отличие от математиков Франции, немецкие математики XIX века не были связаны необходимостью готовить гражданских и военных инженеров в масштабах большого государства (Германия воссоединилась только в 1871 году). Преподавание в немецких университетах было направлено на подготовку педагогов. Бытие немецких учёных было неспешно-провинциальным, их исследования носили более общий характер, нежели французские. Ярким примером тому является Георг Кантор. Его теория позволила математике приобрести свободу фундаментальной науки, освободила её от зависимости по отношению к прикладным наукам. Прежде все понятия математики имели непременную связь с геометрией, физикой, механикой. Теория Кантора дала возможность формировать новые понятия, обусловленные внутренней логикой математики, её языка. Изменился тип определений, они стали в большей степени описательными, что вызвало к жизни новый тип математической теории – дескриптивную теорию множеств. К концу XIX века, зародившись как результат исследования математиками Франции Бэром, Борелем, Лебегом, Адамаром, Пуанкаре и другими теории множеств Кантора и её противоречий, она была продолжена в работах математиков московской школы – Егорова, Лузина и их учеников.

Число и непрерывность у Коши. Теоремы о непрерывных функциях. Математический анализ как учебный курс начал складываться ещё у Лопиталя, но строгой систематической формы он достиг в курсе анализа Огюстена Коши.

В 1821 году Коши прочитал «Курс анализа» ([208], в русском переводе: [62]) в Политехнической школе, а в 1823 году «Лекции по инфинитезимальному исчислению» ([210], в русском переводе [61]), благодаря этим курсам сложилась структура математического анализа как научной и учебной дисциплины. Заметим, что читал Коши будущим инженерам, то есть курс его был ориентирован на практические приложения.

Коши начинал с понятия числа, переменной величины, функции, предела, непрерывной функции. Число в 1823 году [61, с. 1] он определял так: «Выражение *число* мы будем употреблять в том смысле, в каком оно принимается в арифметике, где мы производим его от абсолютного измерения величин. Название же *количество* будет присваиваемо только *вещественным положительным* или *отрицательным* количествами, т. е. также числам, но имеющим пред собою знак + или –. Кроме того, мы будем рассматривать количества, как средства для выражения увеличений или уменьшений» [там же, с. 2].

Предел определялся так: «Если последовательные значения одной и той же переменной неопределённо приближаются к некоторой постоянной величине, так что разность между ними и этой постоянной величиной может сделаться менее всякой данной величины, то постоянная величина называется *пределом* переменной. Так, например, иррациональное число есть предел различных дробей, которых значение более и более приближается к нему. Если последовательные численные значения переменной, неопределённо убывая, делаются наконец менее всякого данного числа, то переменная обращается в так называемую *бесконечно малую величину*. Переменная такого рода имеет пределом нуль» [там же, с. 3]. Понятие окрестности строго не формулировалось, Коши использовал термин «соседство» (voisinage). Заметим, что первое строгое определение окрестности дал Липшиц в 1864 г.

В первой главе о вещественных функциях определение функции вводилось так: «Если переменные величины таким образом связаны между собою, что, по данному значению одной из них можно определить значения остальных, то обыкновенно эти различные величины выражаются посредством одной из них, которая в таком случае принимает название *переменной независимой*; остальные же величины, выраженные посредством переменной независимой, называются функциями этой переменной» [там же, с. 18].

Иррациональное число Коши понимал как предел последовательности, удовлетворяющей критерию сходимости[76], но Коши не определяет действия над иррациональными числами и их упорядочение. Он лишь определил операцию умножения и деления иррационального числа на рациональное, а также возведения иррационального числа в степень.

Теоремы о непрерывных функциях выделяются в особый класс теорем в курсе анализа Коши. В 1797 году Лагранж доказал теорему о среднем значении, в 1806 году Ампер, пожалуй, впервые, назвал её именем Лагранжа. Теорема о корневом интервале ведёт свою историю от Мишеля Ролля, но значение её впервые оценивает Б. Больцано, есть она и в курсе Коши.

Коши. Теоремы о непрерывных функциях. «Между многими понятиями, тесно связанными со свойствами бесконечно малых, следует поместить понятия о непрерывности и прерывности функций; с этой целью сначала рассмотрим функции одной переменной. Пусть $f(x)$ функция переменной x; положим, что для каждого значения x, заключающегося между двумя данными пределами, функция эта допускает постоянное конечное и притом единственное значение. Если выбрав для x значение, содержащееся между этими пределами, дадим переменной x бесконечно малое приращение α, тогда и самая функция получит приращение, выражающееся разностью $f(x+\alpha)-f(x)$; эта разность зависит уже и от новой

[76] Этот критерий носит имя Коши, но был сформулирован Больцано в 1817 году.

переменной α и от значений x. При таком условии $f(x)$, между двумя означенными пределами для переменной x, будет непрерывной функцией этой переменной, когда при каждом значении x, заключающемся в этих пределах, численная величина разности $f(x+\alpha)-f(x)$ неопределённо убывает вместе с α. Скажем иначе: $f(x)$ тогда останется непрерывной относительно x между данными пределами, когда между этими же пределами бесконечно малое приращение переменной производит бесконечно малое приращение самой функции.

Говорят также, что $f(x)$, в сопредельности частного значения переменной x, будет непрерывной функцией этой переменной во всех тех случаях, когда она непрерывна между двумя даже весьма близкими пределами x, заключающими это частное значение.

Наконец, когда $f(x)$ перестаёт быть непрерывной в сопредельности частного значения переменной x, то говорят, что она делается *прерывною*, и что для этого частного значения происходит *разрыв непрерывности*. После этих объяснений легко узнать, между какими пределами данная функция переменной x непрерывна относительно этой переменной» [там же, с. 32].

Теорема 4. Если функция $f(x)$ непрерывна относительно переменной x между пределами $x=x_0$, $x=X$ и если означим через b количество, среднее между $f(x_0)$ и $f(X)$, то всегда можно удовлетворить уравнению $f(x)=b$ одним или несколькими вещественными значениями x, заключающимися между x_0 и X.

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости этого предложения достаточно доказать, что кривая, которой уравнение есть $y=f(x)$, встречает один или несколько раз прямую, которой уравнение есть $y=b$, в промежутке между ординатами, соответствующими абсциссам x_0 и X, что очевидно будет иметь место при допущенном условии. И действительно, так как $f(x)$ остаётся непрерывной между пределами $x=x_0, x=X$, кривая, определяемая уравнением $y=f(x)$, проходя 1^0 через точку, имеющую координатами $x_0, f(x_0)$ и 2^0 через другую точку, которой координаты X, $f(X)$, должна быть непрерывною между этими точками.

Но постоянная ордината b прямой, выражаемой уравнением $y=b$, находится между ординатами $f(x_0), f(X)$ двух рассматриваемых точек; поэтому прямая необходимо пройдёт между этими точками и следовательно непременно встретит означенную кривую.

Впрочем, можно доказать означенную 4-ю теорему как это сделано в IV прибавлении, прямым аналитическим путём и с тою даже выгодою, что этот путь доставляет также численное решение уравнения $f(x)=b$» [там же, с. 41].

Коши формулирует теорему о корневом интервале: «Если непрерывная функция имеет разные знаки между двумя пределами, то между этими пределами найдётся точка, в которой функция равна нулю» [208, с. 378].

Глава IV. Определение непрерывных функций одной переменной, удовлетворяющих известным условиям.

§1. *Определение непрерывной функции, составленной таким образом, что две подобные функции переменных количеств, будучи сложены или перемножены между собою, дают в сумме или в произведении подобную же функцию суммы или произведения тех же переменных.*<…> [61, с. 98].

Прибавление III. О численном решении уравнений.

1 *Теорема. Пусть* $f(x)$ *будет вещественная функция переменной x, непрерывная между пределами* $x=x_0, x=X$ *. Если* $f(x_0)$ *и* $f(X)$ *имеют противные знаки, то уравнение* (1.) $f(x)=0$ *может быть удовлетворено одним или несколькими вещественными значениями x, взятыми между* x_0 *и X.*

Доказательство. Пусть x_0 будет меньшее из двух количеств x_0 и *X*, положим $X-x_0=h$ и означим через *m* какое-нибудь целое число, большее единицы. Так как из двух количеств, $f(x_0)$ и $f(X)$, одно положительное, а другое отрицательное, то образуя ряд $f(x_0),\ f\left(x_0+\dfrac{h}{m}\right), f\left(x_0+2\dfrac{h}{m}\right),..., f\left(x_0-\dfrac{h}{m}\right), f(X)$ и сравнивая в нём первый член со вторым, второй с третьим, третий с четвёртым и т. д., необходимо найдём наконец одну или несколько пар последовательных членов с противными знаками. Пусть $f(x_1)$ и $f(X')$ два таких члена, где при том x_1 меньшая из обеих соответствующих величин *x*. Очевидно, что $x_0<x_1<X'<X$ и $X'-x_1=\dfrac{h}{m}=\dfrac{1}{m}(X-x_0)$. Определив x_1 и X' , можно подобным образом между этими двумя новыми значениями x вставить два таких других, x_2 и X'', которые, будучи подставлены в $f(x)$, дадут результаты с разными знаками и будут удовлетворять условиям $x_1<x_2<X''<X'$, $X''-x_2=\dfrac{1}{m}(X'-x_1)=\dfrac{1}{m^2}(X-x_0)$. Продолжая таким образом, получим во-первых, ряд возрастающих значений *x*, именно $x_0, x_1, x_2,...$ (2.) и т. д., во-вторых ряд убывающих величин (3.) $X, X', X'',...$ и т. д., которые, превосходя первые количества равными произведениям $1\times(X-x_0), \dfrac{1}{m}\times(X-x_0), \dfrac{1}{m^2}\times(X-x_0),$ и т. д., будут наконец произвольно мало отличаться от них. Отсюда должно заключить, что общие члены рядов (2.) и (3.) будут стремиться к одному

общему пределу. Пусть a будет этот предел. Так как $f(x)$ остаётся непрерывною в пределах $x=x_0, x=X$, то общие члены рядов: $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ и т. д., $f(X), f(X'), f(X''),\ldots$ и т. д. будут равным образом стремиться к общему пределу $f(a)$; и так как, приближаясь к этому пределу, они всегда останутся с противоположными знаками, то ясно, что количество $f(a)$, необходимо конечное, не будет отличаться от нуля. Следовательно, мы можем удовлетворить уравнению (1.) $f(x)=0$, дав переменной x частное значение a, заключающееся между x_0 и X. Другими словами, (4.) $x=a$ будет корень уравнения (1.). <Примечание – о погрешности, о нескольких корнях, о единственности корня в случае монотонности>.

Следствие 1. Если уравнение (1.) не имеет вещественных корней, в пределах x_0 и X, то оба количества $f(x_0)$ и $f(X)$ будут одного знака» [там же, с. 437].

Обратим внимание на значительное сходство доказательства Коши с методом дихотомии Больцано. Заметим также, что предел Коши понимает как ограничитель, то есть крайнюю точку отрезка, на котором рассматривает функцию.

Других теорем о непрерывных функций у Коши нет. В Курсе 1821 года Коши, введя понятие переменной, функции одной и нескольких переменных, предела и непрерывности, далее Коши сразу переходит к рядам. Курс 1823 года уже содержит дифференциальное исчисление, в том числе и впервые теорему Коши о среднем значении [210, с. 105].

3.4. Изменение типа математических определений в XIX в.

Математики вновь обратились к феномену определения в XIX веке, когда в математике возникла проблема строгости. Французские математики сохранили традицию логики Пор-Рояля. Дискуссия о строгости и определённости в математике хорошо изложена в книге М. Клайна [52].

Строгость в математическом анализе ввёл О. Коши (Cauchy, 1879–1857), и он же впервые начал доказывать существование математических объектов, например частного решения дифференциального уравнения, без их построения. Коши ввёл равноправность постоянных и переменных величин в мат. анализе. Он стремился придать определениям всю строгость, требуемую в геометрии, не прибегая к доводам, исходящим из общности алгебры.

Понятие функции, которого придерживались в XVIII веке, представленное Эйлером, и заключающееся в том, что функция должна быть определена одной формулой, в XIX веке сменилось определением Лобачевского–Дирихле о взаимно-однозначном соответствии, что предполагало как необходимое и достаточное совокупность свойств функции, из которых уже можно было вывести её аналитический вид.

К середине XIX века уже возникают новые идеи о необходимости анализа множеств точек, но слов для их выражения ещё нет. Так, например, В.Л. Гончаров в статье «О научных работах Римана» замечает, что у Римана «как-то подразумевается, что «отдельные точки» и «отдельные кривые» могут наличествовать не иначе, как в конечном смысле; и точно так же предполагается само собой понятным, что две «отдельные кривые» могут пересекаться не иначе, как в конечном числе точек… Риман разъясняет, что «более далеко идущие ограничения сделаны для того, чтобы избежать пространного рассмотрения подробностей, не являющихся существенно необходимыми». Риман с виртуозной ловкостью избегает говорить о точечных множествах» [26, с. 27-28].

Создаётся новый характер преподавания, удельный вес математического обоснования переносится на лекции. Они в большей степени обращены не к интуитивным аналогиям физическим и геометрическим образам, а к логическому восприятию. В математическом анализе середины XIX века это приводит к арифметизации анализа.

Математика середины XIX века остро нуждалась в теории действительного числа. Открытие рядов Фурье, расширение класса разрывных или недифференцируемых функций порождало потребность оценить множество точек разрыва и возможность пренебрежения такими множествами.

Попытку создания теории действительного числа в 1830-е годы предпринял Бернард Больцано (1781–1848). Его теория содержала понятие сечения через понятие точной верхней границы, но содержала также и актуально бесконечно большие и бесконечно малые числа, а его концепция точной верхней границы не была построена полностью – Больцано лишь показывает, что наличие такой границы не приводит к противоречию.

Коши в Курсе анализа 1821 года определял иррациональное число как предел сходящейся последовательности, но не ввёл для иррациональных чисел ни отношения порядка, ни правил действия над ними.

В 1869 году французский математик Шарль Мере (Meray, 1835–1911) публикует свою теорию действительного числа, полностью изложив её в курсе анализа в 1872 году. Его построение основывалось на концепции числовых последовательностей (вариант), удовлетворяющих критерию Коши (Хотя Коши опубликовал этот критерий в 1821 году, первым сформулировал его Больцано в 1817 году), между числовыми последовательностями вводилось отношение эквивалентности, и каждое иррациональное число являлось пределом такой последовательности. В тех случаях, когда последовательность сходится к точке, не допускающей точное определение, Мере назвал предел последовательности фиктивным. Мере определяет отношение порядка и арифметические операции над такими пределами как операции над соответствующими последовательностями. Но Мере не доказывает справедливость этих свойств, а лишь демонстрирует её на примере. Этим он ограничивается, и не строит иерархию последовательностей. «Мы будем определять все неизмеримые числа, приближая их значения с помощью некоторого δ, каким бы малым его не вообразить» [385, с. 2].

Непрерывную функцию он определяет по Коши, утверждая, что эти неравенства настолько естественны, что не нуждаются в обосновании, их справедливость проверена многократно. Все непрерывные функции, по его мнению, разложимы в ряд по целым степеням, а другие виды функций и нестепенных рядов рассматривать не нужно.

Язык Мере нелёгок для слушателей, он вводит много собственных терминов для понятий, которые действительно необходимы, но определяет их лишь для узкого класса объектов. Например, он вводит понятие олотропной (Olo tropos, ολο τροπος – весь путь) функции, которое подобно нашему определению предела равномерно сходящегося ряда так (курсив Мере):

«Пусть $f(x, y, \ldots)$– сумма целых рядов, R_x, R_y,... – их области (круги) сходимости, $R_x°, R_y°, \ldots$ – соответственно меньшие положительные величины. Пусть $x', y', \ldots, x, y, \ldots$ – произвольные варианты в этих кругах, центры которых в точках $O_x, O_y, \ldots$ как центры областей $R_x°, R_y°, \ldots$, так что все разности $x'-x, y'-y, \ldots$будут бесконечно малыми, и разность $f(x', y', \ldots) - f(x, y, \ldots)$ так же стремится к нулю.

Рассмотрим сумму N первых элементов целого (по целым степеням) ряда. Заменив варианты на сходящиеся варианты, которые сходятся внутри меньшего внутреннего круга сходимости, получим сходимость вариант и их эквивалентность друг другу, при N – индексе замещённых вариант от переменных, неограниченно сходящимся к каким-либо значениям.

Именно это и будет как раз тем, что обеспечит целочисленному ряду свойство определять значение функции, даже неизмеримое, от независимых переменных. Мы полагаем излишней другую точку зрения в этой теории.

Если $x', y', \ldots$ *соответственно стремятся к данным пределам x, y, ..., расположенным во внутренней части круга сходимости, то* $f(x', y', \ldots)$ *стремится к* $f(x, y, \ldots)$.

Будем говорить, что функция $f(x, y, \ldots)$ олотропна (olotrope) на порциях $S_x, S_y, \ldots$ вспомогательной плоскости, определённой геометрически независимыми переменными, когда для всех значений переменных x, y, …, ограниченных этими областями, $f(x+h, y+k, \ldots)$

представляет собой ряд по целым степеням, а $h, k, \ldots$ таковы, что они остаются внутри области сходимости, отличаясь на величины, не превосходящие $\delta_x, \delta_y, \ldots$, все не равные нулю.

Назовём $\delta_x, \delta_y, \ldots$ *областями олотропии* или *олометрами* функции те участки, на которых выполняются названные условия.

Сразу же из этого определения следует, что $f(x, y, \ldots)$ представляется в форме ряда по целым степеням от $x - x_0, y - y_0, \ldots$, где $x_0, y_0, \ldots$ обозначают некоторые числовые значения переменных внутри области, такие, что для соседних точек $x, y, \ldots$, для которых модули их разностей остаются внутри олометров. Таким образом, получается, что вместо $x - x_0, y - y_0, \ldots$ можно писать $h, k, \ldots$ $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$.

Сумма целочисленного ряда есть олотропная функция от переменных внутри круга с тем же центром, что и круг сходимости, но меньшего размера[77]» [385, с. 38].

Сложность изложения, консерватизм, диктуемый нежеланием выходить за пределы классического анализа начала XIX века, желание ограничить анализ только целыми функциями, неоправданно громоздкие термины и часто неудачные определения новых понятий (приведённое в качестве примера выше определение непредикативно), а также и обособленность личности Мере привели к тому, что его теория не нашла признания среди соотечественников. Лишь столетие спустя концепцию числа во Франции стали называть «концепцией Мере–Кантора».

К середине XIX века влияние традиции Коши во Франции и Гаусса в Германии уже уменьшилось. В Берлинском университете с 1856 года начал преподавать Вейерштрасс. Его лекции (которые он запрещал издавать, упрекая французских математиков в обратном – «по их конспектам даже ассистент сможет читать лекции вместо профессора»), но которые в конце XIX века всё-таки вышли в печати благодаря записям его студентов [236], поражают слабо формализованной логикой текста, точностью математической мысли и богатством затекстового образа. На каждом шагу Вейерштрасс пользуется непредикативными определениями, например, «под переменной величиной понимаем величину, которая определяется посредством бесконечно многих величин, которые соответствуют данному определению» [450, с. 56]. Заметим, что в немецком языке не было такого влияния латинской традиции, язык обладает синонимической гибкостью в таких базовых математических терминах, как число, числовая величина, точка, положение, граница, предел – со мной согласятся переводчики. Немецкий язык более концептуален, чем французский, его обогатила философская традиция Канта, Гегеля и Шопенгауэра.

[77] Перевод Г.И. Синкевич.

Вейерштрасс показывал математику как поле нерешённых проблем. Он создал плеяду сильных учеников, среди которых были Кантор, Шварц, Миттаг-Леффлёр, Ковалевская и многие другие.

Вейерштрасс арифметизировал анализ, устранив во многом обращение к геометрии. Именно он ввёл определения на языке ε-δ (эпсилон–дельта), что использовал с 1821 года Коши, не выявляя зависимости между ε и δ. Собственная концепция числа как агрегата, основанная на равномерной сходимости абсолютно сходящихся рядов, была и у Вейерштрасса.

Одновременно с появлением работ Мере (1869, 1872 годы) в Германии в 1872 году вышли три работы по концепции действительного числа. Это были работы Р. Дедекинда, Э. Гейне и Г. Кантора.

Э. Гейне (1821–1881) определял иррациональные числа как классы эквивалентных последовательностей: «Как из рациональных чисел A первого порядка формируются иррациональные числа, так вновь из пределов иррациональных чисел можно получить числа второго порядка A', из них можно извлечь иррациональные числа третьего порядка A'', и т.д. Иррациональные числа $m+1$-го порядка будем обозначать $A^{(m)}$».

«Развитие теории функций происходит в основном за счёт элементарных фундаментальных теорем, хотя некоторые результаты проницательные исследователи ставят под сомнение, ибо результаты исследований не всегда обоснованы. Я объясняю это тем, что хотя принципы г-на Вейерштрасса изложены непосредственно в его лекциях и косвенных устных сообщениях, в рукописных копиях его лекций, и имеют весьма широкое распространение, но они не опубликованы в авторской редакции под контролем автора, что мешает целостному восприятию. Его утверждения основываются на неполном определении иррациональных чисел, в котором геометрическая интерпретация, а именно понимание линии как движения, часто приводит к заблуждению. Теоремы должны быть обоснованы с помощью нового понимания действительных иррациональных чисел, которые законно обоснованы и существуют, как бы мало они не отличались от рациональных чисел, и функция однозначно определена для каждого значения переменного, независимо от того, рационально оно или иррационально» [333], на русском языке – [23].

Г. Кантор (1845–1918), тесно общаясь с Гейне в университете Галле, также использовал в определении числа фундаментальные последовательности ([203], на русском языке в переводе Ф.А. Медведева [49]), идея которых, как признаёт сам Гейне, принадлежит Кантору. Для них определяется отношение порядка и арифметические операции. Но Кантор вводит также понятие предельной точки и идёт дальше Гейне в построении иерархии множеств и проявления соответствия между множествами. В последующие пять лет Кантор создаёт свою теорию точечных множеств и переходит к построению шкалы бесконечностей.

Р. Дедекинд (1831–1916) в работе «Непрерывность и иррациональные числа» ([222], на русском языке [27]) рассматривает свойства равенства, упорядоченности, плотности множества рациональных чисел *R*, (числового корпуса, термин, который ввёл Дедекинд в дополнениях к изданным им лекциям Дирихле). При этом он старается избегать геометрических представлений. Определив отношение «больше» и «меньше», Дедекинд утверждает его транзитивность; существование между двумя различными числами бесконечного множества других чисел; а также для любого числа разбиение множества рациональных чисел на два бесконечных класса, таких, что числа одного из них меньше данного, и другого, числа которого больше данного числа; причём само число, производящее это разбиение, может быть отнесено как к одному, так и к другому классу, и тогда оно будет либо наибольшим для первого, либо наименьшим для второго класса: «Если система всех действительных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то существует одно и только одно число, производящее это разложение» (там же).

Определение числа, данное Дедекиндом, более тяготеет к алгебре. Оно категориально безупречно, но оно подходит только для линейно упорядоченных множеств, и неудобно функционально, в чём упрекал его Кантор. Но заслуга Дедекинда состояла в том, что он утверждал понятие числа как существующее лишь «в мире наших мыслей», и свободу математика определить число так, как это нужно для его ближайших задач.

Определения до Кантора были преимущественно конструктивными (как построить объект) или функциональными (для чего служит). Вспомним определение функции по Эйлеру и сравним его с определением Лобачевского–Дирихле. В гуманитарных науках использовались другие типы определений – отрицательные и дескриптивные (описательные). Благодаря им можно было начать рассмотрение объекта, зная о нём немного, может быть, только один признак. Далее в процессе исследования наращивать объём информации; можно было отделить объект от других с помощью отрицания. Использовались родовидовые определения. Кантор перенёс эти принципы описания на математические объекты.

Георг Кантор в своей теории множеств создал новый тип определения. Математика на основе теории множеств приобрела характер фундаментальной науки, понятия которой не зависели от геометрического или физического смысла.

Кантор пишет: «Процесс правильного образования понятий, по-моему, повсюду один и тот же: берут некоторую лишённую свойств вещь, которая первоначально есть ни что иное как имя или знак *A*, и придают ей закономерным образом различные, даже бесконечно многие понятные предикаты, значение которых известно уже из наличных идей и которые не должны противоречить друг другу. Благодаря этому определяются отношения *A* к уже имеющимся понятиям и особенно к родственным. Как только это закончено, так имеются налицо все условия для пробуждения дремлющего в нас понятия *A*, и оно появляется на свет, снабжённое такой интрасубъективной реальностью, какой вообще можно требовать от понятий. Констатировать его транзиентное значение является тогда делом метафизики» [50, с. 103-104].

Кантор относил прикладные математические дисциплины к метафизике, отводя собственно математике роль фундаментальной науки, которую она обрела благодаря теории множеств. В зарождении понятия числа первичным для него было не порядковое число, а установление взаимно-однозначного соответствия между множествами.

Понятие действительного числа было сформулировано в XIX веке несколькими математиками. Кантор анализирует определения, данные Вейерштрассом, Дедекиндом и им самим: «Определению какого-либо иррационального действительного числа всегда соответствует строго определённое множество 1-й мощности рациональных чисел. В этом заключается общая черта всех форм определений. Различие же состоит в моменте порождения, при помощи которого множество соединяется с определяемым им числом, и в тех условиях, которым должно удовлетворять множество, чтобы оно оказалось подходящей основой для соответствующего определения числа. При первой форме [Вейерштрасса] момент порождения, связывающий множество с определяемым им числом, заключается в образовании сумм. Дедекинд использует совокупность всех рациональных чисел. Но она сопровождается тем крупным недостатком, что числа в анализе <u>никогда</u> не представляются в форме «сечений», в которую их приходится лишь вписывать весьма искусственным и сложным образом» [там же, с. 81].

Кантор, вводя определения новых понятий, впервые использует иной способ их образования: «В излагаемой здесь теории <u>числовая величина</u> первоначально появляется вообще как нечто <u>беспредметное</u>, лишь как составная часть теорем, придающих ей реальность, например, теоремы, что соответствующая последовательность имеет пределом эту числовую величину… Понятие числа, как оно развито здесь, несёт в себе зародыш необходимого и абсолютного обобщения» [там же, с.12]. В процессе рассуждения это понятие обрастает признаками, наполняется содержанием, сохраняя за собой возможность дальнейшего развития. Введя определение, например, перечислимых множеств, Кантор после ряда рассуждений, вновь вводит более точное определение (там же, с. 68). В отличие от логики Пор-Рояля, объём и структура понятия в начале и в конце рассуждения различны. Этот принцип, пришедший их гуманитарных наук, пришёл в математику впервые в работах Кантора. Впоследствии он лёг в основу дескриптивной теории множеств.

Благодаря высокой общности определений теории множеств появилась возможность ввести в рассмотрение широкий класс функций и геометрических форм. Их описание было бы невозможным на базе математического анализа Коши и Вейерштрасса.

Первый период развития теории множеств получил название «наивной» теории. Понятия стали формироваться вербально, из известных выражений формировались новые за счёт операций со словами (терминами) по правилам грамматики. В то же время логическая структура языка не совпадает с его логической структурой, что породило парадоксы теории. Рассел анализировал этот процесс в своей теории дескрипций, различая два типа отношений знаков к обозначаемому объекту – имена и описания.

После того как Кантор создал теорию множеств, изменился язык и внутренняя структура математики. Она перестала нуждаться в геометрической или физической интерпретации, и приобрела значительную дескриптивную составляющую. Созидающим инструментом становится язык, описательные формы. Теория множеств создавалась как продолжение арифметики, но уже десятилетие спустя стала основой, базой теории числа. Появилась возможность анализировать тончайшие нюансы конструкций математических объектов и связей между ними. Многие определения и утверждения формировались вербально, сохраняя высокую степень абстракции. Это привело к дискуссиям среди математиков, многие из которых носили лингвистический характер.

Кантор начинает построение своей теории с определения количества, и на его основании вводит понятие мощности. В 1883 в «Основах общего учения о многообразиях» Кантор пишет: « .. хотел бы вкратце и построже сказать о трёх известных мне и в существенном однородных главных формах строго арифметического изложения учения об общих действительных числах. Это прежде всего способ введения, которым в течение ряда лет пользовался в своих лекциях об аналитических функциях проф. Вейерштрасс. Во-вторых, г-н Дедекинд в своём сочинении «Stetigkeit und irrational Zahlen» (Braunschweig 1872) опубликовал своеобразную форму определения. В третьих, в 1871 г. я предложил (Math. Ann. 1872 Bd. 5. S.123) форму определения, внешне имеющую известное сходство с Вейерштрассовской, так что г-н Вебер смешал её с последней. Эта форма … является самой простой и естественной из всех и имеет ещё то преимущество, что она самым непосредственным образом приспособлена для аналитических вычислений. .. Определению какого-либо иррационального действительного числа всегда соответствует строго определённое множество первой мощности рациональных чисел. В этом заключается общая черта всех форм определений. Различие же их состоит в моменте порождения, при помощи которого множество соединяется с определяемым им числом, и в тех условиях, которым должно удовлетворять множество, чтобы оно оказалось подходящей основой для соответствующего определения числа» [50, с. 81-82]. И далее

«Процесс правильного образования понятий, по-моему, повсюду один и тот же: берут некоторую лишённую свойств вещь, которая первоначально есть не что иное как имя или знак *A*, и придают ей закономерным образом различные, даже бесконечно многие понятные предикаты, значение которых известно уже из наличных идей и которые не должны противоречить друг другу. Благодаря этому определяется отношение *A* к уже имеющимся понятиям и особенно к родственным. Как только это закончено, так имеются налицо все условия для пробуждения дремлющего в нас понятия *A*, и оно появляется на свет, снабжённое такой интрасубъективной реальностью, какой вообще можно требовать от понятий. Констатировать его транзиентное значение является тогда делом метафизики» [там же, с.103–104].

Как пример определения Кантора: «Под множеством мы понимаем соединённое в некоторое целое *M* определённых хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества *M*. «Мощностью» или «кардинальным числом» множества M мы называем то общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из *M*, когда мы абстрагируемся от качества его различных элементов *m* и от порядка их задания» [там же, с.173].

После возникновения теории множеств в математике повысилась роль индуктивных определений невербального характера, т.е. предполагающих выполнение абстрактных математических операций, уже не связанных с приложениями в физике, механике, геометрии. Наряду с этим, появляются и непредикативные определения. Видимо, впервые на них обратил внимание А.Пуанкаре. По его словам, это определения, основанные на принципе порочного круга, petitio principii, или предвосхищения основания.

Пуанкаре говорил об определении числа в 1905 году: «Невозможно дать определение, не употребив грамматического предложения, и трудно произнести предложение, не вставив в него название числа, или, по крайней мере, слово «несколько», или не употребив слова во множественном числе. А тогда становишься на скользкий путь и ежеминутно рискуешь впасть в *petitio principii*» [98, с. 1-52].

Пуанкаре считал, что такое определение «не определяет ничего», «Вера в существование актуальной бесконечности дала начало этим непредикативным определениям. Объяснюсь: в этих определениях фигурирует слово «все»,…, слово «все» имеет вполне ясный смысл, когда деле идёт о конечном числе предметов; для того, чтобы оно имело смысл, когда их бесконечное число, должна была бы существовать актуальная бесконечность. В противном случае нельзя представить себе все эти предметы данными раньше их определения, и тогда раз определение какого-нибудь понятия *N* зависит от всех предметов *A*, то оно может оказаться заключающим в себе порочный круг, если среди предметов *A* есть такие, которые нельзя определить, не прибегая к самому понятию *N*» [там же, с. 116-148].

В 1908 году А.Пуанкаре потребовал, чтобы все определения в математике были строго предикативными, т.е., не содержали ссылок не только на определяемое понятие, но и на множество, его содержащее. По его мнению, существование в математике означает отсутствие противоречия, и все теории являются соглашениями учёных о терминах и методах, а единственное требование к ним – непротиворечивость.

«Что разумеют под хорошим определением? Для философа или для ученого это есть определение, которое приложимо ко всем определяемым предметам и только к ним; такое определение удовлетворяет правилам логики. Но при преподавании дело обстоит иначе. Здесь хорошим определением будет то, которое понято учениками.

Необходимо, чтобы оправдание во всех случаях, когда это возможно, предшествовало формулировке и подготовляло ее; изучение нескольких частных примеров лучше всего приводит к общей формулировке.

Еще другое обстоятельство: каждая часть формулированного определения имеет целью установить отличие определяемого объекта от класса других близких предметов. Определение будет понято лишь тогда, когда вы покажете не только определяемый предмет, но и те соседние предметы, от которых его надобно отличать; когда вы сделаете явственным это отличие и при этом прибавите: «вот для чего я внес в определение то-то и то-то» [99].

Впоследствии Лузин отмечал: «На затруднении иметь аксиоматику целых чисел без petitio principii весьма настаивал в своё время А.Пуанкаре, который выражал сомнения относительно возможности без petitio principii определить число 2, когда число аксиом арифметики заведомо больше двух. По этому поводу памятен вопрос А. Пуанкаре, обращённый к математику, пытавшемуся символически обосновать ему арифметику: «Как я могу сомневаться в существовании числа, раз вы мне тут написали Ω?» – т.е. Пуанкаре требует запретить включение элемента во множество, определённое посредством своих элементов» [72, т. 2, с. 517].

Но успешность определения нового частного понятия на основании обобщения интуитивной информации о более общих классах таких частных понятий оказалась плодотворной. Здесь проявляется порождающая роль словесных определений, когда понятие в своём развитии обогащается новыми признаками.

Это открыло простор развитию дескриптивной теории множеств, теории функций и теории меры. Это же в силу индивидуальности представлений каждого математика при абстрагировании, породило разногласия по поводу строгости и использования принципа предвосхищения основания.

Бэр в 1895 г. писал: «В определении понятия функции не интересуются вопросом о том, чтобы найти, какими средствами может быть эффективно установлено это соответствие; расширенное таким образом, полностью содержится в понятии определение; эта точка зрения противоречит взгляду, состоящему в том, чтобы отправляться от некоторых простых функций, сохраняя слово «функция» за полученными таким путем выражениями» [167]. Лебег в 1905 г.: «Общее определение функции столь смутно, что его не только недостаточно, чтобы передать идею функции тому, кто не имеет ее, но оно не дает точного ответа на такой вопрос: как можно назвать функцию?» [364].

Борель признавал законными функции, определяющие соответствия которых задаются счетным количеством условий; Бэр относит к таковым функции, получаемые из некоторых простых функций (например, непрерывных или многочленов); Лебег – функции, которые можно «назвать», то есть для которых можно логически определить некоторое характеристическое свойство, индивидуализирующее функцию. Уточнения Бореля шли в направлении, получившем название конструктивизма. Лебег создает дескриптивный подход так: «Объект является определенным или заданным, когда мы произносим конечное число слов, применяющихся к этому объекту и только к нему, т.е. когда мы называем характеристическое свойство объекта. Чтобы задать функцию $f(x_1, x_2, ...)$, мы вообще называем свойство, относящееся ко всем множествам чисел $x_1, x_2, ..., f(x_1, x_2, ...)$ и только к ним, Но это совсем не необходимо: можно назвать другое характеристическое свойство этой функции» [365].

В 1904 г. немецкий математик Э. Цермело опубликовал свою знаменитую работу «Доказательство предложения, что каждое множество можно сделать вполне упорядоченным» [459]. Его доказательство основано на сформулированной в этой же работе аксиоме выбора: «Для бесконечной совокупности множеств всегда существует отображение, в котором каждому множеству соответствует один из его элементов».

Объекты и теоретические разделы математики, построенные без помощи этой аксиомы, получили название эффективных, а с привлечением аксиомы выбора – неэффективных. Только в 1938 г. Гёделем была установлена непротиворечивость, а в 1963 г. П. Коэном независимость этой аксиомы в аксиоматике теории множеств.

Дискуссия об эффективности, полноте и непротиворечивости таких методов была начата в пяти письмах о теории множеств Адамара, Бореля, Бэра и Лебега в 1905 г. [168]. Адамар считал возможным неограниченное употребление принципа выбора в бесконечных теоретико-множественных построениях. Борель, Бэр и Лебег полагали необходимым пересмотреть основные принципы работы с бесконечными множествами. Были открыты функции и множества чрезвычайно сложной природы и трудно представимого строения, например, неизмеримые или не имеющие свойства Бэра. С другой стороны, были выделены классы *B*-функций и *B*-множеств, строение которых в значительной степени удалось изучить и которые играют важную роль в теории функций и математическом анализе. Инициаторами этого направления в математике – дескриптивной теории множеств – явились Борель, Бэр и Лебег. В результате их работ возникли два вопроса теории множеств: детальное изучение строения B-множеств и изучение их мощности, и построение новых классов множеств, не являющихся B-множествами, без привлечения аксиомы выбора Цермело. Продолжение этого спора создало 4 направления в математике: логицизм, гильбертов формализм, интуиционизм (Броуэр, Вейль) и конструктивизм (Борель).

Дескриптивная теория множеств сформировалась в работах Бэра, Бореля и Лебега в связи с проблемой измеримости множеств и была направлена на изучение внутреннего строения множеств в зависимости от тех операций, при помощи которых эти множества могли быть построены из более простых, например, замкнутых или открытых подмножеств евклидова, метрического или топологического пространства. К этим операциям относятся объединение, пересечение, взятие дополнения и пр.

Адамар и многие его коллеги считали законным неограниченное употребление принципа выбора. Борель, Бэр, Лебег и их единомышленники считали, что необходим пересмотр основных теоретико-множественных понятий и принципов. Они утверждали, что неограниченное употребление в математике понятие бесконечного и, в частности, принципа выбора часто приводит к заключениям, лишенным всякого гносеологического смысла. Первых Борель называл «идеалистами», вторых «реалистами». Термин «реалист» иногда заменяется терминами «эмпирист» или «натуралист». Представители критического направления отмечали, что построение, сделанное с использованием принципа выбора, не может дать индивидуального объекта, а определяет всегда лишь класс объектов, удовлетворяющих некоторым требованиям. Лебег ввел понятие «эффективного» или «называемого» множества. По существу, это множество, которое может быть задано без применения принципа выбора. Важным для приложения к анализу и теории функций является вопрос об измеримости множества. Все известные доказательства измеримости некоторых множеств связаны с его структурными, т.е. дескриптивными, свойствами.

Современная разработка дескриптивной теории множеств в общих топологических пространствах востребована в других областях математики, например, в теории потенциала.

Продолжили развитие этой теории Н. Лузин, М. Суслин, П. Александров в России, В. Серпинский в Польше, Ф. Хаусдорф в Германии.

Основной принцип дескриптивной теории множеств сформулировал Лузин в своей диссертации: «Дано структурное свойство функции. Найти её аналитическое выражение».

Лузин в 1934 в статье «Дифференциальное исчисление», написанной для БСЭ, различает математический анализ большого и малого стилей, имеющих различное назначение – строгое учебное и креативное исследовательское. В исследовательской работе допускается использование принципа предвосхищения основания, в курсах «малого» стиля, напротив, вводятся «излишние» понятия, неразрешимость с помощью вводимых понятий важных проблем, однако, прекрасно ставящихся на языке этого малого анализа» [72, т. 3, с. 292-391].

Математика в последней трети XIX и в первой трети XX века приобрела новую форму – обрела роль фундаментально самодостаточной теории. Значительную роль в этом процессе сыграла теория множеств, теория меры. Вспомним, что степень общности многих теорем варьировалась с точностью до множеств, пренебрежимо малых, нулевой меры. Это давало понятиям возможность развиваться, получать в процессе исследования новые, более точные определения (например, аналитические и проективные множества). Процесс этот был в значительной степени связан с увеличением роли языка как порождающей структуры, использующей грамматическое средства и философское осмысление. Благодаря этому процессу выдвинулась на ведущие позиции московская школа теории множеств во главе с Лузиным.

Выводы к третьей главе

На основе работ Архимеда, Дж. Грегори (1668), И. Ньютона (1669), К. Гаусса (1809), О. Коши (1821), Г. Дарбу (1875) рассмотрена история теоремы о пределе сжатой переменной, показан её генезис из работ Архимеда.

Рассмотрена история языка «ε-δ» и теоремы Лагранжа. Исследован генезис понятий предела, бесконечно малой и функции на основе работ Г. Лейбница, Дж. Валлиса, Л. Эйлера, Ж. Даламбера (1765), С. Люилье (1786), Ж.Л. Лагранжа (1797), А.Ампера (1806), Б. Больцано (1817), О. Коши (1823), К. Вейерштрасса (1856). Показано, что основная концепция метода «ε–δ» формировалась в берлинских лекциях Вейерштрасса, а легенда о принадлежности языка эпсилонтики Коши была создана А. Лебегом.

Изучение источников, рассмотренных в третьей главе, показало, что в XVII в. произошло расширение языковой области научного языка, на смену латыни приходят национальные языки. Более всего это проявилось в логике Пор-Рояля: выделена порождающая роль французского языка, общая для всех языков смысловая и логическая основа, разделены объём понятий и структура понятий, смысловая и логическая сторона утверждений. «Искусство думать» предполагало освобождение от вербальных форм, стремление к изначальному смыслу. Утверждался принцип сохранности объёма и структуры понятия в процессе рассуждения.

Вновь эти вопросы были подняты в математике XIX в., когда возникла проблема строгости. Особенности французской математической школы эпохи Коши состояли в том, что математика развивалась не в Академии, а в учебных заведениях, была ориентирована на инженерное обучение, усилились требования к строгости и отчётливости преподавания, его ориентацию на практическую пользу. Особенности немецкой математической школы состояли в том, что перед математиками не стояло задач подготовки гражданских и военных инженеров в масштабах большого государства, преподавание было направлено на подготовку педагогов (кроме Геттингена). Объединение Германии в 1871 г. и выигранная франко-прусская война дала огромный стимул опережающего развития в науке. Это было обусловлено прежде всего тем, что ведущие математики могли иметь учеников, стала бурно развиваться физика и инженерные науки. Исследования немецких учёных носили более концептуальный характер. Ярким примером тому является Георг Кантор. Его теория позволила математике приобрести свободу фундаментальной науки, освободила её от зависимости по отношению к прикладным наукам. Теория Кантора дала возможность формировать новые понятия, обусловленные внутренней логикой математики, её языка. Изменился тип определений, они стали в большей степени описательными, что вызвало к жизни новый тип математической теории – дескриптивную теорию множеств. Рассмотрено развитие типов определений в работах Коши Вейерштрасса, Кантора, Бэра, Бореля, Лебега, Адамара, Пуанкаре; в частности, развитие определения числа, иррационального числа, функции, непрерывной функции, предела и окрестности. Показана смена определения функции как формулы на определение функции как взаимно-однозначного соответствия, что предполагало как необходимое и достаточное совокупность свойств функции, из которых уже можно было вывести её аналитический вид. Создаётся новый характер преподавания, удельный вес математического обоснования переносится на лекции. Они в большей степени обращены не к интуитивным аналогиям физическим и геометрическим образам, а к логическому восприятию. Математика середины XIX века остро нуждалась в теории действительного числа. Открытие рядов Фурье, расширение класса разрывных или недифференцируемых функций порождало потребность оценить множество точек разрыва и возможность пренебрежения такими множествами. В середине XIX в. возникла потребность в анализе точечных множеств (например, множества точек разрыва), но ещё не было инструментов такого анализа. В математическом анализе это привело к арифметизации анализа. Показаны попытки создания теории действительного числа Б. Больцано (1830-е гг.), Ш. Мере (1869, 1872), которые не нашли признания. Вейерштрасс в своих лекциях арифметизировал анализ, устранив во многом обращение к геометрии. Но его лекции не публиковались, его подход не был изложен, обобщён и формализован им самим. В 1872 г. появились концепции Э.

Гейне, Р. Дедекинда и Г. Кантора. В главе даётся анализ типов определений, используемых ими, выделен новый тип определений, созданный Кантором.

Определения до Кантора были преимущественно конструктивными или функциональными. В гуманитарных науках использовались другие типы определений – отрицательные и дескриптивные (описательные). Благодаря им можно было начать рассмотрение объекта, зная о нём немного, может быть, только один признак. Далее в процессе исследования наращивать объём информации; можно было отделить объект от других с помощью отрицания. Кантор перенёс эти принципы описания на математические объекты, создав новый тип определения. В процессе рассуждения это понятие обрастает признаками, наполняется содержанием, сохраняя за собой возможность дальнейшего развития. В отличие от логики Пор-Рояля, объём и структура понятия в начале и в конце рассуждения различны. В зарождении понятия числа первичным для него было не порядковое число, а установление взаимно-однозначного соответствия между множествами. Математика на основе теории множеств приобрела характер фундаментальной науки, понятия которой не зависели от геометрического или физического смысла. После того как Кантор создал теорию множеств, изменился язык и внутренняя структура математики. Она перестала нуждаться в геометрической или физической интерпретации, и приобрела значительную дескриптивную составляющую. Созидающим инструментом становится язык, описательные формы. Теория множеств создавалась как продолжение арифметики, но уже десятилетие спустя стала основой, базой теории числа. Появилась возможность анализировать тончайшие нюансы конструкций математических объектов и связей между ними. Многие определения и утверждения формировались вербально, сохраняя высокую степень абстракции. После возникновения теории множеств в математике повысилась роль индуктивных определений невербального характера, т.е. предполагающих выполнение абстрактных математических операций, уже не связанных с приложениями в физике, механике, геометрии. Наряду с этим, появляются и непредикативные определения. Изложена дискуссия конца XIX в. между Р. Бэром, Э. Борелем, А. Лебегом, Ж. Адамаром, А. Пуанкаре и их взгляды на математическое определение и существование математического объекта. Отмечена роль аксиомы Э. Цермело во взглядах математиков на эффективность определений и структурный, т.е. дескриптивный, анализ измеримости множеств, а также позиция Н.Н. Лузина по этому вопросу.

Математика в последней трети XIX и в первой трети XX века приобрела новую форму – обрела роль фундаментально самодостаточной теории. Значительную роль в этом процессе сыграла теория множеств, теория меры. Вспомним, что степень общности многих теорем варьировалась с точностью до множеств, пренебрежимо малых, нулевой меры. Это давало понятиям возможность развиваться, получать в процессе исследования новые, более точные определения (например, аналитические и проективные множества). Процесс этот был в значительной степени связан с увеличением роли языка как порождающей структуры, использующей грамматическое средства и философское осмысление. Благодаря этому процессу выдвинулась на ведущие позиции московская школа теории множеств во главе с Лузиным.

Глава 4. РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЙ ЧИСЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XIX в.

4.1. Шарль Мере и его «Новый точный инфинитезимальный анализ»

Во второй половине XIX века продолжалась работа по упорядочению математического анализа, начатая Огюстеном Коши, и продолженная Карлом Вейерштрассом, Эдвардом Гейне, Георгом Кантором, Рихардом Дедекиндом и Шарлем Мере. В 1872 году у каждого из них вышли работы, связанные с арифметизацией анализа. Это лекции Вейерштрасса «Элементы арифметики», изданные его учеником Е. Коссаком [352], статья Гейне «Элементы учения о функциях» [23, 333], «Непрерывность и иррациональные числа» Дедекинда [27, 222], «Новый точный инфинитезимальный анализ» Шарля Мере [385].

Рассмотрим здесь работы Шарля Мере, не получившие признания, но от этого не менее значимые.

Шарль Мере (Charles Méray) родился 12 ноября 1835 года в Chalon-sur-Saône, умер 2 февраля 1911 в Saône-et-Loire. В 11-летнем возрасте его отличало благоговейное отношение к математике, хотя учитель отмечал, что мальчик мало что понимал в геометрии и алгебре, да и сам Мере говорил о себе: «Я был влюблён в математику без понимания». Он с увлечением читал историю математики Монтюкла, а в 18-летнем возрасте поступил в Нормальную школу в Париже, показав первый результат среди поступавших. Своим учителем считал Шарля Брио. С 1857 по 1859 работал учителем лицея в Сен-Квентине, а затем взял отпуск и семь лет жил в деревне в Бургундии, занимаясь виноделием. В 1866 году он стал читать лекции в университете Лиона, а с 1867 года и до конца жизни был профессором математики в университете Дижона. В 1899 году стал членом-корреспондентом Парижской Академии наук. Первая его работа по геометрии вышла в 1868 году, а в 1869 году в Дижоне вышла работа, оцененная значительно позже, в которой он первым даёт строгое определение иррационального числа: «Замечания о природе определённых величин с использованием пределов этих величин» [384]. Ему принадлежат несколько курсов анализа, выходивших с 1872 года [385].

В работе [384] Мере формулирует два принципа теории иррациональных (неизмеримых, incommensurables) чисел: «1. Переменная величина ν, которая последовательно принимает значения $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n, ...$, стремится к некоторому пределу, если её члены будут постоянно возрастать или убывать, оставаясь при этом в первом случае меньше, а во втором случае больше некоторой фиксированной числовой величины. 2. Переменная ν определяется ещё дополнительным свойством, что разность $v_{n+p} - v_n$ стремится к нулю при неограниченно возрастающем *n*, каково бы ни было отношение между *n* и *p*.

Определим также эквивалентные возрастающие последовательности:

Если *m* и *n* бесконечно возрастают, разность $u_m - v_n$ двух возрастающих последовательностей сходится к нулю для некоторого зависимого промежуточного (взаимно обоюдного) индекса между этими индексами, легко выяснить, как достигается бесконечно малая для всякого другого закона. Говорят также, что возрастающие переменные *u* и *v* эквивалентны.

Их пределы (подлинные или фиктивные): предположим, что *u* и *v* имеют пределами *U* и *V* (добавим, что это рациональные числа). Если *u* и *v* эквивалентны, тогда *U* и *V* равны между собой. Напротив, допустим, что *u* и *v* не имеют предельной (числовой) точки. Будет оправданным, выражаясь фигурально, сказать, что они имеют равные пределы». Эти пределы он называет, в отличие от числовых пределов, «фиктивными пределами» возрастающих последовательностей.

Рассмотрим рассуждения Мере из курса 1872 года. Он был издан в Париже, получил невысокую оценку Германа Лорана [363], и остался незамеченным соотечественниками, а франко-прусская война затруднила знакомство с ним немецких математиков. Лоран писал: «Методы, применяемые в этой работе столь тонки и деликатны, что неизвестно, будут ли они понятны даже знатокам абстракций высшего Анализа, и стоило ли так резко разрушать многолетние традиции» [там же, с. 25]. В качестве причины невысокой популярности трактатов Мере П. Дюгак называет его «чрезвычайно личный язык, который затрудняет чтение текста» [235, с. 348].

Мере следовал классической традиции Лагранжа и Коши, излагавших анализ на основании рядов Тейлора и Мак Лорена. Коши в 1821 году определял иррациональные числа как пределы последовательностей рациональных чисел, и даже определил операцию умножения и деления иррационального числа на рациональное, а также возведения иррационального числа в степень [208, с. 337, 341] или [62, с. 382, 388]. Рассматривались только целые функции, т.е. могущие быть разложены в ряд по целым степеням, и Мере неоднократно подчёркивает, что этого достаточно для нужд анализа. Мере опирается на критерий сходимости Коши, но для своей теории вводит много новых понятий: фиктивного предела, олотропности[78] и связанных с ними. Он считал, что «разрывные функции, не имеющие производных, не интегрируемые, никогда не встретятся, так что о них можно не беспокоиться. Не стоит обращаться к уравнению Лапласа, принципу Дирихле, потому что производные определяются, рассчитываются,

[78] Этот термин принадлежит Мере и в дальнейшем никем не употреблялся.

перемешиваются в дифференциальные выражения так, как этого хотел Лагранж, то есть с помощью простых операций» [384]. Тем не менее, Мере идёт дальше Коши, – он определяет операции над иррациональными числами строго и последовательно, и на их основе вводит понятие непрерывной функции. Мере вводит понятие олотропной функции – аналог равномерно непрерывной. Поразительно, что точно так же и в том же году рассуждали в немецком городе Галле Кантор и Гейне в своих работах [49].

Мере называет иррациональные числа (не разделяя их на алгебраические и трансцендентные) неизмеримыми.

Вот его рассуждение [385], курсив Мере:

«Назовём вариантой числовое значение (целое или дробное, положительное или отрицательное) $v_{m,n,\ldots}$, величина которого зависит от значения целых m, n, …, которые берутся в любых возможных комбинациях величин, и которые нумеруются с помощью этих индексов, например: $v_m = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m}$, или $v_{m,n}=\frac{1}{mn}$ – варианта двух индексов.

Если существует число V, для которого при достаточно больших m, n, …, разность $V-v_{m,n,\ldots}$ по абсолютному значению будет произвольно мала для достаточно больших величин индексов, то говорят, что варианта $v_{m,n,\ldots}$ стремится или сходится к пределу V.

Если $V=0$, варианта $v_{m,n,\ldots}$ называется бесконечно малой. Таковой будет, например, разность между вариантой и её пределом.

Среди вариант, не имеющих пределов, нужно отметить такие, у которых абсолютная величина может приобрести значение, большее любого наперёд заданного числа; их называют *бесконечными* величинами; а те, которые наоборот, имеют числовые значения, меньшие, чем некоторое конечное число, называются *конечными*.

Нетрудно установить следующие утверждения:

I. Сумма, произведение (или произведение степеней) определённого числа нескольких конечных вариант и постоянных значений будет конечной величиной. То же для отношения двух подобных величин, у которых знаменатель не является бесконечно малым.

II. Произведение бесконечно малой на постоянную или конечную величину, сумма некоторого количества таких произведений (положительных степеней), на бесконечно малую, обратная к бесконечно большой, будет бесконечно малой вариантой.

III. Степень с бесконечным (положительным) показателем некоторой постоянной величины или варианты будет бесконечной, или бесконечно малой смотря по тому, какое у этой величины окончательное абсолютное значение: превосходит ли оно величину >1, или оно меньше, чем величина <1.

IV. Сумма, произведение (или произведение степеней) определённого количества некоторых вариант, имеющих пределы, и постоянной величины, имеют в пределе результат, который получится, если подставить в этом вычислении предел этих значений. То же самое относится и к частному двух подобных величин, если знаменатель не является бесконечно малым.

Неизмеримые числа. Назовём сходящейся такую варианту $v_{m+n,...}$, для которой разность между $v_{m+p,n+q,...}$ и $v_{m+n,...}$ для произвольных p и q будет меньше любой бесконечно малой варианты с индексами m и n, короче говоря, такой, что эта разность стремится к нулю для m, n бесконечных независимо от p и q.

Вот примеры такой сходимости:

1^0 Варианты, имеющие предел. Так как $v_{m+p,n+q,...} - v_{m,n,...} = (V - v_{m,n,...}) - (V - v_{m=p,n+q,...})$ – это разность двух бесконечно малых вариант.

2^0 Конечные варианты, которые, начиная с некоторого значения индексов, уже не растут и не уменьшаются (говоря алгебраически). Это легко доказывается.

1. Две варианты $v_{m,n,...}$ и $v'_{m',n',...}$ эквивалентны, когда их разность $\nu_{m,n,...} - \nu'_{m',n',...}$,

рассматриваемая как единая варианта с индексами $m,n,...m',n',...$, будет бесконечно малой.

Установив это, легко докажем следующее.

Сумма, произведение (или произведение степеней) некоторого количества сходящихся вариант, и неизменных величин, будет сходящейся вариантой, эквивалентной такой, которая получилась бы заменой соответствующих эквивалентов. То же верно и для частного, если знаменатель не является бесконечно малым.

2. Это утверждение тривиально, если варианты имеют пределами определённые числа, но в том случае, когда некоторые из них не сходятся ни к какому пределу, *выражаемому численно*, это утверждение тоже остаётся справедливым.

Тем не менее, согласимся, что это в переносном смысле означает, что инварианта сходится к некоему фиктивному *неизмеримому* пределу, если она сходится к точке, не допускающей точное определение. Если несоизмеримые пределы двух сходящихся вариант равны, то эти варианты будут эквивалентны; сумма, произведение и т. д. вариант, сходящихся к какому-либо пределу, подлинному или фиктивному, в зависимости от случая, есть сумма или произведение или т.п. их пределов, подлинных или фиктивных. И, если дополнить эти условия, верны предложения, которые мы сформулировали, равно как и цитируемые теоремы.

3. *Сходящаяся варианта, не являющаяся бесконечно малой, конечна при сохранении определённого знака*. По нашей гипотезе существуют бесконечные комбинации величин m, n, … , которым соответствуют величины $v_{m,n,\ldots}$, превосходящие по абсолютному значению фиксированное число δ. Придадим величинам m, n, … такие достаточно большие значения, чтобы разность $v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}$ была бы численно меньше, чем δ, каковы бы не были p, q, … Так как $v_{n+p,m+q,\ldots}$ равно $v_{m,n,\ldots} + (v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots})$, это равенство справедливо для всех p, q, …, короче говоря, для всех индексов, равных или превосходящих знак $v_{m,n,\ldots}$.

Более того, если две варианты $v_{m,n,\ldots}$ и $v'_{m',n',\ldots}$ сходятся к несоизмеримым пределам, и не являются эквивалентными, их разность $v_{m,n,\ldots} - v'_{m',n',\ldots}$ конечна и сохраняет определённый знак. Смотря по тому, каков этот знак, + или – , мы говорим, что неизмеримый предел первой больше или меньше, чем второй.

Таким же образом, говорят, что измеримое число a больше или меньше неизмеримого конечного числа для варианты $v_{m,n,\ldots}$, смотря по тому, как получается, $a - v_{m,n,\ldots} >$ или < 0.

Если, по абсолютному значению, эта конечная разность остаётся меньше ε, назовём *значением* неизмеримого числа приближённым в соответствии с ε, с избытком в первом случае и с недостатком во втором случае.

Мы будем определять все неизмеримые числа, приближая их значения с помощью некоторого δ , каким бы малым его не вообразить.

Действительно, пусть $v_{m,n,\ldots}$ – сходящаяся соответствующая варианта, и для данных достаточно больших m, n, …, при которых $v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}$ остаётся по абсолютной величине меньше, чем $\frac{1}{2}\delta$, каковы бы ни были p, q, …

Тождество $v_{m=p,n+q,\ldots} = v_{m,n,\ldots} + (v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots})$ приобретает вид $\left(v_{m,n,\ldots} + \frac{1}{2}\delta\right) - v_{m+p,n+q,\ldots} > 0$ при δ < 0, $\left(v_{m,n,\ldots} - \frac{1}{2}\delta\right) - v_{m+p,n+q,\ldots} < 0$ при величине числа < δ.

Тогда $\left(v_{m,n,\ldots} + \frac{1}{2}\delta\right)$, $\left(v_{m,n,\ldots} - \frac{1}{2}\delta\right)$ будут приближениями к неизмеримому числу сообразно δ, одно с избытком, второе с недостатком.

4. Это утверждение хорошо проверяется на примерах. Положительное неквадратное число a, не являющееся точным рациональным квадратным корнем какой-либо числовой величины, может быть представлено бесконечным множеством квадратных вариант, которые к

нему сходятся. Мы утверждаем, что эти рациональные (положительные) будут сходящимися и эквивалентными друг другу вариантами.

Действительно, пусть $v_n^2 = a + \varepsilon_n$, $v_{n+p}^2 = a + \varepsilon_{n+p}$, ε_n, ε_{n+p} сходятся к нулю при бесконечно возрастающих индексах, и тогда $v_{n+p} - v_n = \dfrac{\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n}{v_{n+p} + v_n}$.

Знаменатель не является бесконечно малым, потому что в противном случае v_n^2, v_{n+p}^2 сходятся к нулевому пределу, отличному от a , числитель же нет, тогда $v_{n+p} - v_n$ стремится к нулю при бесконечно возрастающем n, независимо от соотношения между n и p , что и доказывает сходимость варианты v_n .

Таким же образом доказывается эквивалентность двух вариант, квадраты которых сходятся к одному и тому же числу. *Это означает, что все положительные числа рационально измеримы или неизмеримы.* Они употребляются для обозначения рационального фиктивного a , означая истинное рациональное, когда a есть квадратное число.

Таким образом, мы сказали, что квадраты многих вариант имеют общий предел a, и все могут стремиться к неизмеримому пределу $\sqrt{a}$.

Равенство $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ означает, что квадраты двух вариант сходятся к числу 8, и другая к числу 2, первая эквивалентна удвоенной второй.

Неравенство $1 < \sqrt{2} < \sqrt{8}$ выражает избыток первой над второй и их обеих перед единицей завершается знаком +.

В подобном равенстве $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$ мы будем воспринимать рациональный корень четвёртой степени как биквадратный из варианты, сходящейся к a и равен рациональному корню из квадрата такой эквивалентной варианты, квадрат которой равен a.

Рассуждая таким образом, *мы всегда можем получить утверждение о неизмеримых числах, выражающее основные отношения между числами в их собственном смысле*.

5. Надо сказать ещё кое-что о неизмеримых вариантах. Пусть $u_{m,n,\dots}$ – это последовательность величин такого рода, и величины $v_{m,n,\dots}$ приближённо отличаются от неё на величину $\varepsilon_{m,n,\dots}$, причём эта последняя бесконечно мала.

Если $v_{m,n,\dots}$ – сходящаяся величина, мы делаем заключение, что обе величины стремятся к одному и тому же пределу, измеримому или нет, а именно к пределу $v_{m,n,\dots}$.

Так как по абсолютной величине $v_{m,n,...} - u_{m,n,...} < \varepsilon$, $v_{m+p,n+q,...} - u_{m+p,n+q,...} < \varepsilon$, тогда $\left(v_{m+p,n+q,...} - v_{m,n,...}\right) < \left(u_{m+p,n+q,...} - u_{m,n,...}\right) + \left(\varepsilon_{m,n,...} + \varepsilon_{m+p,n+q,...}\right)$, где в последней части второе слагаемое бесконечно мало, условие для сходимости u заключается в том, что её величины в разных случаях (разновременно) измеримы. Необходимо добиться, чтобы разность $u_{m+p,n+q,...} - u_{m,n,...}$ была бы меньше варианты с индексами m, n, …, p, q, …, бесконечно малой для неограниченно возрастающих m, n, …, и для некоторых фиксированных p, q, … .

Теперь мы полагаем необходимым утверждать, что далее мы будем понимать неизмеримые числа в том смысле, который мы продемонстрировали выше, в их приближении к бесконечно малым, бесконечным и конечным».

Далее Мере определяет непрерывную функцию и расширяет это понятие, создав новый термин «олотропная функция»:

«Пусть $f(x,\ y,\ \ldots)$ – сумма целых рядов, R_x, R_y,... – их области (круги) сходимости, $R_x{^\circ}, R_y{^\circ},...$ – соответственно меньшие положительные величины. Если $x', y',..., x, y,...$ – произвольные варианты в этих кругах, центры которых в точках O_x, O_y,... как центры областей $R_x{^\circ}, R_y{^\circ},...$, таким образом, что все разности $x' - x, y' - y,...$ будут бесконечно малыми, и разность $f(x', y',...) - f(x, y,...)$ так же стремится к нулю.

Рассмотрим сумму N первых элементов целого (по целым степеням) ряда. Заменив варианты на сходящиеся варианты, которые сходятся внутри меньшего внутреннего круга сходимости, получим сходимость вариант и их эквивалентность друг другу, при N – индексе замещённых вариант от переменных, неограниченно сходящимся к каким-либо значениям.

Именно это и будет как раз тем, что обеспечит целочисленному ряду свойство определять значение функции, даже неизмеримое, от независимых переменных. Мы полагаем излишней другую точку зрения в этой теории.

Если $x', y',...$ соответственно стремятся к данным пределам x, y, ..., расположенным во внутренней части круга сходимости, $f(x', y',...)$ стремится к $f(x, y,...)$.

Будем говорить, что функция $f(x, y,...)$ олотропна (olotrope) на порциях S_x, S_y,... вспомогательной плоскости, определённой геометрически независимыми переменными, когда для всех значений переменных x, y, …, ограниченных этими областями, $f(x+h, y+k,...)$ представляет собой ряд по целым степеням, а h, k, … таковы, что они остаются внутри области сходимости, отличаясь на величины, не превосходящие $\delta_x, \delta_y,...$, все не равные нулю.

Назовём $\delta_x, \delta_y, \ldots$ *областями олотропии* или *олометрами* функции те участки, на которых выполняются названные условия.

Сразу же из этого определения следует, что $f\ (x,\ y,\ \ldots)$ представляется в форме ряда по целым степеням от $x - x_0, y - y_0, \ldots$, где $x_0, y_0, \ldots$ обозначают некоторые числовые значения переменных внутри области, такие, что для соседних точек x, y, …, для которых модули их разностей остаются внутри олометров. Таким образом, получается вместо $x - x_0, y - y_0, \ldots$ можно писать h, k, … $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$.

Сумма целочисленного ряда есть олотропная функция от переменных внутри круга с тем же центром, что и круг сходимости, но меньшего размера».

Понятие олотропной функции аналогично понятию равномерно непрерывной функции, сформулированному в те же годы Кантором и Гейне. К сожалению, оно не было развито ни в последующих работах Мере, ибо он работал только с целыми функциями, ни его коллегами. Мере излагает классический анализ с помощью введённых понятий – определяет производную, теорему о среднем, теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, Ферма о необходимом условии экстремума, теорию интеграла и дифференциальных уравнений.

Таким образом, Мере расширил понятие числа добавлением иррациональных чисел как классов эквивалентных сходящихся последовательностей и фиктивных пределов (сходящаяся последовательность есть число). Он отвергал физические и геометрические образы ради создания внутреннего языка чистого анализа [386, с. 15-16].

Сейчас французы чтут память своего соотечественника, называя построение иррационального числа построением Мере–Кантора–Гейне. Именем Шарля Мере названо бургундское вино.

4.2. Герман Ганкель и его работы

Биография. Герман Ганкель (Ханкель, 14.02.1839–29.08.1873), родился в Галле в семье школьного учителя, а затем профессора физики Вильгельма Готтлиба Ганкеля. В 1849 г. семья переехала в Лейпциг, где Вильгельм Готтлиб стал профессором университета. Уже в гимназии Герман проявлял интерес к древним языкам, читал по-гречески математические тексты, и написал первую школьную работу по текстам из Диофанта. В 1857 г. он поступил в университет Лейпцига, где изучал математику у Августа Фердинанда Мёбиуса (1790–1868), а также у алгебраистов Вильгельма Дробиша[79] (1802–1896) и Вильгельма Шайбнера (Wilhelm

[79] Дробиш был также исследователем истории алгебры, что видно из его книги [232].

Scheibner (1826–1908), а физику у своего отца. По традиции, немецкие студенты должны были каждый семестр слушать лекции в различных университетах. Ганкель в 1860 году слушал лекции Георга Бернхарда Римана (1826–1866) в Геттингене, а в 1861 году лекции Карла Вейерштрасса (1815–1897) и Леопольда Кронекера (1823–1891) в Берлине.

В 1861 году в Геттингене он защитил работу «К общей теории движения жидкостей», а в 1862 году в Берлине получил докторскую степень за диссертацию «Об особом классе симметричных определителей».

Право на чтение лекций он защитил в 1863 году в работе «Эйлеровы интегралы от неограниченного аргумента» [284] в университете Лейпцига, где и начал преподавать.

В 1867 году Ганкель стал экстраординарным профессором, но в том же году переехал в Эрланген, где стал ординарным, то есть штатным, профессором. Там он женился на Марии Диппе, а в 1869 году молодая семья переехала в Тюбинген, где Ганкелю предложили кафедру. В 1872 году Ганкель перенёс тяжёлый менингит и в 1873 году в 34-летнем возрасте неожиданно умер от инсульта.

Научной особенностью математического творчества Ганкеля было сочетание историко-математического и философского методов. Он видел развитие идеи во времени, и связь идеи с потребностями времени. В частности, он заметил, что математические операции последнего века влекут постепенное расширение понятия числа.

Его основные интересы разделялись между теорией комплексных чисел, теоретической арифметикой, теорией функций, проективной геометрией и историей математики. Ганкель был первым профессором, читавшим студентам лекции по истории математики, ему принадлежит честь открытия и популяризации идей Больцано и Грассмана. Уже в работе [284] 24-летнего Ганкеля содержится историко-математический анализ работ Эйлера.

Комплексные числа и функции. Интерес к теме комплексных функций проявился у Ганкеля благодаря его учителю Риману.

В XIX веке теория функций комплексной переменной формировалась, накапливая результаты. Ещё не существовало обобщения теории. Представление комплексных чисел в виде точек плоскости получило признание с 1831 года, когда была опубликована работа Карла Гаусса (1777–1855) «Теория биквадратных вычетов», включавшую обоснование комплексных чисел и их геометрическую интерпретацию. Он же исследовал широкий класс специальных функций, в том числе эллиптических. Независимо от Гаусса теорию эллиптических функций разработал норвежский математик Нильс Абель (1802–1829). Наряду с ним вёл фундаментальные исследования немецкий математик Карл Якоби (1804–1851). Его книга «Новые основания эллиптических функций», изданная в 1829 году, содержит теорию тэта-функций, теперь носящих его имя. Впоследствии тему эллиптических функций разрабатывали Ж. Лиувилль, Ш. Брио, Ж. Буке, Ш. Эрмит, А. Гурвиц.

Огромен вклад в теорию функцию комплексной переменной французского математика Огюстена Коши (1789–1857). Он доказал теорему о независимости интеграла от пути интегрирования, построил теорию вычетов с её приложениями, получил интегральную формулу и из неё вывел разложение в степенной ряд. В 1843 году французский военный инженер и математик Пьер Лоран (1813–1854) опубликовал работу о разложении функции комплексного переменного, непрерывной и дифференцируемой в круговом кольце, в ряд по целым положительным и отрицательным степеням[80]. В 1862 году Эжен Руше (1832–1910), выпускник Политехнической школы Парижа, опубликовал статью, содержащую теорему о количестве нулей аналитических функций.

С 1850-х годов Карл Вейерштрасс (1815–1897) читал лекции по аналитическим функциям. Он независимо получил результаты Коши и Лорана, создал основы теории аналитического продолжения рядов.

В 1851 году Бернгард Риман (1826–1866) представил свою знаменитую докторскую диссертацию «Основания общей теории функций одного комплексного переменного», определившую новый этап в развитии теории аналитических функций и содержащую исходные идеи топологии поверхностей (многолистные поверхности), а в 1857 году развил эти идеи в «Теории абелевых функций». В 1864 году появились лекции Дюрежа[81] (друга Дедекинда) по теории функций комплексной переменной, в 1865 году С. Нейман опубликовал лекции по Римановой теории абелевых интегралов.

Работа Ганкеля «Теория комплексных числовых систем» [285] появилась в 1867 году (русский перевод под ред. И.И. Парфентьева – Казань, 1912). В ней содержалось обобщение мнимых чисел, теория кватернионов Гамильтона на базе геометрического представления для задач математического анализа и изложение идей Грассмана.

Работу Ганкеля отличало выявление исторических связей и их влияние на постепенное формирование основных понятий теории функций комплексной переменной с середины XVIII века. Это позволило Ганкелю определить направление дальнейшего развития математики, в частности, грядущее расширение понятия числа[82].

[80] Его работа была неизвестна в Германии. В 1822 году Мартин Ом получил разложение в ряд как по отрицательным, так и по положительным степеням переменной, а в 1841 году Вейерштрасс в работе «Darstellung einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen, deren absoluter Beitrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt» независимо от Лорана получил разложение комплексной функции в кольце в ряд по отрицательным и положительным степеням.

[81] Дюреж Генрих (1821-1893), немецкий математик, работал вместе с Дедекиндом в Цюрихе, затем в Пражском университете. Автор работ по теории функций комплексной переменной и эллиптическим функциям.

[82] В 1869–1872 годах появились новые концепция числа, созданные независимо Шарлем Мере во Франции, и немецкими математиками Эдвардом Гейне, Георгом Кантором и Рихардом Дедекиндом.

В его работах по теории интегрирования, написанных в духе и под влиянием Римана, есть предчувствие теории меры.

Теоретическая арифметика. С 1867 года Ганкель занимается теоретической арифметикой, одним из первых оценив её значение как фундаментальной теории для дальнейшего развития математики. Его первая статья «Принцип постоянства формальных законов» (Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze) была опубликована в 1867 году. В том же году вышла его книга «Теория комплексных числовых систем». По Ганкелю «идеальная цифровая система должна с помощью возможно малого числа знаков представлять каждое число в наиболее сжатом и наиболее наглядном виде». Это требование называют постулатом Ганкеля. Ему же принадлежит формулировка принципа постоянства формальных законов для новых концепций. Ганкель показал, что произведение отрицательных чисел есть расширение обычного умножения для положительных чисел, а также, что ни одна система гиперкомплексных чисел не может удовлетворить всем законам обычной арифметики.

Как историк математики, Ганкель многое сделал для восстановления справедливой оценки идей Больцано и Грассмана. Более того, именно исторический взгляд на современную ему математику позволил ему подойти к проблеме аксиоматизации арифметики. Ганкель хорошо знал работы Больцано, начиная с самых ранних, опубликованных в 1810 году.

Больцано один из первых начал разрабатывать аксиоматический метод как общенаучную логическую процедуру с такими характеристиками, как полнота, непротиворечивость, независимость.

В 1810 году Больцано обратил внимание на то, что истины арифметики не могут быть выведены из эмпирических наук, прежде всего из геометрии [183]. Он основал правила арифметики на четырёх аксиомах и двух правилах сложения и умножения, из которых можно вывести все правила арифметики для натуральных чисел.

В 1820–1825 годах Больцано развивал теорию целых и рациональных чисел (рукопись «Reine Zahlenlehre»), а 1830-х годах и теорию действительного числа [104]. Эта теория близка к современной концепции действительного числа, включая определение числа через сечение (за 40 лет до Дедекинда), но опирается на понятие переменного бесконечно большого и бесконечно малого числа. Возможно, если бы рукописи Больцано 1830-х годов были опубликованы и обрели признание, мы бы имели сейчас иную математику, основанную на нестандартном анализе.

С 1822 по 1852 год выходит цикл работ «Опыт логического изложения математики» («Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik» в трёх томах, Нюрнберг)

Мартина Ома[83] (1792–1872), математика, младшего брата физика Георга Ома. Его исследования лежали в области теории чисел и геометрии, теории дзета-функций, теории тригонометрических рядов и оснований математики. Он изучал степенно-показательные комплексные функции, рассматривая анализ в формально-логическом аспекте. Его идеи формализации алгебры были близки Ганкелю.

В 1827 году Мёбиус предложил барицентрическое исчисление (Der Barrycentrische Calcul, Лейпциг, 1827).

В 1843 году начал выявление аксиом арифметики Н. И. Лобачевский (Алгебра или счисление конечных, 1834 г.).

В 1861 году попытку построить теорию арифметики предпринял школьный учитель, математик Герман Грассман [271]. Он дал определения сложения и умножения натуральных чисел, доказал основные свойства операций над ними (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность) и прояснил роль индуктивных определений. Необычная терминология и абстрактное изложение делали его сочинения малодоступными, он не был понят коллегами. Лишь Ганкель в 1867 году разъяснил сущность его идей[84], а в 1869 году в своей работе «Развитие математики в последние века» [289] дал своё независимое изложение теоретической арифметики. Он рассмотрел идею обоснования операций над алгебраическими величинами, необходимость которой проявлялась с первой трети XIX века[85]. Также Ганкель в работе о комплексных числовых системах рассмотрел действительные, комплексные и гиперкомплексные числовые системы, барицентрическое исчисление Мёбиуса 1827 года и построил для него алгебраическую систему, а также построил алгебраические системы для некоторых алгебр Грассмана и кватернионов Гамильтона. Особенно остро проблема перманентности формальных законов проявилась с появлением кватернионов в 1843 году (Уильям Гамильтон, первые работы в 1833 г.), на которые этот принцип уже не распространялся.

Ганкель выделил инвариантный почти для всех цивилизаций принцип записи чисел: «закон убывающего следования разрядов»: при написании чисел, составленных с помощью сложения разрядов (аддитивно), высший разряд при принятом данным народом способе чтения и письма предшествует на письме низшим разрядам, то есть старшие разряды пишутся левее младших. Вопрос о необходимости аксиоматизации арифметики, поднятый Больцано и

[83] Мартин Ом был учителем Эдварда Гейне и Рудольфа Липшица. Ому принадлежит термин «золотое сечение» (goldener Schnitt).
[84] Позже Клебш продолжил интерпретацию алгебры Грассмана.
[85] Первым обратил внимание на эту проблему Джордж Пикок (1791-1858). Он ввел различие между арифметической алгеброй и символической алгеброй. Идея Пикока, известная под названием «принцип перманентности эквивалентных форм», была выдвинута им в 1833 г. в «Докладе о последних достижениях и современном состоянии некоторых областей анализа», прочитанном на заседании Британской ассоциации поощрения науки. Его идеи были развиты Ганкелем.

продолженный Грассманом и Ганкелем, был дополнен работами Дедекинда, Буля, и завершён в 1889 году Дж. Пеано.

Принцип сгущения особенностей. В 1870 году в Тюбингене вышла знаменитая работа Ганкеля «Исследование бесконечное число раз колеблющихся и разрывных функций» [286]. В 1854 г. Риман привёл пример функции, разрывной и недифференцируемой на всюду плотном множестве. Кроме того, в 1861 г. Риман указал еще пример функции, не дифференцируемой на всюду плотном множестве. До конца 70-х годов после Римана не было опубликовано ни одного примера функции без производной на бесконечном множестве точек, и всё ещё сохранялось убеждение в том, что на каждой непрерывной кривой можно найти точку с касательной. Однако уже в 1870 г. Ганкель предложил так называемый метод сгущения особенностей для построения функций, в которых производная отсутствует на всюду плотном множестве точек, и приводит конкретный пример такой функции. Развивая идею критерия интегрируемости, Ганкель близко подходит к понятию меры. Он переформулировал критерий интегрируемости Римана, делая акцент на метрических свойств множества точек. Указав, что функции не обладают общими свойствами, Ганкель попытался ввести свою классификацию функций, рассмотрев интегрируемость каждого типа, и представил метод, основанный на его принципе конденсации особенностей, для построения функций с особенностями в каждой рациональной точке. Хотя теория множеств ещё не появилась, и Ганкелю не хватало характеристик для описания множеств точек разрыва, его работа стала важным продвижение к современной теории интеграла. Иной метод построения непрерывной монотонной функции в 1873 г. приводит Г. Шварц. Построенная таким образом функция не имеет конечной производной на бесконечном числе точек на любом интервале. Наиболее значимый результат в этом направлении был получен Вейерштрассом (1872 г.): он строит свой знаменитый пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке. Этот пример определил направление ряда исследований таких функций и привел к повышению требований к строгости математических рассуждений и построений.

Работа Ганкеля была созвучна разрабатываемой в те же годы его отцом, физиком Вильгельмом Готтлибом Ганкелем, теории вихрей.

Цилиндрические функции Ганкеля. В Mathematische Annalen были опубликована статья Ганкеля [287], посвящённая некоторым специальным функциям, зависящим только от расстояния от начала координат, а также функциям вида $H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$, $H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$, называемым цилиндрическими функциями Ганкеля или функциями Бесселя третьего рода. Они представляют собой линейные комбинации функций Бесселя первого и второго рода, и являются решениями уравнения Бесселя.

Проективная геометрия. В 1875 году, уже после смерти Ганкеля, под редакцией А. Гарнака вышли лекции Ганкеля «Элементы проективной геометрии» [288], в которые включены исторические сведения о геометрических методах и соотношения методов современной геометрии, учении Понселе, Шаля, Штаудта с критическим анализом, подобно анализу систем счисления. Как заметил сам Ганкель в 1869 году в речи "Развитие математики в последние века» [289], «новая [проективная] геометрия и представляет собой тот «царский путь, в котором несправедливо отказал Евклид Птолемею», подразумевая трудности евклидовой, метрической геометрии и заманчивые перспективы развития геометрии проективной. Правда, Феликс Клейн назвал эту речь «блестяще прочитанной, но по содержанию совершенно не обоснованной» [53, с. 172].

Ганкель как историк математики. Творчество Ганкеля относится к периоду подъёма математики в Германии, увенчавшегося появлением концепций действительного числа, разрабатываемых Рихардом Дедекиндом, Георгом Кантором и Эдвардом Гейне. В это же время (1869–1872 годы) во Франции появилась концепция числа Шарля Мере, но события, предшествовавшие франко-прусской войне, которая началась летом 1870 года, не способствовали научному обмену между математиками Франции и германских земель. Помимо этого во Франции после смерти Коши произошло замедление математических исследований. Теорию Мере не оценили соотечественники. Как заметил сам Ганкель в 1869 году в речи "Развитие математики в последние века» [289], после смерти Коши «Княжество математики теперь бесспорно переместилось в Германию, и хотя во Франции ещё есть энергичные ветераны, такие как Шаль и Лиувилль, но у них нет достаточного количества достойных последователей, способных конкурировать с немцами» [там же, с. 29].

Ганкель хотел написать историю математики. Как заметил Морис Кантор, Ганкель был единственным среди немецких профессоров, преподававшим историю математики [205, с. 516-519]. Рукопись Ганкеля «Исторические очерки развития математики в древности и средние века» объёмом более 400 страниц была готова к печати и опубликована уже после его смерти, в 1874 году [291]. Она содержит подробнейшее изложение истории греческой математики, математики Индии, Китая, арабских стран и средневековой европейской математики до XVI века. Наряду с глубоким анализом в книге можно встретить как исторические неточности, так и гипотезы исторического характера. Например, интересно предположение Ганкеля о происхождении китайской математики из Индии. А.В. Васильев высоко оценивал «Исторические очерки математики в древности и средние века» Ганкеля, называя их глубокими и вдумчивыми [13, с. 65].

Ганкель, равно как Вейерштрасс, Дедекинд и Кантор, полагал математику созданием ума. Он писал: «Математика есть чисто интеллектуальная теория форм, объектами которой являются не комбинации величин или их образов, то есть чисел, но воплощение мыслей, которым не обязательно соответствуют эффективные объекты или их отношения» [289, с. 34].

Статья «Grenze» [290] – предел или граница[86] – была одной из трёх статей, написанных Ганкелем для Энциклопедии наук и искусств, которая начала выходить с 1818 года. В 1871 году вышел 90-й том. Две других статьи Ганкеля в «Энциклопедии» были посвящены гравитации и работам Лагранжа по решению уравнений. Статья «Предел» занимает 26 страниц в две колонки мелким готическим шрифтом. Эта статья интересна тем, что понятие предела в эти годы ещё формировалось – Вейерштрасс с 1861 года использовал в своих лекциях язык ε-δ, а понятия предела через фундаментальные подпоследовательности (Гейне и Кантор) ещё не было – оно появится в 1872 году, равно как и понятие предельной точки у Кантора (1872 г.) и у Вейерштрасса (1883 г.). Ганкель рассматривает историю понятия предела в обратной перспективе, прогнозируя возможные тенденции развития, которые, как мы уже знаем, осуществились в последующие десятилетия.

В этой статье проявляется мысль Ганкеля о принципе постоянства формальных законов наряду с постепенным расширением основных понятий математики.

Здесь он впервые отмечает важность работ Больцано о бесконечных рядах и публикует пример непрерывной функции, недифференцируемой в бесконечном числе точек.

Ганкель начинает с современного ему понятия предела, данного Коши в «Курсе анализа» 1821 года, затем обращается к истокам – построению предела у Евклида, очень подробно о методе исчерпывания (§1), Аристотеля и построению предела у Архимеда (§2). Далее он рассматривает развитие понятия бесконечности у Михаэля Штифеля в «Arithmetica Integra» 1544 года, у Кеплера «Новая стереометрия винных бочек» 1605 года, Кавальери 1635 г., Ферма, Роберваля, Паскаля, Валлиса, Лейбница, Больцано[87] (§3). Формированию понятия предела в XVIII – начале XIX века посвящён §4 – Ганкель рассматривает работы Больцано1810, 1816 и 1851 годов, понятие предела от Ампера (1806 г.) до Дирихле (1829 г.), работы Якоби и Гаусса (1840 г.). Понятию предела функции посвящён §5 - предел при бесконечном приращении аргумента, суммирование бесконечного количества слагаемых, дифференцирование. §6. Приближение к пределу у Мак Лорена, Тейлора, Ньютона, Лейбница. Теорема Лагранжа, ряды Тейлора. §7. Предельное значение (Grenzwert). §8. Доказательство существования предела. Рассматривается предел частичных сумм сходящихся рядов, в том числе и тригонометрических и приводится известный пример[88] ряда $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin mx}{m}$, который имеет суммой непрерывную

[86] Grenze – предел, граница. Этот немецкий термин употреблялся наряду с термином limit, но имеет больший объём понятия.
[87] Ганкель ссылается на книгу Больцано «Парадоксы бесконечности», вышедшую в 1851 г.
[88] Впервые этот ряд встречается у Эйлера, затем его приводит Фурье в «Аналитической теории теплоты». Но Фурье включал в график рассматриваемой функции и отрезки перпендикуляров, восстановленных в точках конечных разрывов, поэтому функция в его понимании не

функцию всюду, кроме точек вида $x=(2m+1)\pi$. Здесь же Ганкель рассматривает предельное поведение функций вида $\sin\frac{1}{x}$.

Далее Ганкель вводит понятие равномерного предельного поведения, которое в 1872 году будет развито в понятие равномерной непрерывности и воплотится в теореме Кантора–Гейне: «Если A является пределом, то всегда можно найти такое значение ε, что $f(a+\varepsilon)$ отличается от предела A на сколь угодно малое положительное значение σ, и как только δ < ε, так сразу $f(x+\delta)$ отличается от A не более чем на σ. В связи различными потребностями встречаются различные определения предела; приведём следующую строгую формулировку, подведя итог в строгом соответствии с концепцией этой идеи.

Если функция $f(x)$ принимает конечное значение A в интервале между $x=a$ и $x=a+\varepsilon$, и для каждого произвольного δ принимает любые значения, тогда можно определить разность $A-f(a+\delta)$, при том, что δ не выводит за пределы интервала, то есть $A-f(a+\delta)$ проходит через нулевое значение, то $f(a+\varepsilon)$ неограниченно приближается к своему пределу при неограниченно убывающем ε» [там же, с. 193]. Это замечание интересно тем, что здесь используется мысль Больцано 1817 года о том, что теорема Ролля есть основное свойство непрерывности[89]. В следующем параграфе Ганкель рассматривает непрерывные функции (§9), которые он определяет так: «Функция $f(x)$, которая при $x=a$ принимает конкретное значение $f(a)$, называется непрерывной в этой точке, если для произвольно малого ε разность $f(a+\delta)-f(a)$ для всех $\delta<\varepsilon$, численно не превосходит сколь угодно малой величины σ.

Точкой разрыва называют такую точку $x=a$, для которой не существует столь малого ε, чтобы разность $f(a+\delta)-f(a)$ для всех $\delta<\varepsilon$ была бы меньше произвольной величины σ» [там же, с. 194]. Как мы видим, Ганкель вводит более сильное определение непрерывности, хотя не проявляет зависимости между ε и σ. Заметим также, что Коши в 1821 году называл «непрерывной такую функцию, для которой в любой точке между двумя заданными пределами разность $f(x+\alpha)-f(x)$ неограниченно убывает вместе с числовым значением α. Другими словами, функция $f(x)$ остаётся непрерывной относительно x между двумя данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции» (Коши, Курс анализа, 1821 год, с. 43).

§10 посвящён свойствам непрерывных функций, при этом помимо известных к тому времени свойств непрерывных функций Ганкель рассматривает понятие осцилляции. Далее

была разрывной. В 1821 году Коши сформулировал утверждение, что всюду сходящийся ряд непрерывных функций имеет пределом непрерывную функцию. В 1826 году Абель привёл в качестве контрпримера к этому утверждению указанный тригонометрический ряд.

[89] Впоследствии это утверждение получило название теоремы Больцано-Вейерштрасса.

Ганкель рассматривает разрывные функции (§11) и приводит пример точечно-разрывной функции (по Риману) – нигде не дифференцируемой непрерывной функции. Заметим, что классификацию разрывов, а также определение непрерывности через односторонние пределы ввёл Улисс Дини в 1878 году.

§13 посвящён понятию предела в анализе. Большое значение развитию понятия предела в анализе Ганкель придаёт Лагранжу и его курсу *Leçons sur le calcul des fonctions* 1806 года, работам Ампера 1806 года, Раабе 1839 года. В §14 он рассматривает понятие отношения дифференциалов, т.е. производную и её геометрический смысл; в §15 рассматривается понятие определённого интеграла и его история от формулы Ньютона-Лейбница до Коши и до Дирихле, генезис методов Архимеда; свойства определённого интеграла. §16 посвящён несобственному интегралу и работам Римана, §17 – бесконечным рядам. §18 - историческое развитие понятия бесконечного ряда. (Кеплер, Кавальери, Сен-Винсент, Ньютон, Гранди, Эйлер, Я.Бернулли, Маклорен, Раабе, Лагранж, Ролль). Бесконечные (расходящиеся) ряды. Исторический обзор: Кеплер, Кавальери, Григорий Сен-Винсент ($\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...$), Николаус Меркатор ($\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...$), Лейбниц ($\frac{1}{4}\pi$), Ньютон (биномиальный ряд). Приводит известный парадокс, псевдоразрешённый в 1703 году Г. Гранди: $\frac{1}{2}=1-1+1-...$; приводит парадоксальные примеры суммирования рядов Эйлером. Якоб Бернулли, Мак Лорен. Подробно рассматривает работы немецких математиков с 1813 года, в том числе швейцарского математика Раабе, основные работы которого были опубликованы в журнале Крелле. Покаывает связь традиций немецкой математики с работами Лагранжа, Ролля, Лакруа (1810). § 19. Критический период (после Лагранжа). Фурье, Больцано. Французская школа. Роль журнала Крелле. Гаусс. Абель. Ряды Фурье. Гаусс, Коши. Больцано «О биномиальном ряде (1816 год). Парадоксы бесконечности Больцано.

§20. Теория Мартина Ома. Мартин Ом с 1822 по 1852 год издавал «Опыт логического изложения математики» в трёх томах, где излагал основы формализованной алгебры. Ганкель критикует Ома за неоправданные формальные обобщения, не учитывающие связи с приложениями, но ставит ему в заслугу принцип расширения числовой области и приводит его примеры разложения некоторых биномиальных рядов как по положительным, так и по отрицательным степеням

Из работ Ганкеля видно, насколько остро встала необходимость классификации точечных множеств и характеристики их сравнения, классификации точек разрыва; насколько нужна была новая концепция числа, как с точки зрения теоретической арифметики, так и с позиций анализа; необходимость новой концепции непрерывности и нового категориального аппарата. В последующие годы Кантором была создана теория множеств, Кантором и Дедекиндом – концепция непрерывности, Дедекиндом и Пеано – аксиоматика арифметики; в лекциях Вейерштрасса начинают формироваться концепция компактности, концепция метрического и топологического пространства, позже оформившиеся в работах Мориса Фреше (1906 г) и Феликса Хаусдорфа (1914 г.). Мы видим принцип историзма Ганкеля, в обратной перспективе оценивавшего развитие математики, что давало возможность прогнозировать её развитие. Ганкель отмечает, что если в прежние века математика изучала и описывала естественный мир, то в последний век создавался математический аппарат для технических достижений. Потребность в математических методах в приложении к теории потенциала, электротехники и другим разделам физики XIX века давала свободу выбора адекватных математических моделей, соответствующих прикладным потребностям в областях, созданных физиками.

Как утверждал Ганкель, «Математика – наука, которая создаётся людьми, в разное время разные народы вносили в неё свой дух» [289, с. 25]. «Во многих науках новое поколение разрушает созданное предыдущим и отменяет установленное ранее. Только в математике каждое новое поколение добавляет новый этаж к прежней структуре» [там же, с. 34].

4.3. Карл Вейерштрасс, жизнь и творчество

В 2015 году математический мир отметил 200-летний юбилей великого немецкого математика Карла Вейерштрасса (1815–1897), одного из создателей современного математического анализа.

Детство и юность. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс родился 31 октября 1815 года в Остенфельде (Вестфалия) в католической семье секретаря бургомистра, Вильгельма Вейерштрасса, и Теодоры, урождённой Вондерфорст. Карл был старшим ребёнком. Ему было 12 лет, когда умерла его мать. Служба отца была связана с налоговым управлением, и семья часто переезжала. Отец был интеллигентным человеком, детей учили французскому и английскому. Карл начал посещать школу в Мюнстере, а в 14 лет поступил в католическую Теодорианскую гимназию в Падеборне. В гимназии он получил хорошую не только общую, но и математическую подготовку: стереометрия, тригонометрия, неопределённый анализ, разложение в ряды. Школьное образование было основательным, недаром после Франко-прусской войны Отто фон Бисмарк сказал, что победу одержал школьный учитель. В гимназии была научная библиотека. Известно, что Вейерштрасс просматривал там математические журналы, главным образом, журнал Крелле (Journal für die reine und angewandte Mathematik).

Каждый номер журнала состоял из четырёх тетрадей, в некоторые годы выходило два номера. Благодаря такой периодичности авторы могли обсуждать общие темы, возникал диалог и атмосфера сотрудничества. За годы обучения Вейерштрасса в гимназии (до 1834 года) вышло 12 номеров журнала, в которых были опубликованы 30 статей Н. Абеля и его переписка с А. Лежандром; 34 статьи К. Якоби; 13 статей Х. Гудермана, будущего учителя Вейерштрасса. В основном они были посвящены теории эллиптических функций, что на всю жизнь определило научный интерес Вейерштрасса: как впоследствии признавался он сам, он был сильно увлечён эллиптическими функциями и процессом творения в работах Абеля, Якоби и Гудермана.

Помимо этих авторов, журнал Крелле в те годы опубликовал статьи К. Гаусса, П. Лежёна-Дирихле, Ж. Лиувилля, А. Лежандра, Э. Куммера, Й. Раабе, что послужило формированию немецкой национальной математической школы.

Университет Бонна. Материальное положение семьи было очень скромным, Карлу даже приходилось подрабатывать, помогая вести бухгалтерию торговке маслом и ветчиной. Он окончил школу в 19 лет с определением primus omnium – первый из всех. Отец возлагал на сына большие надежды, избрав для него карьеру чиновника, и Карл отправился в университет Бонна учиться камеральным, то есть правовым, административным и экономическим наукам, необходимым для государственной службы, хотя склонности к административной деятельности он не имел. Пребывание в университете Бонна захватило Карла только студенческими пирушками, дуэлями и прочими проказами. Карл был искусным фехтовальщиком и всю жизнь гордился, что ни разу не был ранен на дуэли. В студенческой корпорации (землячестве) Саксония он получил особый чин Fuchsmajor (старший новичок). Он прослушал курс геометрии Ю. Плюккера и тепло вспоминал предшествующего ему преподавателя, профессора К.Д. фон Мюнхова (1778–1836), математика, астронома и физика. Иоганн Гёте, друг фон Мюнхова, писал: «В прошлом году г. проф. фон Мюнхов не только преподавал нашим дорогим княжнам[90] математику в Йене, но также подготовлял их здесь к урокам профессора Вейнхардта, наблюдал и помогал, наезжая время от времени; к тому же он влиял на нравственность, умонастроение и поведение, привлекал и удерживал внимание, не говоря о прочих его заслугах перед дорогими воспитанницами» [16, с. 841]. Фон Мюнхов, помимо знания математики и педагогического таланта, обладал высокими человеческими качествами, добротой и искусством общения, его тепло вспоминал Вейерштрасс.

Карл проучился в университете всего 3 семестра, но остался в Бонне ещё на 2 года. Фон Мюнхов ободрял Вейерштрасса в его намерениях заниматься математикой. Как писал сам Вейерштрасс 29 февраля 1840 г., «заветное желание ближе ознакомиться с этими моими

[90] Веймарским княжнам Марии и Августе, внучкам Павла I.

любимыми предметами влекло меня всегда к ним, и чем больше я ими занимался, тем ревностнее становилось моё стремление пытаться посвятить мои силы их изучению, причём мне выпало счастье увидеть в покойном профессоре фон Мюнхове в Бонне благожелательного советчика и руководителя. Всё более растущее убеждение в том, что выбор моей будущей профессии был ошибкой, так как я чувствовал, что у меня нет склонности и способностей стать дельным камералистом или юристом, наконец, привело меня к решению посвятить себя целиком изучению того, что совпадает с моими склонностями и от чего я питаю надежду ожидать успеха» [60, с. 27-28]. Вейерштрасс самостоятельно изучал «Небесную механику» Лапласа и работу Якоби «Новые основания эллиптических функций», в которой ставится проблема обращения абелевых интегралов и их систем. У Карла были конспекты лекций Гудермана по теории модулярных функций, данные ему одним из студентов. Эти конспекты помогли Карлу в изучении названных выше работ [там же, с. 24].

Эллиптические интегралы возникли в задачах геометрии и механики ещё на заре дифференциального исчисления, у Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница. Их пытались свести к более простым. Леонард Эйлер нашёл, что они, подобно дугам и логарифмам, выдерживают сложение и умножение. Их исследовали Жозеф Луи Лагранж, Андриен Мари Лежандр, Абель и Якоби. Вейерштрасс поставил себе задачу продолжить эти исследования. Много лет спустя он писал: «Когда я в студенческие времена узнал о письме Абеля к Лежандру, опубликованном в журнале Крелле, это имело для меня величайшее значение. Первой математической задачей, которую я поставил перед собой, был непосредственный вывод формы представления функции, обозначенной Абелем $\lambda(x)$, из дифференциального уравнения, определяющего эту функцию; и удачное решение этой задачи определило моё намерений целиком посвятить себя математике; это случилось во время моего седьмого (зимнего 1837/38) семестра» [175].

Речь идёт о письме, где Абель пишет о функции $y=\lambda(x)$, такой, что $x=\int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}$, и которая может быть представлена как частное двух всюду сходящихся бесконечных рядов, называемых сейчас тета-рядами: $y=\frac{x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+...}{1+b_2x^2+b_4x^4+b_6x^6+...}$. В письме Абеля не было доказательства, и Вейерштрасс выполнил его самостоятельно. Вейерштрасс вычислил коэффициенты рядов и применил этот же метод к другим эллиптическим функциям.

Противоречия между желанием заниматься математикой и требованиями отца и привели к глубокому внутреннему конфликту. За 4 года Вейерштрасс не сдал ни одного экзамена и вернулся домой. Он похудел и ужасно выглядел. Его брат Петер рассказывал Магнусу Гёста

Миттаг-Леффлеру: «Как плохо выглядел Карл, когда вернулся домой! Какая глубокая боль была видеть моего старшего брата в таком состоянии! Четыре года и никакого экзамена!» [390].

Мюнстер. В октябре 1838 года Вейерштрасс по совету одного из друзей семьи отправился в Мюнстерскую академию, где была надежда быстро пройти курс и получить статус школьного учителя. В академии преподавал Христоф Гудерман – второй после Якоби лектор в Германии, читавший эллиптические функции. Вейерштрасс прослушал только его курсы: аналитической геометрии, исчисление бесконечно малых, о модулярных функциях и об аналитической сферике, причём два последних курса Гудерман читал только ему одному. Это продолжалось один семестр, и уже осенью 1839 года Вейерштрасс по специальному разрешению из Берлина начал готовиться к государственным экзаменам. Весной 1840 года Вейерштрасс получил три задания: написать философскую работу на латинском языке, математическую работу, состоящую из решения предложенных задач, и педагогическое сочинение. Гудерманом были поставлены три математические задачи. Первая, основная, «О развитии модулярных функций», соответствовала желанию Вейерштрасса и имела примечание, что она вообще трудна для молодого аналитика и поставлена с согласия комиссии только по настоятельному его ходатайству. Вторая задача была из элементарной геометрии, третья из теоретической механики. В этой работе Вейерштрасс, опираясь на некоторые результаты Абеля и Якоби, получил свойства функций Абеля, различные их разложения и представления Якоби.

Вот отзыв Гудермана о решениях задач его учеником: «1° В этой работе автор не только оправдал ожидания комиссии, но, исходя из системы до сих пор неизвестных дифференциальных уравнений, которые не замедлят возбудить в высокой степени интерес аналитиков и которые он выводит прямым путём, последовательно и частично одно за другим, он пролагает новый путь в теории модулярных функций и на нём, как это и можно было бы ожидать, приходит не только к известным представлениям этих величин, но также к совершенно новым результатам. *Тем самым кандидат входит достойным образом в ряд увенчанных славой исследователей*[91].

Если подумать, что он при слушании в Мюнстере первой лекции по модулярным функциям с ними почти не был знаком, то ещё большее изумление вызывают его исключительные успехи в этой сравнительно новой области анализа. Это объясняется не только направленным к науке трудолюбием кандидата, но и в особенности наличием исключительного таланта, который, если не будет распылён, без сомнения в будущем будет успешно содействовать науке. 2° Вполне удовлетворительно. 3° Также и эта работа удовлетворительна.

[91] Эта фраза не вошла в окончательную редакцию отзыва.

При таких исключительных успехах кандидата для выяснения объёма и основательности его математических познаний не требуется больше никакого устного испытания, если он покажет, что в состоянии дать урок по элементам математики по хорошо продуманной методике. Однако для него самого и для науки совершенно нежелательно, чтобы он стал учителем гимназии, но нужно, чтобы ему были созданы условия для того, чтобы он мог действовать в качестве академического доцента. Гудерман» [60, с. 29].

Как впоследствии (в письме Шварцу в 1888 г.) писал Вейерштрасс, если бы ему стал известен отзыв Гудермана, он смог бы почувствовать ценность своей работы и своего творчества и активнее боролся бы за место в высшей школе. Его работа вполне могла бы стать докторской диссертацией, но в те годы Академия Мюнстера не имела доктората [245, с. 11]. Эта работа была опубликована лишь 54 года спустя в собрании сочинений Вейерштрасса.

Остальные его экзаменационные работы были оценены вполне удовлетворительно, на пробных уроках он показал достаточный для преподавания в младших классах уровень латыни, греческого и немецкого, но полностью провалил уроки по естественным наукам (экспериментальной физике, химии, минералогии, ботанике и зоологии). Такой кандидат не мог стать школьным учителем. По этому поводу возникла переписка с министерством. В результате ему было разрешено преподавать математику и математическую физику в старших классах, а латынь, греческий и немецкий только в младших классах. Недостаточность других знаний была записана в дипломе. В течение года (1841–42) он стажировался (рефендариат) в гимназии Paulinum в Мюнстере.

В Мюнстере он написал ещё три работы по теории функций комплексной переменной. В одной из них аналитические функции одной переменной определяются с помощью алгебраических дифференциальных уравнений. Теорема существования в том же 1842 году была доказана Коши, но Вейерштрасс тогда этого не знал. Его работа содержит также и другие результаты, которых нет у Коши. В этой работе содержится понятие равномерной сходимости и аналитического продолжения. Именно Вейерштрасс ввёл определение аналитической функции как равномерно и безусловно сходящегося ряда[92] (Лагранж вообще не писал о сходимости, а Огюстен Луи Коши и Абель писали только о безусловной сходимости). Вейерштрасс не формулирует понятие равномерной сходимости, для него оно просто вытекает из леммы Абеля. Вейерштрасс впервые говорит об *аналитическом продолжении функций*, причём указывает возможность существования таких особенных точек, при приближении к которым радиус сходимости уменьшается до нуля. В третьей работе Вейерштрасс получает разложение функции в сходящийся ряд по отрицательным и положительным степеням за два года до Пьера

[92] Первые представления о равномерной сходимости возникли независимо в 1847 году в работах Дж. Стокса и Ф. Зайделя. Правда, у них речь шла о сколь угодно медленной сходимости, само понятие сформировалось к 1870-м годам в работах Гейне (1869) и других математиков [77].

Альфонса Лорана (1813–1854). Работа Лорана не была опубликована, она была послана им на конкурс Парижской академии с опозданием и известна только по пересказу Коши 1843 года [211], где Коши напоминает свою теорему из «Конспекта лекций по дифференциальному исчислению» 1823 года: «Пусть x обозначает действительную или мнимую переменную; действительная или мнимая функция от x может быть разложена в сходящийся ряд по возрастающим степеням этой переменной, если модуль переменной сохраняет значение, не превышающее наименьшей из величин, для которых функция или её производная перестаёт быть конечной или непрерывной». Далее Коши говорит, что Лоран обобщил эту его теорему так: «Пусть x обозначает действительную или мнимую переменную; действительная или мнимая функция x может быть представлена в виде суммы двух сходящихся рядов, одного по целым возрастающим степеням x, и другого, по целым нисходящим степеням x; пока модуль x принимает в интервале значения, для которых функция либо её производная остаётся конечной и непрерывной». В этой статье Коши придаёт теореме Лорана статус незначительного следствия из своей теоремы, хотя использовал это разложение в дальнейшем. Согласно [197, с. 349], Вейерштрасс в дальнейшем обходился без этого разложения.

Эти три работы Вейерштрасса тоже впервые опубликованы только в его собрании сочинений.

Дейч-Крона. В 1842 году Вейерштрасс получил назначение ассистентом учителя в прогимназию (младшую гимназию) в маленький город Дейч-Крона (теперь Валч, Польша). Нагрузка достигала 30 часов в неделю. Он должен был преподавать математику, физику, немецкий, ботанику, историю, географию, гимнастику и чистописание. Именно на уроках чистописания появилось начертание буквы p – функции Вейерштрасса – в виде $\wp$. Уроки гимнастики были новшеством, и учителя сами проходили обучение. Вейерштрасс для этого ездил в 1844 году в Берлин, где познакомился с геометром Я. Штейнером и с А.Л. Крелле (1780–1855), математиком, архитектором, основателем и редактором «Журнала чистой и прикладной математики» (1826). Август Крелле был самоучкой, его заслугой было то, что, создав журнал, он объединил немецких математиков. Он угадывал талантливых авторов и публиковал их. Именно он распознал талант Абеля и привлёк его в качестве сотрудника в свой журнал, напечатал большинство работ Абеля в своём журнале, и заботился о его судьбе. Но неуверенность Вейерштрасса в ценности своих работ помешала ему показать их Крелле.

Условия жизни в Дейч-Кроне были тягостными, – в городе не было библиотеки, маленькое жалование (348 талеров в год) не позволяло даже купить марки для отправки рукописей в журналы. Вейерштрасс опубликовал две своих первых работы в ежегодном сборнике-отчёте прогимназии Дейч-Кроне: «Замечания об аналитических факультетах (факториалах)» и «Приведение некоторого определённого трёхкратного интеграла». Первая из работ связана с исследованиями Крелле, в работе которого имелись противоречия, он позже предложил Вейерштрассу проанализировать их в другой статье, которая была напечатана в 1856 г. в журнале Крелле.

В годовом отчёте 1844/45 прогимназии Дейч-Крона была опубликована ещё одна статья Вейерштрасса, «О сократовом методе учения и его применимости в школьном обучении», которая представляет собой его выпускную работу в Мюнстере. Метод Сократа назывался «маевтикой» – родовспоможением. Задавая наводящие вопросы, учитель подводил ученика к самостоятельному умозаключению. Этому методу противопоставляется другой греческий метод – акроама, приятное чтение вслух, который чаще используется для лекций в большой аудитории. Сократ начинал свои занятия с одним учеником и доводил его до определённой высоты состояния духа. Вейерштрасс пишет «Общий метод для школы Сократ не мог установить. Но было бы прекрасно, если бы его дух, из которого проистекало его влияние, всюду составлял душу воспитания и образования – его высокое стремление к истине, красоте и добру и любовь его чистого права» [60, с. 50]. Вейерштрасс в своих лекциях предпочитал метод майевтики – вовлечение слушателей в научный поиск, требовал мыслительных усилий, порицал французский метод чтения лекций как завершённого текста. Этот метод принёс свои плоды позже, в Берлине, а напечатанные работы остались незамеченными, так как этот сборник не попадал в поле зрения специалистов.

В 1875 году Вейерштрасс вспоминал годы преподавания в гимназии как 14 лет ссылки в страну велатов и оботритов (славянские племена, жившие на территории Померании и Мекленбурга) [245]. Долгое время он совсем не имел научных контактов.

В период пребывания в Дейч-Кроне произошёл эпизод с неудачной помолвкой, где Вейерштрасс играл роль обманутого жениха, о чём впоследствии рассказал Герман Амандус Шварц [236, с. 167]. Вейерштрасс долго болел и медленно поправлялся, всё больше времени уделяя научной работе.

В 1843 году гимназию в Дейч-Кроне проверял старший инспектор, который в своём отчёте высоко отозвался о Вейерштрассе. Благодаря этому Вейерштрассу немного повысили жалование (до 400 талеров в год), он был представлен к повышению в должности с переводом в католическую гимназию Браунсберга (Бранёво, Польша). Но прошло ещё 5 лет, пока это назначение состоялось.

Браунсберг. С осени 1848 года Вейерштрасс начал работать в католической гимназии Браунсберг (Бранево) в восточной Пруссии недалеко от Кёнигсберга, сейчас территория Польши. Условия там были гораздо лучше – была библиотека, директор поощрял научную работу. Вейерштрасс много работал над научными статьями, преимущественно ночами.

Однажды утром он не пришёл на урок, и пришедший за ним директор застал его сидящим при свете лампы и погружённым в работу. В 1850 году Вейерштрасс сильно заболел и два года не мог заниматься научными исследованиями. Его мучили сильные головные боли и головокружения, сопровождавшие его на протяжении 12 последующих лет.

В Браунсберге Вейерштрасс написал «Вклад в теорию абелевых интегралов» о проблеме обращения для гиперэллиптического случая, опубликовано в годовом отчёте гимназии Браунсберга в 1848/49 года. Работа содержала исследование по явному представлению абелевых интегралов посредством тета-рядов нескольких переменных. Но и этот сборник был не замечен.

Когда в 1851 году умер Гудерман, кандидатура Вейерштрасса рассматривалась в качестве его замены. Но Плюккер, мнение которого было решающим, сказал: «Вейерштрасс неизвестен мне даже по имени» [245, с. 11]. Правда, Вейерштрасс не узнал об этой утраченной возможности. Но будучи на летних каникулах дома, в Вестфалии, он смог прочитать отзыв Гудермана на свою выпускную работу со словами «Тем самым кандидат входит достойным образом в ряд увенчанных славой исследователей». Это вдохновило его на создание работы «К теории абелевых функций», которая была написана в 1853 году. В этой работе Вейерштрасс решает основную задачу, поставленную Якоби, об обращении абелевых интегралов первого рода. Он послал эту работу в журнал Крелле, где она была напечатана в 47 томе (1854).

Благодаря этой работе к Вейерштрассу пришло признание. Эта статья привлекла внимание математиков, получила высокую оценку Дирихле, и повлияла на судьбу Вейерштрасса. Карл Борхард (1817–1880), доцент Берлинского университета и ученик Якоби, специально приехал в Браунсберг, чтобы познакомиться с Вейерштрассом. Это стало началом их долгой дружбы. Затем Браунсберг посетила делегация из Кёнигсберга во главе с Ф. Ришело (1808–1875), учеником Якоби, чтобы вручить Вейерштрассу диплом доктора наук honoris causa. При вручении диплома Ришело сказал: «Все мы нашли в г-не Вейерштрассе своего учителя». Эти слова Вейерштрасс вспоминал как самые дорогие в день своего 80-летия, заметив: «Всё в этой жизни приходит, но слишком поздно» [60, с. 60]. Благодаря этому диплому Вейерштрасса назначили старшим преподавателем в школе Браунсберга.

Давид Гильберт в статье, посвящённой памяти Вейерштрасса, писал: «Решение якобиевой проблемы обращения, которую Вейерштрасс в этих работах дал впервые, и которая для любых абелевых интегралов сначала была дана Риманом, а потом другим путём проведена в лекциях самим Вейерштрассом, представляется мне одним из величайших достижений анализа» [340, с. 62].

Август Крелле состоял в министерстве просвещения консультантом по математическим вопросам, и в 1854 году в письме в министерство написал о только что появившейся работе

Вейерштрасса и о желательности предоставления ему подходящего места. Во втором письме 1855 г., уже незадолго до своей смерти, Крелле написал министру о необходимости поддержать выдающийся талант Вейерштрасса. Если Вейерштрассу не предоставить достойное место, «этот уже не совсем молодой и вследствие двойной нагрузки – учителя и исследователя – уже склонный к болезням человек рано погибнет, как это случилось с Абелем и Эйзенштейном. Но это была бы новая прискорбная потеря для математики. Ведь если имеется много выдающихся учителей, то редко появляются настоящие учёные, являющиеся учителями самой науки, т. е. учителями учителей» [176, с. 45]. Статья Вейерштрасса сразу же была переведена на французский и опубликована в 1854 году в 19 номере журнала Лиувилля.

1 февраля 1855 года сам Вейерштрасс обратился к министру с письмом, приложив к нему оттиски своих статей и сообщив об их одобрении: «Но чем дороже для меня это одобрение и чем больше оно побуждает меня приняться с удвоенным усердием за завершение начатых мною больших работ, тем болезненнее чувствую я, что шаткое состояние моего здоровья угрожает сделать это почти невозможным, если я останусь в моём теперешнем положении» [там же, с. 45]. После ещё нескольких писем, 29 сентября 1855 г. ему предоставили годовой отпуск.

Берлин. Смерть Гаусса в 1855 году повлекла много перемещений в университетах Германии. Дирихле покинул Берлин, чтобы занять его место в Геттингене, Куммер покинул Бреслау, чтобы занять место Дирихле в Берлине. Вейерштрасс надеялся получить место в Бреслау, но Куммер отговорил его, так как там пришлось бы читать только канонические курсы. Дирихле 19 мая1855 года написал письмо министру просвещения, прося за Вейерштрасса. Австрия предложила Вейерштрассу персональную профессуру в любом своём университете с жалованием 2000 гульденов. Вейерштрасс колебался. Куммер написал об этом Александру фон Гумбольду, и через три дня Вейерштрассу предложили место профессора в Промышленном институте Берлина с жалованием 1500 талеров в год (тогда талер равнялся 1,5 австрийских гульдена, к тому же в Австрии гульден быстро обесценивался). Вейерштрасс занял это место в июле 1856 года. Вскоре Вейерштрасс стал читать лекции и в Берлинском университете, сначала как экстраординарный профессор (по хлопотам Куммера), и был избран в Королевскую академию наук Берлина. Избрание в Академию давало профессору право выбирать и читать лекционные курсы по собственной программе. Вейерштрасс поселился в Берлине с двумя сёстрами, Кларой и Элизой, через два года к нему переехал овдовевший отец и прожил у него до своей смерти в 1869 г.

Вейерштрассу был 41 год. Он читал 12 часов в неделю в Промышленном институте и две лекции в университете, занимался научной работой, кроме того, были обязанности в Академии и рецензирование в журнале Крелле. Переутомление сказалось 16 декабря 1861 года, – во время лекции в университете Вейерштрасс упал в обморок. Он на год прекратил читать лекции в Промышленном институте, хотя числился в нём до 1864 года. Со 2 июля 1864 года он стал ординарным профессором университета вместо ушедшего в отставку Мартина Ома (1792–1872). Вейерштрасс читал лекции в течение 33 лет, до 1889 года, после чего начал заниматься подготовкой к изданию своих сочинений.

Сам он характеризовал эпоху 1864–1883 гг. как время общих усилий Куммера, Кронекера и своих, как стремление дать молодёжи в университете за два года «сформировать общую базу с очень большим веером самых важных математических дисциплин». Это было «блестящее созвездие трёх» [177, с. 123], Берлин стал центром, привлекавшим молодёжь всех стран к изучению новых разделов математики. Профессор прежде всего играл роль исследователя, а потом уже учителя.

Как сказал в 1869 году Г. Ганкель, после смерти Коши в 1857 году «княжество математики теперь бесспорно переместилось в Германию, и, хотя во Франции ещё есть энергичные ветераны, такие как Шаль и Лиувилль, но у них нет достаточного количества достойных последователей, способных конкурировать с немцами» [289, с. 29]. Именно создание национальной школы с сильными лидерами и многочисленными последователями и произошло в эпоху Вейерштрасса.

В течение 20 лет его совместная работа с Куммером, Кронекером и Борхардтом представляла собой дружелюбный союз (лига взаимного восхищения, как их называли), но с 1880-х годов отношения с обидчивым и тщеславным Кронекером стали портиться, на что Вейерштрасс жаловался в 1885 году в письме к С. Ковалевской: «чего мне не хватает всё больше и больше – дружественного сотрудничества с коллегами, основанного на согласии в принципах и искреннем взаимном признании. В нашем университете это в течение ряда лет нарушено, причины мне не вполне ясны. Одно лишь могу с уверенностью сказать, не я тому причиной.

Мой друг Кронекер, с которым у нас прежде было единодушие по важнейшим вопросам, а также и Фукс противодействуют мне: один сознательно и намеренно, другой – отчасти покоряясь авторитету первого, а отчасти недостаточно представляя себе значимость вопроса, о котором идёт речь. Нередко бывает так, что я на лекции доказываю какое-нибудь положение, которое на другой лекции признаётся неправильным и не выдерживающим критики» [15, с. 255].

Арифметический подход. Разработка теории функций XIX века была начата Гауссом, который владел всем кругом проблем, проработал их на полвека вперёд, но хранил всё в тайне, почти ничего публикуя и ни с кем не делясь. В 1798 году Гаусс написал работу по эллиптическим функциям, и положил её в стол, никому о ней не сообщая. Когда в 1827 году

Гаусс прочитал работы Абеля и Якоби, он был поражён совпадением не только идей, но манеры изложения и даже обозначений. Об этом свидетельствуют два письма Гаусса своим ученикам. Первое написано Г.Х. Шумахеру: «Результаты Якоби представляют часть моей собственной большой работы, которую я собираюсь когда-нибудь издать. Она будет представлять исчерпывающий труд на эту тему, если только небесам будет угодно продлить мою жизнь и даровать мне силы и душевный покой». Второе письмо Ф.В. Бесселю: «Господин Абель предвосхитил многие мои мысли и примерно на треть облегчил мою задачу, изложив результаты с большой строгостью и изяществом. Абель шёл тем же путём, что и я в 1798 г., поэтому нет ничего невероятного в том, что мы получили столь похожие результаты. К моему удивлению, это сходство распространяется даже на форму, а местами и на обозначения, поэтому многие его формулы кажутся списанными с моих. Но чтобы никто не понял меня неправильно, я должен добавить, что не помню ни одного случая, когда я говорил об этих исследованиях с кем-нибудь из посторонних» [25, с. 345-346].

К середине XIX века Коши разработал основные положения и структуру математического анализа: теорию пределов, представление о непрерывности, сходимости[93], обогатил теорию функций комплексной переменной интегральной теоремой и теорией вычетов. На аналитическую функцию он налагал только условие дифференцируемости. Произвольная функция могла быть представлена интегралом. В работах Коши наметилось два подхода к развитию теории функций: геометрический Римана, и арифметический Вейерштрасса. Подход Римана позволял наглядно представить свойства эллиптических функций, конформные преобразования. Подход Вейерштрасса был аналитичен, логически обоснован и позволял подняться на более высокие уровни абстракции, невозможные для геометрических представлений. Его разработка понятия числа, функции, непрерывности, точной верхней грани создавала базу для дальнейшего развития теории. «Функция для него – степенной ряд, «элемент функции», ограниченный кругом сходимости. Вне этого круга существует процедура аналитического продолжения. Всё, таким образом, базируется на теории рядов, основанной на арифметической базе. Это может быть распространено на функции нескольких переменных. Метод Римана есть прежде всего метод открытий, метод Вейерштрасса прежде всего есть метод доказательства» [97].

Вейерштрасс в своих лекциях, судя по конспектам, выводит большинство результатов из тождества Абеля [158, 48], как пишет М.А. Тихомандрицкий: «Отсюда он получает формы нормальных интегралов второго и третьего рода, соотношения, аналогичные Лежандровскому в теории эллиптических функций между периодами интегралов первого и второго рода, прим-

[93] Коши во многом гениально изложил и обобщил идеи Б. Больцано.

функции и выражение через них интегралов всех трёх родов, а также алгебраические функции, зависящие от той же иррациональности; отсюда, как простое следствие, теорему Абеля. Частный случай последней приводит к решению задачи Якоби, а именно, он выражает через новые переменные – значения сумм ρ интегралов первого рода, – суммы интегралов второго и третьего рода, и рассматривает частные производные по ним сумм интегралов второго рода; оказывается, что эти последние суть частные производные некоторой вспомогательной функции, через которую всё может быть выражено. Если эту функцию взять показателем степени числа *e*, то получается однозначная, конечная и непрерывная функция ρ новых переменных, обладающая свойствами, аналогичными свойствам Якобиевой Ѳ-функции. Вейерштрасс в заключение выводит её разложение в ряд. Таким образом теория Абелевых трансцендентных сводится к теории Ѳ-функций многих переменных самым натуральным, а не искусственным образом, как у других исследователей» [124, с. 45].

Его лекции, его концепция аналитической функции вызывали огромный интерес во всём мире и послужили началом целого ряда исследований. Количество опубликованных работ по общей теории функций резко возросло под влиянием лекций Вейерштрасса (хотя количество публикаций по абелевым функциям выросло незначительно).

Лекции. Основные результаты исследований Вейерштрасса содержались в его лекционных курсах, которые он не публиковал. Как писал Г.Э. Гейне: «Принципы г-на Вейерштрасса изложены непосредственно в его лекциях и косвенных устных сообщениях, в рукописных копиях его лекций, и имеют весьма широкое распространение, но они не опубликованы в авторской редакции под контролем автора, что мешает целостному восприятию» [23, с. 26]. Вейерштрасс считал, что передача научных знаний возможна только при непосредственном контакте с учениками, причём по материалам собственных исследований лектора, когда ученик посвящается в процесс поиска и обучается методам исследования. Этот «индивидуальный» метод создал сильную школу, учение Вейерштрасса распространилось по всей Европе.

Письмо Миттаг-Леффлера.19 февраля 1875 года Г. Миттаг-Леффлер, один из самых любимых и талантливых учеников Вейерштрасса, писал на родину шведскому профессору Хольмгрену: «Моим пребыванием в Берлине в научном отношении я очень доволен. Нигде не нашёл я так многого для изучения, как здесь. Вейерштрасс и Кронекер имеют необычайное для Германии свойство избегать, насколько возможно, печатных публикаций. Вейерштрасс почти ничего не печатает, а Кронекер печатает только результаты без доказательств.

В лекциях они излагают результаты своих исследований. Едва ли может математика наших дней показать что-нибудь, что может сравниться с теорией функций Вейерштрасса или с алгеброй Кронекера.

Вейерштрасс излагает теорию функций в двух- или трёхгодичном цикле лекций и строит на простейших и самых ясных понятиях полную теорию эллиптических функций и её приложения к абелевым функциям, вариационному исчислению и т. д. Его систему характеризует преимущественно то, что она полностью аналитична. Геометрию он применяет редко и, если это случается, только для иллюстрации. Это кажется мне несомненным преимуществом перед школой Римана, так же, как и Клебша.

В действительности, хорошо известно, что, исходя из теории римановых поверхностей, можно совершенно строго построить теорию функций и что геометрическая система Римана достаточна, чтобы выяснить до сего времени неизвестные свойства абелевых функций, но, с другой стороны, она недостаточна, чтобы выяснить свойства трансцендент[94] высшего порядка, – в противном случае элементы теории функций были бы введены также таким путём, который им полностью чужд <…>.

Другое свойство Вейерштрасса – он избегает всех общих определений и всех доказательств, которые относятся к функциям вообще. Для него функция есть степенной ряд, и из степенного ряда он выводит всё. Это, однако, кажется мне в высшей степени трудным путём, и я не убеждён, что, вообще говоря, нельзя к этому прийти так, как Коши и Лиувилль, из общих и вполне строгих определений.

Как Вейерштрасс, так и Кронекер отличаются полнейшей ясностью и строгостью доказательств. В то же время они унаследовали от Гаусса страх перед всяким видом математики при установлении основных математических понятий, и это даёт их выводам простоту и естественность, которые раньше едва ли вводились так систематически с такой высокой степенью строгости <…>.

С совершенно формальной точки зрения, по крайней мере, способ чтения Вейерштрасса ниже всякой критики и даже самый незначительный французский математик был бы сочтён с такой лекцией полностью неспособным как преподаватель. Однако если кому-нибудь удаётся после большой и тяжёлой работы привести лекцию Вейерштрасса к такому виду, в каком он её задумал, тогда всё становится ясным, простым и систематичным. Вероятно, этот удивительный недостаток формального таланта объясняет, что очень немногие из его многочисленных учеников понимают его полностью и что литература в развиваемом им направлении всё ещё так незначительна. Однако это не препятствует тому, что он пользуется почти идолопоклонническим почитанием» [254, с. 213-214].

Постепенно его лекции сформировались в цикл из четырёх семестров: два семестра «Введение в теорию аналитических функций», «Абелевы функции», «Вариационное

[94] Класс функций, невыразимых через известные.

исчисление и приложений эллиптических функций», который он читал до зимнего семестра 1889/90 года, его последним курсом было вариационное исчисление. Многолетняя работа над лекциями отражена в конспектах его учеников, позже вошедших в собрание сочинений Вейерштрасса. Это лекции 1868 г., записанные В. Киллингом, 1878 г., – А. Гурвицем и другие. Лекции по вариационному исчислению стали известны благодаря конспектам Г.Кобба (1892/93 г.) и диссертации Цермело (1894 г.). Ученики Вейерштрасса публиковали и своё изложение его лекций: Е. Коссак «Элементы арифметики» (1872) [352], по материалам лекций 1865/66)[95], В. Дантшер «Лекции по вейерштрассовой теории иррациональных чисел [219], С. Пинкерле «Опыт введения в теорию аналитических функций по принципам Вейерштрасса» (по записям лекций 1878 г.) [404], О. Бирман «Теория аналитических функций».

К. Каратеодори, внесший большой вклад в теорию вариационного исчисления, написал в «Немецкой литературной газете» в 1928 г.: «На протяжении поколения математики всех стран, занимающиеся вариационным исчислением, сожалели, что основополагающие открытия, которые сделал Вейерштрасс в вариационном исчислении, нельзя было найти ни в какой подлинной его публикации. Возможно, что это единственный случай с начала книгопечатания, когда идеи большого мастера, который революционизировал целую науку, только через подземные каналы доходят до сведения общества» [60, с. 140-141]. Лекции Вейерштрасса по вариационному исчислению содержали теорию как абсолютных, так и относительных максимумов и минимумов функций одной и нескольких переменных.

В курсе 1861 года уже содержится понятие непрерывности на языке ε-δ – решающий шаг в анализе; понятие окрестности, строгое определение бесконечно малой, определение производной в форме $f(x+h)-f(x)=f'(x)h+h(h)$, где $(h)=o(h)$. Но тогда у Вейерштрасса ещё не было теории иррациональных чисел. Есть только набросок: «Но существуют также величины, которые не выражаются через единицу и части единицы, к ним применяют форму бесконечных рядов» [36, с. 177]. Первые несколько лекций обычно были посвящены понятию числа и четырём операциям над числами.

Теория иррациональных чисел, использующая предельную точку, появилась у Вейерштрасса после 1872 года, когда понятие предельной точки как точки аккумуляции появилось у Ганкеля (1870) и было разработано Кантором, как точки, в окрестности которой находится бесконечно много точек данного множества.

Предельная точка уже есть у Вейерштрасса в записи лекций 1874 года, (конспект G. Hettner, с. 163–170). После того, как Кантор ввёл понятие открытого и замкнутого множества, в курсе Вейерштрасса 1874 года появляется δ-окрестность точки в R^n. Это привело к созданию

[95] В 1885 году переведено на русский язык И. Красовским и издано в Киеве [58].

Вейерштрассом своей концепции континуума [197, с. 396]. Там же Вейерштрасс вводит в теорию иррациональных чисел понятие точной верхней грани. Изложение теории обогащалось из года в год, что видно по конспектам лекций последующих лет [236].

С 1874 года Вейерштрасс разрабатывает понятие верхней грани множества [там же, с. 77], введённое Больцано в 1817 году. Вейерштрасс при этом пользовался методами вариационного исчисления.

Кантор создавал теорию множеств с 1872 по 1884 год. В его понимании континуум был связным совершенным множеством. Связность Кантор понимал так: множество T по определению связно, если для t и t' из T для любого $\varepsilon > 0$ в T существует конечное число точек $t_1, t_2, ... t_n$, таких, что все расстояния $tt_1, t_1t_2, t_2t_3, ..., t_{n-1}t_n, t_nt'$ не превосходят ε. Подмножество R^n определено по Кантору как континуум, если оно совершенно и связно.

Вейерштрасс нуждался в понятиях связности и континуума для приложений в области аналитических функций. В своих лекциях он рассматривал континуум как вполне связное совершенное множество. Понятие связности у Вейерштрасса иное, мотивированное задачами аналитического продолжения. Множества, рассматриваемые Вейерштрассом – это, как правило, счётные множества точек, исключённых из области определения функции (особые точки функции), или их дополнения. Если граница области представляет собой такое счётное множество, это препятствует аналитическому продолжению из внутренней части круга во внешнюю, так как аналитическое продолжение у Вейерштрасса производится с помощью *конечной цепочки открытых дисков*, каждый из которых имеет общую точку с предыдущим. *Вейерштрасс определял связность так: если в окрестности точки a содержится точка b, в окрестности точки b содержится точка c и так далее, то любая точка s, по которой мы можем перейти из a в c, называется связной или смежной с точкой a* [450, с. 71]. Это условие связности более сильное, чем у Кантора, где требуется только соединение для любого ε, конечной последовательности точек, каждая из которых удалена на расстояние ε от следующей. Посредством таких последовательностей можно проникнуть из внутренней области круга во внешнюю.

В 1883 году Миттаг-Леффлер писал Кантору по поводу обеих концепций: «Я вполне согласен с вашим определением континуума, но хотел бы, однако, сослаться на то, что Вейерштрасс называет континуумом «вполне связное точечное множество». Из моей работы будет следовать достаточность того, что такое вполне связное точечное множество имеет своё необходимое место в теории аналитических функций, и не может быть заменено на ваш континуум» [441, с. 114]. Миттаг-Леффлер проанализировал разницу в концепциях Кантора и

Вейерштрасса в 1883 году в письмах к своему ученику Э. Фрагмену, который продолжил исследование этой темы [403].

Вейерштрасс строго определил понятие непрерывности функции в окрестности точки x_0 на созданном им языке ε-δ. Им сформулированы свойства таких функций, а также свойства функций, непрерывных на отрезке: 1) Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на нём. 2) Функция, непрерывная на отрезке, принимает на нём наибольшее и наименьшее значения[96]. 3) Теорема о приближении функции: для любой действительной непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ существует последовательность многочленов $P_0(x), P_1(x), ..., P_n(x), ...$, равномерно сходящихся на $[a, b]$ к $f(x)$. Конструктивное доказательство этой теоремы дал С.Н. Бернштейн в 1912 г.

Задолго до *Фреше* и Хаусдорфа в лекциях Вейерштрасса формируется понятие связности, аксиоматика метрического и топологического пространства. Но эти понятия для него вспомогательные, они нужны для развития идеи аналитического продолжения и для вариационного исчисления, поэтому они отличаются от таковых же, создаваемых Кантором. Развитие этих идей повлекло создание М. Фреше и Ф. Хаусдорфом теории метрических пространств, теории функционалов в работах В. Вольтерра и Дж. Асколи [199].

Вводный курс *Вейерштрасса* содержал концепцию числа и функции на основе степенного ряда, понятия непрерывности и дифференцируемости, аналитического продолжения, аналитической функции нескольких переменных, в частности, подготовительная теорема Вейерштрасса о факторизации, и контурные интегралы.

Вейерштрасс вместе с Куммером вёл научный семинар для подготовленных студентов. В 1872 году этот семинар был посвящён геометрии Лобачевского, где Вейерштрасс ввёл свои неевклидовы координаты. Его аудитория собирала слушателей не только со всей Германии, но и со всей Европы, благодаря чему его идеи проникли в другие страны. В 1873/74 году он был избран ректором университета.

Вейерштрасс как лектор. Особенность *преподавания* Вейерштрасса заключалась в том, что он в своём целостном курсе сначала давал основания. Он рекомендовал вновоприбывшим слушать свой цикл с начала. Манера его чтения не была выразительной, – его дикция не была безупречной, он путал листы конспекта, смущался, мог воспользоваться зонтиком вместо губки; он импровизировал, ошибался, передоказывал свои теоремы, иногда закрывал глаза и задумывался. Но он излагал только свои результаты со своими доказательствами, так как, будучи академиком, имел право читать лекции по своей программе и со своими результатами. Вейерштрасс излагал теорию эллиптических функций на своих лекциях двояким образом: один

[96] Впервые эту теорему сформулировал Коши, а полное доказательство дал Гейне.

раз он исходил из интегралов – это тот курс, который, по-видимому, слушал Миттаг-Леффлер; другой раз – и этот курс был повторяем – он принимал за исходную точку теорему сложения.

По словам Шварца, он показывал математику как поле неоткрытых проблем.

Но вот Феликс Клейн отказался посещать его лекции, о чём потом сожалел. Клейн говорил, что Вейерштрасс «пользовался абсолютным и непререкаемым авторитетом, все его теории принимались его слушателями как непреложные нормы мышления. Его интеллектуальное превосходство скорее подавляло его слушателей, чем толкало их на путь самостоятельного творчества» [53, с. 327].

Как правило, на первых лекциях Вейерштрасса присутствовало много студентов, от 100 до 250 человек[97], а к концу цикла оставалось всего 5–7 человек, но это были уже глубоко продвинутые в математике студенты, способные к самостоятельным исследованиям. Более 100 бывших студентов Вейерштрасса стали университетскими профессорами.

Речь Вейерштрасса. Метод Вейерштрасса выражен им в речи, сказанной в 1873 году, когда он принимал обязанности ректора: «Успех академического преподавания основывается на том, что учитель непрестанно направляет учащегося к самостоятельным изысканиям. Это достигается тем, что учитель при изложении предмета самим расположением материала и выставлением руководящих идей показывает учащемуся тот путь, следуя которому зрелый и владеющий уже всеми исследованиями мыслитель доходит в правильной постепенности до новых результатов или до лучшего обоснования уже известных.

Учитель не упускает при этом случая указать на те границы, которые наука в то время ещё не переступила, а также упомянуть те пункты, исходя из которых возможно в ближайшем будущем ожидать дальнейшего развития науки. Он не отказывает также ученику в посвящении в ход своих собственных исследований, не скрывая при этом даже и сделанных промахов и испытанных разочарований. Правда, таким образом получаются не столь красочные, изящные и для умственно косных слушателей более понятные лекции (подобные, например, тем, которые излагаются большинством французских профессоров по вполне обработанным согласно установленной программе литографированным запискам, иногда даже поручаемым их ассистентам для прочтения).

В старинных мало читаемых сборниках научных учреждений, а также в обширной научной переписке учёных прежних времён заключается громадное количество научного материала, из которого всякий, кто сумеет, может вычитать многое побуждающее к собственной работе, попутно может и научиться многому полезному» [14, с. 1327].

[97] На лекциях Римана максимально было 13 человек.

В 1989 году вышло издание конспекта лекций Вейерштрасса, прочитанных в весеннем семестре 1886 года «Избранные главы по теории функций» [450]. Вейерштрасс читал 3 раза в неделю, приблизительно по 60 минут, с начала мая до конца июля[98]. Студенты записывали его лекции дословно, благодаря чему мы можем услышать прямую речь Вейерштрасса. На русском языке опубликован перевод нескольких лекций[99].

Издание трудов. В конце 1885 года Вейерштрасс, отметив своё 70-летие, попросил годовой отпуск и провёл весь 1886 год с сёстрами в Швейцарии. По возвращении он занялся изданием своих работ. С 1894 по 1927 год вышло семь томов. Первые три содержат опубликованные и неопубликованные работы Вейерштрасса. В четвёртом томе содержатся лекции по теории абелевых функций, в основном по записям лекций, сделанным Хеттнером и Кноблаухом (1875/76). Пятый том содержит лекции по теории эллиптических функций, шестой – лекции по применению эллиптических функций. Седьмой том вышел в 1927 году с лекциями по вариационному исчислению. В 1988 году вышли «Избранные вопросы комплексного анализа», содержащие лекции Вейерштрасса 1886 года. В 1975 году были опубликованы найденные Пьером Дюгаком в институте Миттаг-Леффлера в Швеции самые ранние записи лекций Вейерштрасса, читаных им в 1861 году в Промышленном институте и записанные 18-летним Г. Шварцем [236]. На русский язык А.П. Юшкевичем переведён небольшой фрагмент этих лекций [131, с. 188-192]. Если добавить [14] и [113], мы получим все тексты Вейерштрасса на русском языке. Пересказ некоторых работ Вейерштрасса есть в книге Кочиной [60].

Ученики. В 1871 году Германия воссоединилась в единое государство, что вызвало национальный подъём, стимулировавший научные исследования в математике, а затем в физике. Ведущую роль играли университеты Берлина и Геттингена. Огромен вклад не только в немецкую, но и мировую науку многочисленных учеников Вейерштрасса, не только тех, кто защищался под его руководством, но и непосредственно слушавших его лекции, либо признававших его влияние опосредованно.

Первым учеником Вейерштрасса был Лео Кёнигсбергер (в 1860 получил учёную степень), он продолжил исследования учителя по эллиптическим функциям и дифференциальным уравнениям. Понимая относительность этой классификации, назовём последователей и учеников Вейерштрасса, работавших в русле основных направлений его исследований, в хронологическом порядке: Л. Фукс, А.Н. Коркин, Н.В. Бугаев, К.Й. Томе, Г.А. Шварц, М.А. Тихомандрицкий, Э. Коссак, В.П. Ермаков, Г. М.Миттаг-Леффлер, Е.И. Золотарёв, Ф.Г. Фробениус, Л. Гегенбауэр, Ф. Клейн, С. Ковалевская, Ф. Шоттки, А.В. Васильев, К. Рунге, О. Больца, П.М. Покровский, А. Гурвиц, О. Гёльдер, М. Лерх, А. Кнезер.

---

[98] Раньше в течение года были два учебных семестра – зимний, продолжавшийся с первой половины октября приблизительно до февраля (в конце декабря были рождественские каникулы длительностью до двух недель), и летний, продолжавшийся с начала мая до конца июля.

[99] Синкевич Г.И. История понятия числа и непрерывности в математическом анализе XVII–XIX вв. СПб.: СПбГАСУ. 2016. 312 с.

В других направлениях, в том числе и создав свои собственные, работали П. Бахман, Н.В. Бугаев, Э. Лампе, Ф. Мертенс, С. Ли, Я. Люрот, Г. Кантор, В. Киллинг, Ф. Клейн, Ф.Г. Фробениус, Л. Гегенбауэр, А. Шёнфлис, А.В. Васильев, Д.Ф. Селиванов, К. Рунге, А. Гурвиц, Э. Гуссерль, О. Гёльдер, А. Кнезер, Г. Минковский.

Влияние Вейерштрасса распространяется и на учеников Эрмита: Г. Дарбу, А. Пуанкаре, Э. Пикара, Э. Гурса.

В Италии его идеям следовали Ф. Бриоши, Ф. Казорати, С. Пинкерле, У. Дини [109] и Дж. Пеано [186].

Софья Ковалевская. Софья Ковалевская (1850–1891) стала любимой ученицей Вейерштрасса. Приехав к нему в 1870 году, она уговорила его давать ей частные уроки, так как не была допущена к слушанию лекций в университете. Вейерштрасс, убедившись в её уме и подготовленности (она прослушала курс лекций по эллиптическим функциям у Кёнигсбергера в Геттингене, а также решила несколько предложенных Вейерштрассом задач), начал с лекций по гиперэллиптическим функциям. Дважды в неделю она приезжала к нему, один раз в неделю он приезжал к ней. В 1872 году он преподавал ей вариационное исчисление. Её благодарное внимание побуждало его к новым математическим размышлениям. Он называл свою ученицу единственным настоящим другом, а себя считал её духовным отцом. С 1884 года она преподавала в университете Стокгольма. К 1886 году относятся её успехи в исследовании вращения твёрдого тела вокруг неподвижной точки, за что в 1888 году она получила премию Парижской академии наук. На зимних каникулах 1890/91 года Ковалевская была в Берлине. Вернувшись в Стокгольм, она простудилась, заболела и умерла 10 февраля 1891 года. Ей был 41 год. Вейерштрасс был так потрясён смертью своей любимой ученицы, что близкие опасались за его жизнь. Он послал на похороны венок белых лилий с надписью на ленте «Соне от Вейерштрасса». Письма Ковалевской он сжёг, но сохранились и опубликованы его письма к ней [15].

Шарль Эрмит. Эрмит был лидером математиков Франции и считал себя учеником Вейерштрасса, о чём он писал 27 января 1882 г. Ковалевской: «Наш общий учитель – это г-н Вейерштрасс, и наши лекции в Сорбонне и Политехнической школе имеют главным образом целью изложить слушателям его труды и его великие открытия. К тому же и Вы, милостивая государыня, являетесь звеном симпатии между мной и великим геометром» [145, с. 654]. Ковалевская познакомилась с Эрмитом по совету Вейерштрасса в начале 1882 года, Вейерштрасс же советовал Ковалевской познакомиться с учениками Эрмита П. Аппелем, Э. Пикаром и А. Пуанкаре.

Магнус Гёста Миттаг-Леффлер. Швед Миттаг-Леффлер (1846–1927) был одним из самых ярких учеников Вейерштрасса. После окончания университета в Упсале в 1873–76 гг. он поехал совершенствоваться в математике за границей. В Париже он получил от Эрмита совет ехать к Вейерштрассу, слушателем которого и стал в 1874/75. Миттаг-Леффлер называл Вейерштрасса «своим великим учителем и отеческим другом» [441, с. 52].

Вейерштрасс писал Ковалевской 15 августа 1878 года: «Миттаг-Леффлер был для меня очень приятным учеником; наряду с основательными знаниями он обладает удивительными способностями к усвоению предмета и умом, направленным к идеалу: я уверен, что общение с ним оказало бы на Тебя стимулирующее действие» [15, с. 218]. Там же Вейерштрасс говорит о положении Миттаг-Леффлера в Гельсингфорсском университете: «Там идут дальше, чем где бы то ни было, в создании *национально-финской* математики, и так как за время пребывания там Леффлера в местных газетах в каждом семестре появляются передовые против математики Вейерштрасса, Леффлер допускает неосторожность, упоминая моё имя в своих лекциях и статьях чаще, чем это необходимо» [там же, с. 218]. Теорема Миттаг-Леффлера (1876) возникла как обобщение проблемы, поставленной и решённой Вейерштрассом. Своё название она получила в статье Вейерштрасса и была озвучена Эрмитом, когда он читал лекцию в Сорбонне [441, с. 51]. В письме от 16 декабря 1874 года Вейерштрасс писал Ковалевской, что в связи со своими лекциями размышляет об одной нерешённой проблеме: «Если произвольно берётся бесконечный ряд чисел $a_1, a_2, ..., \infty$, то спрашивается, всегда ли будет существовать такая целая трансцендентная функция одного переменного *x*, что при $x = a_1, a_2, ...$ она исчезает, а при любом другом значении нет? <…> Для утвердительного ответа на этот вопрос оказывается необходимым условие, чтобы, как только *n* превысит определённый предел, a_n по своей абсолютной величине было больше произвольно заданной величины» [там же, с. 51].

Вейерштрасс доказал и достаточность условия, представив искомую функцию в виде $\prod_{\nu_n} E\left(\frac{x}{a_{\nu_n}}\right)_{\nu_n}$, где ν_n – целое положительное, в частности $\nu_n = n$, а $E(x)_{\nu_n} = (1-x)\exp\left(x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{\nu_n}}{\nu_n}\right)$. Это *первичные множители*. Их открытие Пуанкаре считал главным вкладом Вейерштрасса в теорию функций. Статья Вейерштрасса «К теории однозначных аналитических функций» с этим и другими результатами была опубликована в 1876 году.

Высказанные в статье теоремы Вейерштрасс излагал ещё летом, читая лекции по введению в теорию аналитических функций. Среди слушателей был Миттаг-Леффлер и эти лекции побудили его поставить аналогичную проблему в случае, когда для функции рационального характера вместо нулей заданы «константы точек бесконечности» (главные части). В 1876 году он опубликовал два сообщения, содержащих так называемую теорему Миттаг-Леффлера о разложении мероморфной функции: «Для любой последовательности чисел β_n $(n=1,2,...)$, принадлежащей комплексной плоскости, не имеющей в ней предельных точек, существует мероморфная функция G с полюсами в точках β_n и только в этих точках, главные части которой в точках β_n совпадают с заранее заданными многочленами от $1/(z-\beta_n)$. При этом функция G может быть представлена в виде, вообще говоря, бесконечной суммы мероморфных функций, каждая из которых имеет полюс только в одной точке».

Итоги. Заслугой Вейерштрасса является создание строго обоснованных математического анализа, теории эллиптических и абелевых функций, вариационного исчисления. В этом русле им развита теория целых и мероморфных функций, дано каноническое представление целой функции, имеющей конечное или бесконечное количество нулей. В его системе эллиптических функций вместо трёх функций Якоби всего одна $\wp(u)$, самая простая. Вейерштрасс определил существенные особенности алгебраических кривых, которые не изменяются при бирациональных преобразованиях и которые теперь называют «точками Вейерштрасса». Вейерштрасс разработал не только теорию гиперэллиптических интегралов, но исследовал общие абелевы интегралы, зависящие от иррациональности.

В 1876 г. в статье «Теория однозначных аналитических функций» [449] Вейерштрасс доказал теорему: если $f(z)$ имеет характер целой рациональной функции в окрестности каждой конечной точки, то она может быть представлена в виде отношения двух целых функций. Там же введены первичные множители и сформулирована теорема: вблизи существенно особой точки c функция $f(x)$ может к любому заданному числу приблизиться сколь угодно близко; при $x=c$ она не имеет определённого значения. У нас она называется теоремой Сохоцкого-Вейерштрасса, так как на восемь лет раньше эта теорема была получена независимо друг от друга Ф. Казорати и Ю.В. Сохоцким [39].

Вейерштрасс показал возможность построить однозначную функцию по данным её нулям и однозначную функцию с данным числом особых точек.

Исследования Вейерштрасса распространились на случай функций многих переменных. Назовём *подготовительную теорему* Вейерштрасса, сформулированную в 1886 году в «Очерках учения о функциях»: Пусть $F(x, x_1, x_2, ..., x_n)$ будет аналитической функцией в окрестности начала; предположим, что $F(0,0,...,0)=0$, $F_0(x)=F(x,0,...,0)\neq 0$ и пусть p такое целое число, что $F_0(x)=x^pG(x)$, $G(0)\neq 0$. Тогда существует «избранный» полином $f(x, x_1, ..., x_n)=x^p+a_1x^{p-1}+...+a_p$, коэффициенты которого аналитические функции $a_j(x_1,...,x_n)$ в окрестности начала, и функция $g(x, x_1, ..., x_n)$, аналитическая и не равная нулю в окрестности начала, такие, что $F = f \cdot g$ в окрестности начала. Из подготовительной теоремы следует, что при $n > 1$ в отличие от случая одного комплексного переменного во всякой окрестности любого нуля аналитической функции находится бесконечное множество её нулей. Эту теорему Вейерштрасс включал в лекции с 1860 года, она была представлена в литографированном издании 1879 года.

Теория абелевых функций не была полностью завершена Вейерштрассом. Понятие *абелевых* функций, то есть 2*p*-периодических мероморфных функций *p* переменных, было введено Вейерштрассом на основе теоремы обращения Якоби. В 1869 году Вейерштрассом сформулирована фундаментальная теорема о том, что между *p*+1 абелевыми функциями с одинаковыми периодами имеет место алгебраическая связь, однако к доказательству он не пришёл [448]. В последующие десятилетия он возвращался к этой теореме, но без успеха, так как представление мероморфных функций усложнялось с повышением размерности. Теперь эта задача решена [176, с. 123].

18 июля 1872 года Вейерштрасс указал примеры непрерывных функций действительного переменного, которые ни для какого значения этого переменного не имеют определённой производной (Функция Вейерштрасса: $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, где a – произвольное нечётное число, не равное единице, а b – положительное число, меньшее единицы. Была создана как контрпример гипотезе Ампера).

В 1880 в работе “Zur Functionentheorie” он показал, что можно построить такой сходящийся ряд, который в разных областях будет представлять различные функции. Ряды и привели его к непрерывным функциям, нигде не имеющим производную.

Принцип Дирихле был так назван в 1851 г. в докторской работе Римана, студента Дирихле. Дирихле использовал принцип существования минимума в своих лекциях неявно, и не доказывал его. Вейерштрасс показал, что в некоторых ситуациях принцип неверен. Как показал Вейерштрасс, предположение о том, что среди допустимых функций должна существовать та, на которой интеграл должен принимать своё наименьшее значение, не является обоснованным с математической точки зрения. Риман, исходя из распространения электричества в проводнике, считал, что задача, которая «разумна физически», будет «разумна математически». Вейерштрасс в 1869 г. построил известный контрпример. Его идея была продолжена Чезаре Арцела в 1889 году.

Трансцендентность числа *e*. В 1882 году Ф. Линдеман доказал, что число e^{α} трансцендентно для любого ненулевого алгебраического α, а в 1885 году Вейерштрасс доказал более общее утверждение, носящее сейчас имя теоремы Линдемана–Вейерштрасса.

Традиции школы Вейерштрасса были плодотворны. Математический анализ в изложении Вейерштрасса приобрел канонический характер и распространился по Европе благодаря его ученикам и последователям.

Последние три года жизни Вейерштрасс провёл в инвалидном кресле; иногда слуга вывозил его в парк. Окружённый почитанием, он умер в Берлине 19 февраля 1897 года.

4.4. Особенности немецкой математической школы эпохи Вейерштрасса

Риман сказал, что французская математика – это математика вычислительная, в то время как немецкая математика – умозрительная и концептуальная. Военизированная подготовка государственных служащих, инженеров и артиллеристов во французских учебных заведениях сильно отличалась от провинциальной подготовки немецких университетов. Но реформа обрзования, начатая в начале XIX века Вильгельмом фон Гумбольдтом начала прриносить свои плоды. Недаром Бисмарк после победы во франко-прусской войне сказал, что Францию победил школьный учитель. В математике Германии прикладное направление развивалось наряду с обще-теоретическим, концептуальным. Объединение Германии в 1871 году дало стимул развития науки. Все социальные высказывания немецких математиков того времени (Ганкеля, Вейерштрасса) наполнены патриотизмом и энтузиазмом. Отсюда смелость в обращении к общим исследованиям. Ярким примером тому является Георг Кантор. Он считал прикладные науки второстепенными, для математики основную задачу определив как искусство не отвечать на вопросы, а как искусство ставить вопросы. Теория множеств, направленная сначала на теоретическое обоснование арифметики, сначала развивалась как теория точечных областей, но затем приобрела характер самостоятельной теории и стала фундаментом современной математики. Теория Кантора была настолько общей, что дала возможность формировать новые понятия, обусловленные внутренней логикой математики, её языка. Кантор был студентом Вейерштрасса, а он читал лекции студентам, показывая им материал как поле нерешённых проблем. Из школы Вейерштрасса вышло много крупных математиков, среди которых Э. Гуссерль, В. Киллинг, С. Ковалевская, М. Лерх, Г. Миттаг-Леффлёр, К. Рунге, Ф. Фробениус, Л. Фукс, Г. Шварц, А. Шёнфлис. Идеи и педагогические методы Вейерштрасса распространялись по европейским странам благодаря обучавшимся у него иностранным студентам.

Карл Вейерштрасс преподавал в Берлинском университете с 1856 года, создав сильную школу теории функций. Вейерштрасс не публиковал свои курсы лекций, не разрешал литографировать студенческие записи. Сейчас мы располагаем немногими записями таких лекций. Способ преподавания, устная передача идей своим ученикам постепенно создала огромную сферу влияния идей Вейерштрасса в Германии и за её пределами. Начинал Вейерштрасс как школьный учитель, ему приходилось вести занятия в провинциальных школах, где ученики были скромно одарёнными. Нужно было понятно объяснять, заинтересовывать и мотивировать школьников. Манера преподавания Вейерштрасса была слабо формализована, носила характер доверительной беседы. Значительная часть курса посвящалась введению на основе примеров (около 10 лекций), далее он постепенно переходил к более абстрактным понятиям и строгим определениям, всегда обращая внимание слушателей на проблемы. Именно под его влиянием Кантор в своей диссертации написал, что «Математика это не искусство решать задачи, а искусство ставить вопросы». Э. Гейне признавался, что написал свои «Лекции по теории функций» под влиянием Вейерштрасса. Не напрасно Вейерштрасс интересовался педагогическим методом Сократа, и даже написал статью об этом методе. Вейерштрасс читал лекции многолетними циклами, начиная с теории действительного числа и постепенно переходя к специальным вопросам. Правда, если на первых лекциях аудитория была многочисленна, к последнему году оставалось несколько человек. Но это были уже зрелые исследователи. Около сотни крупных математиков считали себя учениками Вейерштрасса.

Академик А.Н. Крылов, в переводе которого в 1918 году на русском языке была опубликована речь Вейерштрасса[100] при вступлении в должность ректора Берлинского университета, писал в предисловии: «После войны 1870–1871 года появилась поговорка, что Францию победил германский школьный учитель; теперешняя война показывает, что с тех пор сделал германский профессор. Германия, достигнув после французской войны единства, и первенствующего положения в сонме держав, поняла, что необходимо непрестанное усилие, непрестанная забота, чтобы его удержать. Она рано увидела, что незыблемой основой её могущества может быть лишь широкое развитие и правильно поставленная промышленность; основу же такой постановки промышленности она видела в широком распространении технических знаний, в свою очередь, имеющих своим прочным основанием общую науку, из которой они почерпнут методы и начала своего развития.

Без правильной постановки высшей школы широкое развитие науки невозможно. В своей речи великий учёный [Вейерштрасс] в образных, глубоко продуманных словах излагает

[100] Приношу благодарность Ю.С. Налбандян, доценту ЮФУ, за предоставленный материал.

преемственно выработанный германскими мыслителями взгляд на надлежащую постановку высшей школы, а вместе с ней и средней, которую высшая школа должна поднимать к своему уровню, а не принижаться к ней в угоду числу и ущерб качеству» [14, с. 1325].

Ученики Вейерштрасса, став профессорами, читали свои лекции по лекциям своего учителя – Шварц, Коссак, Ганкель, Пинкерле.

4.5. Петер Лежен Дирихле. Понятие равномерной сходимости, равномерной непрерывности и идея покрытий отрезка

В середине XIX века как внутренний инстумент при анализе строения областей начинает формироваться метод покрытий, и при его помощи развивается понятие равномерной непрерывности функции.

Современные формулировки. Функция $f: E \to R$ называется *равномерно непрерывной* на множестве $E \subset R$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1, x_2 \in E$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Лемма (Гейне-Борель-Лебег). В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок. Лемма Гейне–Бореля в современной форме была доказана Борелем в 1895 году для счётного числа покрытий, и Лебегом для произвольных бесконечных покрытий.

Зарождение и развитие новых понятий в истории науки – постепенный процесс. Иногда проходят десятилетия и даже века, прежде чем новый объект обретёт форму, получит название и обогатится содержанием. Этот процесс обусловлен общим развитием теории и потребностями практики.

Понятие равномерной сходимости зародилось среди многих других видов сходимости рядов, и формализовалось в работе Гейне. Кратко его история такова. В 1821 году Коши предположил: «Когда различные члены ряда являются функциями одной переменной *x*, непрерывными по отношению к этой переменной в окрестности определенного значения, для которого ряд сходится, то в этой окрестности сумма *s* ряда также будет непрерывной функцией от *x*» [209, с. 120], а в 1823 году предположил, что сходящийся ряд можно интегрировать [61, с. 221-222]. В 1826 году Абель показал, что первое неверно [157]. В 1842 г. Вейерштрасс ввёл определение аналитической функции как равномерно и безусловно сходящегося ряда (Лагранж вообще не писал о сходимости, а Огюстен Луи Коши и Абель писали только о безусловной сходимости), но его работа была опубликована только в собрании сочинений. Вейерштрасс не формулировал понятие равномерной сходимости, для него оно просто вытекало из леммы

Абеля. В 1849 году Ф.Л. Зейдель[101] [419] и Дж. Г. Стокс[102] [430] независимо друг от друга показали, что в окрестности точки разрыва ряд сходится сколь угодно медленно. В 1853 году Коши ввёл условие, при котором сходящийся ряд непрерывных функций сходится к непрерывной функции [212, с. 34-35]. В 1860-е годы Вейерштрасс в своих лекциях заметил, что необходимо наложить некоторое условие, чтобы ряд можно было интегрировать и дифференцировать[103], в 1866 появляется работа об условиях возможности интегрирования ряда W.L. Thomé [438]. В 1870 году Гейне сформулировал понятие равномерной сходимости ряда, дав этому понятию название, и показал, что такой ряд сходится к непрерывной функции и его можно интегрировать [329]. Подробнее см. Ф.А. Медведев [77], а также А.Б. Паплаускас [92].

Столь же постепенно развивалось и понятие равномерной непрерывности функции и сопутствующий ему метод покрытия интервалов. Это понятие возникло независимо у разных математиков в начале XIX века. В 1817 году Больцано для доказательства существования точной верхней границы использует покрытие области интервалами вида $\left(u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\ldots+\frac{D}{2^{m+n+..+r}},\ u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\ldots+\frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}\right)$ [9, с. 195]. У него же встречается понятие «точки с их перифериями», термин *Menge* - *множество* [8]. В рукописях Больцано 1830 года *Теория функций* (*Functionenlehre*) [181], оставшихся неизвестными до 1930 года, сравнивается различный ход функций и различные виды непрерывности. В *Теории функций* Больцано приводит более точное и современное определение непрерывности: «Если равномерная функция Fx одной или нескольких переменных составлена таким образом, что изменение, которое она претерпевает, когда одна из её переменных переходит от определённой величины x к другой величине $x+\Delta x$, уменьшается *ad infinitum* (неограниченно), когда Δx уменьшается *ad infinitum,* – если, при этом, Fx и $F(x+\Delta x)$ (последнее, по крайней мере, для некоторой величины приращения Δx и для всех меньших величин) являются измеримыми[104], и абсолютная величина разности $F(x+\Delta x)-F(x)$ становится и остаётся меньше любой данной дроби $\frac{1}{N}$, если взять Δx достаточно малым (и насколько малой мы бы её ни сделали): тогда я говорю, что *функция Fx непрерывна для величины x*, и это для *положительного приращения* или в *положительном направлении*, когда то, что только что было сказано, происходит для

[101] Несмотря на то, что указанный сборник датирован 1848 годом, он вышел в 1849 г. Зейдель, с. 37: «Теорема. Если имеется сходящийся ряд, который представляет собой разрывную функцию переменной x, отдельные члены которого являются непрерывными функциями, то можно в непосредственной окрестности точки, где функция имеет скачок, указать такие значения x, для которых ряд сходится так медленно, как хотелось бы».

[102] Работа Стокса была представлена в 1847, опубликована в 1849 г. На стр. 565 Стокс вводит понятие бесконечно медленно (infinitely slow) сходящегося ряда: The convergency of the series is here said to become infinitely slow when, if n be the number of terms which must be taken in order to render the sum of the neglected terms numerically less then a given quantity e which may be as small as we please, n increases beyond all limit as h decreases beyond all limit.

[103] Вейерштрасс высказывал эти идеи и раньше, в статьях 1841 и 1842 года, но опубликованы они были только в 1894.

[104] Конечными, то есть выражаются рациональным числом.

положительной величины Δx; для *отрицательного* приращения или *в отрицательном направлении*, с другой стороны, то, что было сказано, справедливо и для отрицательного значения Δx; если, наконец, названные условия выполняются как для положительных, так и для отрицательных приращений *x*, я просто говорю, что Fx непрерывна при значении *x*» (там же, §2). Далее, в §13 Больцано приводит теорему: «Только из того, что функция Fx непрерывна для всех значений своей переменной *x*, лежащих между *a* и *b*, не следует, что для всех *x* между этими пределами существует фиксированное число *e*, которое достаточно мало, чтобы можно было утверждать, что Δx никогда не должно быть меньше по абсолютной величине, чем *e*, чтобы гарантировать, что разность $F(x+\Delta x)-F(x)$ окажется меньше, чем $\frac{1}{N}$». Иными словами, непрерывная на открытом интервале функция не обязательно непрерывна на нём (Rusnock, P., Kerr-Lawson, A. Bolzano and uniform continuity. Historia Mathematica. 2005. 32. P. 303–311). В этой же работе Больцано с помощью своего метода дихотомии приводит первое построение непрерывной немонотонной ни в каком, сколь угодно малом промежутке своей области определения, т.е. нигде не дифференцируемой (§75). Но эта работа не была опубликована и осталась неизвестной математикам 19 века, хотя другие работы Больцано были известны [119], популяризировались такими математиками как Г. Ганкель [290], О. Штольц [431], философом Е. Дюрингом [242], который преподавал в Берлинском университете в годы обучения Кантора. По поводу избыточной популярности Больцано Кантор в своём Пятом мемуаре заметил: «применённый здесь[105] метод доказательства, который довольно трудно заменить на существенно иной, в своей основе очень давний. В Новое время мы находим его, между прочим, в некоторых теоретико-числовых исследованиях у Лагранжа, Лежандра и Дирихле, в «Курсе анализа» Коши (третье примечание) и в некоторых работах Вейерштрасса и Больцано. Поэтому мне кажется неправильным относить его главным образом или даже исключительно к Больцано, как это стало обычным в последнее время» [50б с. 107-108].

В середине XIX века использовалось разбиение отрезка на части, как это делают, например, Дирихле и Риман, для построения определённого интеграла. Устанавливая известное условие интегрируемости, Риман делит интервал (*a*, *b*) в котором производится интегрирование, на части δ_i и рассматривает общую длину (Gesammtgrösse, Gesamtgroße) тех интервалов δ_i, где колебание функции превышает некоторое малое число σ; здесь ещё нет этого понятия о мере в тесном смысле, но Риман делает ещё шаг к его установлению; он применяет свой признак к исследованию функции $f(x)=\sum_1^\infty \frac{(nx)}{n^2}$, которая делает разрывы для

[105] Речь идёт о методе вложенных отрезков.

всех значений переменных, равных $\frac{p}{2n}$, где p и n – числа взаимно простые. Здесь Риман ещё не включает *все* разрывы в некоторые интервалы; преследуя свою цель, он делает это только относительно тех точек $x = \frac{p}{2n}$, в которых разрывы > σ, и говорит, что общая длина таких интервалов может быть произвольно мала [101, с. 236-240]. При этом частичные интервалы не перекрывались. Другой тип разбиения, при котором части перекрываются, впервые появился у Больцано в 1817, и был необходим для характеристики непрерывности функции, а потом и степени её гладкости. Заметим, что понятие окрестности точки как открытого отрезка или открытой области впервые появляется в 1864 году у Липшица [376].

Дирихле, 1854 и 1858 гг. В 1854 году Дирихле читал в Берлинском университете *Лекции по теории простых и кратных определённых интегралов* [369], конспект которых был опубликован в 1904 году Г. Арендтом (1832-1915). Вот его вводная лекция (выделения в тексте согласно оригинала, рисунки из оригинального издания).

«Определение определенного интеграла основано на фундаментальной для анализа всей концепции непрерывности и однозначности функции. $y = f(x)$ есть непрерывная и однозначная или определённая функция *x*, если каждому значению x соответствует только единственное значение *y*, и если постепенное изменение *x* соответствует постепенному изменению *y*, т.е. если для фиксированного *x* разность $f(x+h) - f(x)$ с уменьшением h стремится к нулю. Таким образом равенство $y = f(x)$ графически определяет x как абсциссу, y как вертикальную ординату, тем самым они определяют кривую, чтобы обеспечить однозначность и непрерывность функции y, нужно, чтобы выполнялись два условия: 1) каждой абсциссе соответствует только одна ордината; 2) кривая должна быть связной, т.е. переход от одной точки к другой должен осуществляться без скачков, постепенно, и вся траектория образует континуум. Но если уравнение будет неоднозначным, когда одному *x* соответствует несколько значений *y*, мы тоже можем включить его в рассмотрение, если только выберем одну из различных ветвей. Непрерывность нужна для функции только в определённом интервале, чтобы быть оправданной, например, для всех значений x, которые лежат между пределами или экстремальными значениями $x = a$ и $x = b$, в то время как вне этих пределов $f(x)$ с обеих сторон, вполне может иметь произвольную структуру. Для непрерывности функции также будет требовать, чтобы все её значения были бы непременно конечны. Следует отметить, что в понятии функции $y = f(x)$ единственным условием является зависимость переменной y от переменной *x*, но ни в коем случае не требуется, чтобы выполнение условия непрерывности было математически определено. И это так, потому что во всём интервале мы пользуемся одними и теми же математическими операциями, которые в нём соблюдаются и сохраняются. Иными словами, кривая должна быть нарисована одним движением руки, либо состоять из дуг одной или даже нескольких аналитических кривых.

Фундаментальное свойство непрерывных функций. Пусть в **конечном** интервале от a до b дана непрерывная функция $y = f(x)$ от x, а в качестве **частичного интервала (субинтервала)** для двух произвольных значений x будем понимать любую часть оси абсцисс между a и b. Тогда всегда можно по любому сколь угодно малому ρ подобрать вторую пропорциональную ей величину σ такую, чтобы в любом частичном интервале (субинтервале) длиной $\leq \sigma$ функция y изменялась не больше, чем на значение ρ.

Чтобы доказать эту теорему, мы используем более удобное представление геометрической наглядности. Вы идете от начальных значений a в направлении конца b (с.5), не выходя за пределы, избегая того, чтобы величина $f(x)$ оставалась неопределённой, первый частичный интервал (субинтервал) определится таким значением c_1, для которого значение функции $f(c_1) - f(a) = \pm\rho$, а для меньших x отличается по абсолютной величине от первоначального $f(a)$ не больше, чем на ρ, где число ρ не произвольно, но зависит от характера, вообще говоря, в остальном произвольной кривой, чьи ординаты могут в ближайший момент вырасти или уменьшиться. Для каждого значения величины x, расположенного между a и c_1должно выполняться $|f(x) - f(a)| < \rho$; ибо в случае, если для таких x разность$= \rho$, то вы должны будете уменьшить первый частичный интервал (субинтервал) для меньших x, эта разность подавно нигде не будет больше, чем ρ, потому что тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ для предыдущего значения x она должна будет быть равна ρ. Точно таким же образом выберем, начиная от c_1, следующее значение c_2, чтобы впервые $f(c_2) - f(c_1) = \pm\rho$, а для всех значений x, лежащих между c_1 и c_2 выполнялось $|f(x) - f(c_1)| < \rho$, и так далее. Таким образом получается ряд значений $a, c_1, c_2, c_3, \ldots$, последовательность, и следующих в том же направлении к b от a, то есть возрастающих или убывающих в зависимости от того, как будет b>a, b<a. Но проблема в том, будет ли весь интервал от a до b заполнен **конечным** количеством значений, достигнем ли мы наконец **последнего** значения c_u, которое либо совпадёт с b, либо будет настолько близко к нему, что функция $f(x)$ между ним и b отличается от $f(c_u)$ менее чем на ρ. Допустим, что это не так, тогда бесконечный ряд промежуточных значений c, устойчивых [монотоннно] расположенных всегда между a и b, или совпадающих с b, сходится к некоторому числу C, причём более удалённые члены последовательности будут располагаться всё ближе и ближе к этому пределу. Поэтому для двух любых членов c_μ и $c_{\mu+1}$ (с. 6) бесконечной последовательности, хотя и должно выполняться условие (1) $f(c_{\mu+1}) - f(c_{\mu}) = \pm\rho$ независимо от μ, но с другой стороны, в силу непрерывности функции $f(x)$ при сколь угодно большом μ обе разности $f(C) - f(c_{\mu})$ и $f(C) - f(c_{\mu+1})$ должны уменьшаться, сколь угодно мало отличаясь от нуля, в любом случае оказываясь меньше, чем ρ или даже чем $\frac{\rho}{2}$. Но тогда это противоречило бы условию (1) в зависимости от отдалённости, отличие между этими двумя разностями будет $|f(c_{\mu+1}) - f(c_{\mu})| < 2\rho$ или $<\rho$. Поэтому интервал $b - a$ содержит лишь конечное число требуемых частичных интервалов (субинтервалов). Предположим, что самый малый из этих интервалов принимает абсолютное значение $= \sigma$. Рассмотрим внутри интервала между a и b два совершенно произвольно выбранных значения функции $f(x)$ и $f(x')$, так, что расстояние $|x' - x|$ должно равняться $= \sigma$, соответствующие значения их абсцисс x и x' попадают в либо в один и тот же, либо в два последовательно расположенных интервала.

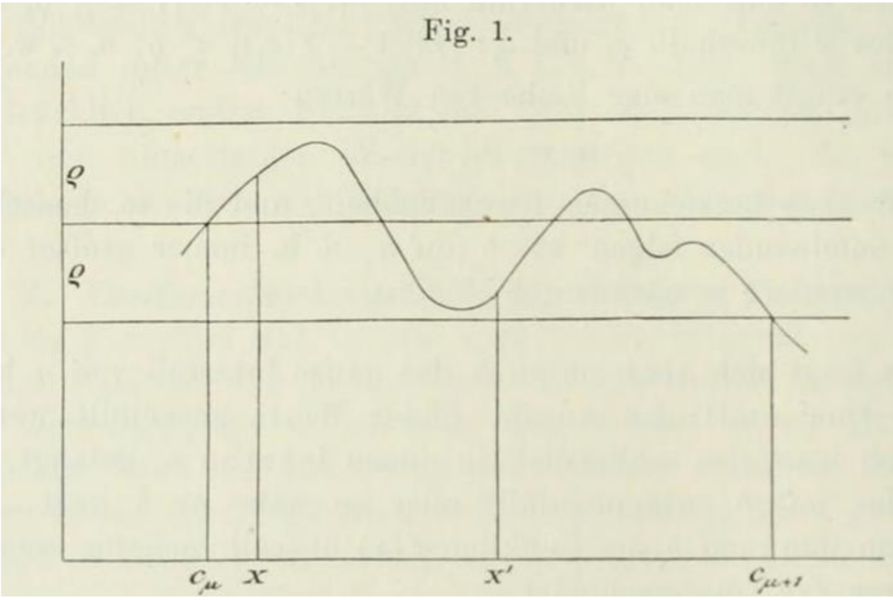

Рис. 1

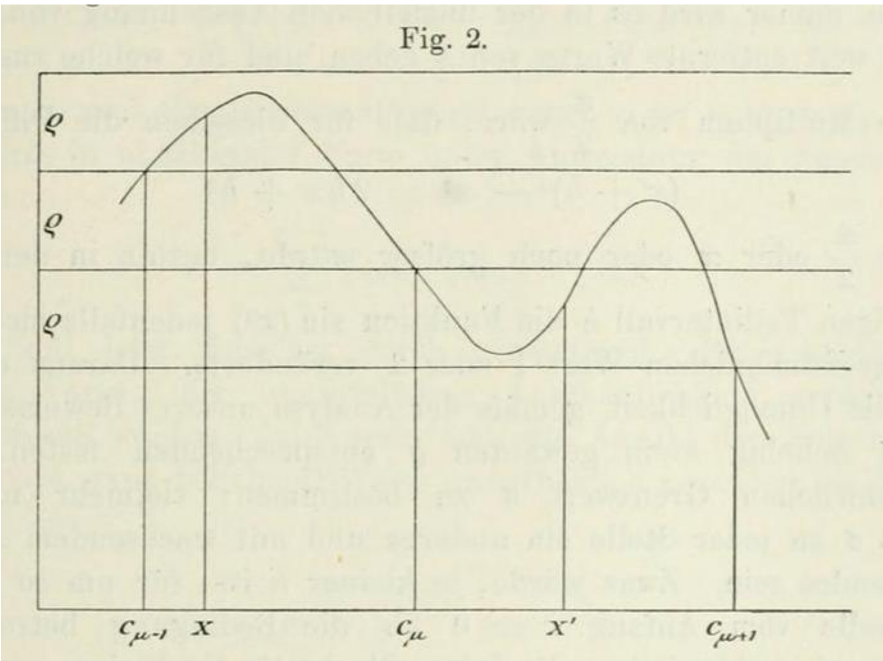

Рис. 2

Посмотрев на рисунки 1 и 2, вы немедленно убедитесь, что функция $f(x)$ сама даже в своём наибольшем изменении, как это видно на кривой, может измениться не более чем на 2ρ на первом рисунке, и не более, чем на 3ρ на втором рисунке. Таким образом наше утверждение полностью строго доказано. После, заменив эту новую выбранную произвольно малую ρ на $\frac{1}{3}\rho$, приняв её треть за новое ρ, мы ведь можем, естественно, выбрать новое произвольно малое и получить с тем же успехом ту же конструкцию для величины σ того же характера (происхождения), то есть что если x, находящийся между a и b, изменяется не более, чем на σ, то связанные с этим изменения функции $f(x)$ не превосходят ρ. Конечно, σ будет тем меньше, чем меньшее мы выбираем ρ, но она [т.е. величина σ] всегда является фиксированной при заданных значениях ρ и соответствует конкретному значению ρ.

Примечание. – Это свойство непрерывных функций на первый взгляд кажется настолько несомненным и не нуждающимся в доказательстве; но хотя оно оправдано с одной стороны тем, что по большей части это свойство (признак) присуще определённому интегралу, без чёткого понимания не может быть достигнуто обоснование теории; с другой стороны, это утверждение может выполняться только при установленных ограничениях, которые не всегда верны для бесконечного промежутка, даже если функция везде будет конечна и непрерывна.

Это можно видеть на примере функции $f(x)=\sin(x^2)$, всюду непрерывной и конечной от $x=-\infty$до $x=\infty$, периодически колеблющейся[106] между -1 и 1, и для каждой пары точек дуги x^2, отстоящих друг от друга на $\frac{\pi}{2}$, если эти точки совпадают с крайними точками квадранта, значения функции отличаются на ± 1. Так как h по-прежнему малая, но фиксированная величина, всегда бесконечное увеличение (расширение) от 0 до ∞, то для удалённых значений *x*, для которых x^2 будет кратным $\frac{\pi}{2}$, получится, что разность $(x+h)^2-x^2=2hx+h^2$ станет равна $\frac{\pi}{2}$ или π или ещё больше, следовательно, в соответствующем частичном интервале h функция $\sin(x^2)$ изменится на максимальную величину1 или 2. Отсюда, согласно анализу нашего доказательства, следует невозможность определить сколь угодно малое фиксированное ρ, соответствующее неизменному предельному значению σ; вместо этого σ в каждом месте иная и уменьшается с ростом *x*. Хотя в начальных интервалах от $x=0$ требуются меньшие h для того, чтобы условия определения ρ были выполнены, но даже уменьшая далее длины интервалов, мы не сможем прийти к такому наименьшему σ, что и завершает данное доказательство» [там же, с. 4-7].

Второй раз Дирихле обращается к этому свойству непрерывных функций в своих лекциях 1858 г., которые он читал в Геттингене. Дирихле отмечает, что непрерывные функции обладают важным свойством: «Если разность двух последовательных значений переменной не превышает некоторого произвольно малого δ, то разность соответствующих значений функции должна быть меньше, чем β, где β соответствует выбранной произвольно малой δ» [372, с. 3]. Строго говоря, Дирихле не обосновывает свои теоремы полностью, ибо в то время ещё не была доказана теорема о пределе ограниченной монотонной функции, не было обосновано понятие точной верхней грани, которые сформулировал в своих лекциях Вейерштрасс в 1870-е; не была разработана концепция действительного числа, появившаяся в 1870-е годы в работах Кантора и Гейне. Понятие иррационального числа и вычисление функции от такого числа в 1850-е годы ещё было неясным. Не было известно, как много иррациональных чисел на отрезке, как их упорядочить. Не было понятия плотности расположения чисел. Всё это ввёл Кантор в 1872-74 годах. Отличие между открытым и замкнутым интервалом было подвергнуто анализу Дю Буа Реймоном в 1882 году в *Allgemeine Functionentheorie* (он же ввёл там термин *пантахичный* – плотный).

---

[106] periodisch zwischen 1 und -1 hin und her geht.

Липшиц, 1864 г. Рудольф Липшиц (1832-1903), ученик Дирихле, продолжил исследования своего учителя относительно расширения условий сходимости рядов Фурье для случая бесконечного числа разрывов и экстремумов [376; 100]. Опираясь на работы Дирихле, Липшиц отдельно рассматривает три случая невыполнения условий Дирихле: если функции становятся бесконечными в интервале (этот случай рассмотрел сам Дирихле); если функции имеют бесконечно много точек разрыва; если функции имеют бесконечно много экстремумов. Рассматривая второй случай, Липшиц формулирует следующее ограничение: «когда функция $\varphi(x)$ имеет в конечном промежутке $(-\pi, \pi)$ бесчисленное множество точек разрыва, необходимо, чтобы, если мы обозначим через a и b два числа, находящиеся между $-\pi$ и π, возможно было найти между a и b такие другие два числа r и s, что функция $\varphi(x)$ остаётся конечной и непрерывной в промежутке (r, s). Отсюда после некоторых рассуждений вытекает, что и в этом случае можно разделить промежуток $(-\pi, \pi)$ на конечное число частных промежутков, эти промежутки, как и в первом случае, будут также двух родов» [376, с. 298]. Липшиц доказывает, что в точках непрерывности ряд Фурье сходится к самой функции, а в точках разрыва, которые Липшиц видит нигде не плотным, к среднему арифметическому. Третий случай, когда функция имеет бесконечно много экстремумов, Дирихле не рассматривал. Липшиц рассматривает три возможных случая распределения бесконечного множества точек максимума или минимума. «Первый: в произвольном конечном промежутке $(a, b) \in (-\pi, \pi)$ можно вставить два таких числа $r - \delta$ и $r + \delta$, что в $(r + \delta, b)$ и в $(a, r - \delta)$ будет конечное число максимумов и минимумов, а между $r - \delta$ и $r + \delta$ – бесконечное, как бы мало ни было расстояние 2δ между этими числами; второй: каковы бы ни были числа r и s, расположенные в (a, b) на конечном расстоянии одно от другого, число максимумов и минимумов в промежутке (r, s) никогда не будет конечным; третий: промежуток (r, s) состоит из конечного числа отличных от нуля промежутков, в которых имеет место первое или второе обстоятельство. В первом случае Липшиц говорит, что функция имеет колебание при $x = r$, во втором, – что она имеет колебание во всём промежутке (a, b), и в последнем, – что функция имеет колебание и в отдельных точках, и в промежутках конечной длины. П. Монтель отметил в примечаниях к этому сочинению, что у Липшица выступают три возможных случая: или производное множество от множества точек, в которых наблюдается максимум или минимум, имеет конечное число предельных точек, или оно всюду плотно, или данный промежуток состоит из конечного числа частных промежутков обоих родов.

Для доказательства основной теоремы Дирихле Липшиц разбивает промежуток $(-\pi, \pi)$ на конечное число промежутков, концы которых расположены в порядке возрастания и являются 1) значениями переменной x, для которой функция $\varphi(x)$ непрерывна; 2) значениями x, для которых эта функция имеет изолированные максимумы или минимумы; 3) значениями, в которых она имеет колебания; 4) концами отрезков, на которых функция имеет колебания; 5) отдельными значениями x, для которых разность $\varphi(x+\delta)-\varphi(x)<L\delta^k$. Здесь δ – любое из (a,b), L – некоторая постоянная, $0<k\leq 1$. При таком разделении интеграл Дирихле $\int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta$ разбивается на сумму интегралов, которые либо по первой теореме Дирихле, либо по второй теореме Липшица стремятся к определённым пределам, и отсюда получаются соответствующие выводы о сходимости ряда Фурье. Липшиц один из первых обратил внимание на различие между множествами, которые потом будут названы нигде не плотными, всюду плотными и приводимыми. Более слабое условие Липшица сформулировал У. Дини [229].

Ганкель, 1870 г. В 1870 г. вышла работа Г. Ганкеля «Исследование бесконечно колеблющихся и разрывных функций» [286]. Ганкель рассматривал конечные и бесконечные, всюду плотные (überall dicht) и нигде не плотные (nirgends dicht) множества точек. Он пытался доказать утверждение, что общая длина s интервалов, включающих точки последнего типа, может быть сделана произвольно малой. В 1875г. Г.Дж. Смит показал неправильность утверждения Ганкеля в том отношении, что существуют нигде не плотные несчётные области, для которых построение Ганкеля невозможно [425]. По Ганкелю, если область состоит из конечного числа точек, s составляется из интервалов, которые лежат около каждой из них; каждый их этих интервалов может быть сделан произвольно малым, следовательно, будет произвольно мала и s. Если число точек бесконечно, между ними, по определению нигде не плотной области, лежат ещё свободные интервалы; Ганкель делит весь отрезок на интервалы так, чтобы каждый из них охватывал одну из точек области, и чтобы они, вместе взятые, *заполняли весь интервал* (a, b). Если затем каждый из интервалов будет сведён до $\frac{1}{n}$ его части, при соблюдении первого условия, то остальная $\frac{n-1}{n}$ его часть (a, b) будет свободна от точек области. Таким образом s может быть сделана произвольно малой. Следовательно, полагал Ганкель, функция интегрируема по Риману, если она поточечно разрывна. Ганкель предполагал, что число точек области счётно (только в 1874 г. появляется работа Кантора, где вводится понятие счётности), и что около каждой точки области можно построить интервалы так, чтобы они не перекрывались, что возможно для неплотного расположения. Если покрывать интервалами предельные точки, то интервалы будут перекрываться. Конструкция Ганкеля построения интервалов около каждой точки области была продолжена впоследствии Борелем. В качестве примера Ганкель построил функцию, имеющую особенность в каждой рациональной точке [286, с. 19].

Вейерштрасс. Вейерштрасс создал стройное систематическое строго обоснованное изложение математического анализа. Ему принадлежит введение понятия непрерывности функции на языке эпсилон-дельта (1861), понятие ε-окрестности, требующееся для равномерной непрерывности, разработка концепции предельной точки в 1870-х годах, обоснование понятия точной верхней грани, теоремы о непрерывных функциях, разработка понятия равномерной сходимости рядов как условия интегрирования (Вейерштрасс использовал термин «сходимость в равной степени», *in gleichem Grade*). Благодаря Вейерштрассу, Куммеру и Кронекеру в золотое десятилетие 1870-1880-е годы в Берлине возникла дружеская атмосфера совместного творчества математиков, поощрения исследований математической молодёжи. Был определён широкий круг проблем в русле математического анализа, обсуждались все новые идеи. Большую роль в этом сыграл журнал Крелле. Неформальное общение было столь значительным, что во многих статьях авторы признаются, что идеи возникали в устных беседах, дополняя друг друга, и порой трудно определить, кто был первым. Но при этом научная порядочность и щепетильность авторов не подвергалась сомнению: во всех случаях, когда было возможно, приводились ссылки на предшествующие исследования других авторов. В 1870-е годы одновременно появляются концепции действительного числа и непрерывности числовой области Мере, Вейерштрасса, Гейне, Кантора и Дедекинда. Отсюда берёт начало теория множеств Кантора. Если работу француза Шарля Мере его соотечественники не поняли и оценили лишь столетие спустя, то немецкие математики работали хотя и самостоятельно – их концепции существенно различны – но в тесном взаимодействии друг с другом, в собеседованиях и переписке.

Гейне. Э. Гейне писал: «Развитие теории функций происходит в основном за счёт элементарных фундаментальных теорем, хотя некоторые результаты проницательные исследователи ставят под сомнение, ибо результаты исследований не всегда обоснованы. Я объясняю это тем, что, хотя принципы г-на Вейерштрасса изложены непосредственно в его лекциях и косвенных устных сообщениях, в рукописных копиях его лекций, и имеют весьма широкое распространение, но они не опубликованы в авторской редакции под контролем автора, что мешает целостному восприятию. Его утверждения основываются на неполном определении иррациональных чисел, в котором геометрическая интерпретация, а именно понимание линии как движения, часто приводит к заблуждению. Теоремы должны быть обоснованы с помощью нового понимания действительных иррациональных чисел, которые законно обоснованы и существуют, как бы мало они не отличались от рациональных чисел, и функция однозначно определена для каждого значения переменного, независимо от того, рационально оно или иррационально… Я не решался публиковать результаты, получившиеся в результате устного обмена мнениями, и содержащие прежние идеи других людей, прежде всего господина Вейерштрасса, на что мне остаётся всего лишь реализовать эти результаты, что крайне важно, дабы не оставлять неясных моментов в изложении. Отдельную благодарность я приношу г-ну Кантору из Галле за беседы, которые оказали значительное влияние на содержание моей работы, так как я позаимствовал у него идею общих чисел, посредством которых образуется ряд (A, § 1, определение 1). Мне кажется, в частности, это может быть применено в теории функций (B, § 2, лекция 1), благодаря первоначальному виду, по которому все числа (величины) определённо содержатся в бесконечном количестве названного становления. Основание, на котором мы закономерно вводим наши числовые величины, найдены здесь г-ном Кантором, позволяет также ввести отношение «больше», «меньше» и «равно» [333, с. 172-173].

Гейне был студентом Дирихле в 1838 году, когда последний был увлечён рядами Фурье и условиями их сходимости. Дома у Дирихле с 1834 г. был неформальный математический семинар, который Гейне, будучи к тому же родственником Дирихле, возможно посещал. По другим источникам, Гейне познакомился с Дирихле в 1840, вернувшись из Геттингена. Позже Дирихле стал его руководителем его докторской работы «О некоторых дифференциальных уравнениях» 1842. Мы не знаем, использовал ли Дирихле в годы обучения Гейне построение 1854 года, приведённое нами выше. Гейне, вводя понятие равномерной сходимости в 1870 году (журнал датирован 1869 годом, но в статье стоит ремарка 1870), пишет, что на возникновение идеи повлияла посмертно опубликованная Лиувиллем работа Дирихле [370].

В журнале Крелле 1869 г. выходит работа Э. Гейне «О тригонометрических рядах»[107] [329]. В ней Гейне формулирует определение равномерной сходимости ряда in gleichen Grade convergent (существовавшее с 1849 года в работах упомянутых математиков (Зайделя, Стокса) в слабо-формализованном виде) и вводит понятие равномерной непрерывности функции *gleichmäßig Continuität*. «До недавнего времени считалось, что неотъемлемым свойством сходящегося ряда, члены которого остаются конечными между пределами интегрирования, его равенство сумме интегралов отдельных членов, и только господин Вейерштрасс отметил, что это утверждение[108] требует доказательства, а именно то, что ряд в пределах интегрирования должен не только сходиться, но сходиться в той же степени (in gleichem grade convergire[109]). Вот это утверждение:

[107] Заметим, что, хотя журнал датирован 1869 годом, статья заканчивается словами «Галле, февраль 1870»).
[108] Имеется в виду единственность разложения функции в ряд Фурье.
[109] Термин принадлежит Гудерману, учителю Вейерштрасса.

Конечная функция $f(x)$ между $x=-\pi$ и $x=\pi$ может быть разложена единственным образом в тригонометрический ряд в виде

$$(\alpha.)\quad f(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\dots .$$

Эта формулировка теперь устарела, и в работах Дирихле, Липшица и Римана установлено, что функция от *x* во многих случаях имеет слишком общий характер в ряде вида (α.), эти коэффициенты допускают известное разложение, но только не относительно того, сколькими способами они могут быть найдены». Моё рассуждение продолжает исследование господина Кантора из Галле, я предлагаю расширить его на тот случай, когда совпадение в точках разрыва больше не требуется [там же, с. 353].

Ряд, состоящий из членов $g_1, g_2, \dots, g_m$ является сходящимся, если для любой заданной величины *n* для всех последующих значений *n*, сумма $g_n+g_{n+1}+g_{n+2}+\dots g_{n+m}$ произвольно приближается к нулю, не превышая заданного ε, какое бы положительное значение *m* ни задать. Последовательные члены ряда *g* изменяются в зависимости от *x*, значения которого должны пройти от α до β (включая α, β), так что ряд в этих пределах *сходится равномерно, если выполнен критерий сходимости для любого заданного ε, для всех промежуточных значений x;* выполняется для одного и того же *n*, если задавать другие значения ε. *В общем*, это означает, что за исключением окрестности некоторых точек, *сходящимся в равной степени* от α до β назовём ряд, для которого выполняется критерий равномерной сходимости на всей линии от α до β, после того, как исключены произвольно мелкие части, которые окружают упомянутые точки (там же).

В этой же работе впервые появляется термин равномерная непрерывность для функции двух переменных: «Дирихле, следуя Абелю в своей работе о биномиальном ряде установил теорему, в которой строго доказал, что предел степенного ряда для данной функции $c_0+c_1r+c_2r^2+\dots.$ $(r<1)$ при $r=1$ будет равен $c_0+c_1+c_2+\dots$, если последний ряд сходится, очевидно, что функция $(\beta)\quad f(x)=\frac{1}{2}a_0+r(a_1\cos x+b_1\sin x)+r^2(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\dots$ при фиксированном *r* вместе с *x*, при фиксированном *x* вместе с *r* до $r=1$ (вкл.) будет непрерывной. Но похоже, что он не заметил, что эти свойства, эта *непрерывность в каждой точке в двух направлениях,* совсем иная, нежели таковая же для функций с аналогичным выводом вроде тех, которые применяют к функциям одной переменной, и которые могут быть названы *равномерно непрерывными*, потому что они простираются равномерно по всем точкам во всех направлениях. *Функция двух переменных x, y равномерно непрерывна в области, если для сколь угодно малого заданного ε существуют величины* h_1 *и* k_1, *ни одна из которых не равна нулю,* *такие, что разность* $f(x+h, y+k) - f(x,y)$ *будет меньше, чем ε, пока* h *и* k *не превышают соответственно* h_1 *и* k_1*, и хотя это выполняется для данного ε и фиксированных* h_1 *и* k_1 *для любых точек* (x,y) *и* $(x+h, y+k)$*, они заключены внутри указанной области* [там же, с. 361].

Гейне, 1872 г. Гейне развивает эту идею в работе 1872 года «Лекции по теории функций» [333, 23]. Он вводит понятие подпоследовательности (*числовая последовательность* у Гейне, понятием которой, как он сообщает, обязан Кантору. Кантор использовал термин *фундаментальная последовательность*). На основе этого понятия Гейне строит теорию иррационального числа, непрерывности числовой области и непрерывности функции. «Функция $f(x)$, определённая на интервале (a,b), непрерывна в точке x_0 этого интервала, если для каждой последовательности x_n чисел интервала (a,b), формула $\lim x_n = x_0$ при n, устремлённом к бесконечности, влечёт за собой формулу $\lim f(x_n) = f(x_0)$ ».

На стр. 184 даётся определение равномерной непрерывности функции одной переменной: «**§ 3. Свойства непрерывных функций.** *Определение* 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* от $x=a$ до $x=b$, если она непрерывна для каждого значения аргумента, заключённого между a и b с включением значений a и b ; она называется *равномерно непрерывной (gleichmässig continuirlich)* от $x=a$ до $x=b$, если для любого сколь угодно малого ε найдётся такое значение η_0, что для любого положительного числа η, меньшего η_0 , $f(x \pm \eta) - f(x)$ не превосходит ε. Какую бы мы ни взяли величину x, только при условии, что x и $x \pm \eta$ принадлежат области между a и b, будет *обязательно* выполняться *то же самое* требование».

В самом конце статьи, на основе построенной им теории, Гейне приводит теорему о равномерной непрерывности функции:

Теорема 6. Если для всех отдельных промежуточных значений от $x = a$ до $x = b$ функция $f(x)$ одной переменной непрерывна, то она равномерно непрерывна.

Доказательство. Выберем произвольную величину 3ε, так что найдётся такое число, что начиная от $x = a$ будет выполняться $f(x) - f(a)$ абсолютно $\leq 3\varepsilon$. Значение, при котором достигается равенство, есть наибольшее, и при этом $f(x) - f(a) - 3\varepsilon = 0$. Обозначим его x_1. Аналогично можно найти x_2 в качестве наибольшего для того, чтобы от $x = x_1$ до $x = x_2$ всегда было $f(x) - f(x_1) \leq 3\varepsilon$. Так можно продолжить: придадим какому-то конечному числу n такое значение, чтобы $x_n = b$, или найдём, чтобы $f(x) - f(x_{n-1})$ от $x = x_{n-1}$ до $x = b$ не превышала *3ε*. Итак, утверждение доказано.

По-прежнему остаётся справедливым, что не существует такого *n*, при котором величины $x_1, x_2, \ldots$ образуют бесконечную последовательность, не превосходящую *b*. Это была бы числовая последовательность с пределом *X*; её характерным свойством то, что для каждого *n* выполняется равенство $f(x_{n+1}) - f(x_n) = 3\varepsilon$. Подберём теперь η_0, такое, чтобы $f(X)$ отличалось от $f(X - \eta)$ меньше, чем на ε, как только $\eta < \eta_0$. Между числами $X - \eta_0$ и *X* можно расположить указанную числовую последовательность $x_n, x_{n+1}, \ldots$ так что $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ будет меньше, чем 2ε, и с другой стороны, в то же время должно быть 3ε. Следовательно, основное предположение невозможно, и функция равномерно непрерывна. Галле, октябрь 1872 года» [там же, с 188].

Здесь мы видим, что при доказательстве этой теоремы, носящей теперь имя Гейне-Кантора, используется покрытие конечным числом интервалов, каждый из которых содержит хотя бы одну точку интервала. Этот вспомогательный приём и превратится потом в лемму о покрытиях. Первоначальную её схему мы видели в лекции Дирихле 1854 года. Но Дирихле обращался к геометрическому представлению, фактически к Эйлеровскому пониманию непрерывности. Для построения определённого интеграла в лекциях для физиков Дирихле было достаточно иметь кусочно-непрерывную функцию. Гейне заметил: «Но в самом деле недостаточная строгость определения иррациональных чисел заключается в геометрическом представлении, а именно в понимании линии как результата движения, часто неясного». Этим неясным вопросом, тревожившим математиков в предыдущие годы, был вопрос о поведении функции на отрезке между двумя близкими числами, хотя бы один из концов которого является иррациональным числом. Последняя теорема сформулирована как раз для того, чтобы рассеять эту неясность. В этой же работе Гейне первым высказал мысль, что некоторым множеством точек разрыва можно пренебрегать, но способов оценки величины или меры такого множества ещё не было. Теория Гейне (и равноправные ей теории Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса, созданные в те же годы) позволили строго обосновать свойства непрерывной функции. Более того, Гейне предназначал своё изложение новой теории для преподавания, для студентов, и мы до сих пор пользуется его подпоследовательностями, чтобы объяснить студентам понятие предела и основные положения математического анализа.

Подробная статья П. Дюгака «О переписке Бореля и о теореме

Дирихле–Гейне–Вейерштрасса–Бореля–Шёнфлиса–Лебега» [240], как это следует из названия, даёт позднюю историю названной теоремы, богатой именами. Рамки нашей статьи ограничены ранней историей этой теоремы. Отметим только, что упрёки Дюгака в адрес Гейне в том, что последний использовал построение Дирихле 1854 года, вызывают огорчение. Дюгак ошибочно датирует лекции 1852 годом [там же, с. 91], пересказывает доказательство современным языком. Он относится к методу покрытий как к моментально сформированному в лекциях Дирихле, не учитывая того, что пока не появилась концепция числа и непрерывности, Дирихле вместо строгих обоснований ограничивался апелляцией к наглядности. Как сказал Риман в 1854, «Те функции, на которые не распространяется исследование Дирихле, в природе не встретятся» [101, с. 234].

Поздняя история теоремы о покрытиях. Метод покрытия стал востребован как для анализа точечных областей, так и для зарождающейся теории меры. В 1878 г. У. Дини дал новое доказательство теоремы о равномерной функции [228, с. 47-48]. Дини утверждал, что это доказательство принадлежит Кантору, и известно ему из письма Шварца. В 1880 метод покрытий использует Вейерштрасс в «Zur Functionenlehre». В 1880 г. метод покрытий для определения равномерной непрерывности использовал И. Томе [437, с. 29-31]. В 1882 году С. Пинкерле использует метод покрытий [405, v.I, с. 67-68]. В 1895 году Борель в своей диссертации впервые сформулировал теорему о покрытиях для счётного случая[110]: «Если на конечном отрезке имеется счётный ряд интервалов такого рода, что каждая точка отрезка есть внутренняя точка по крайней мере одного из интервалов, то уже некоторое конечное число этих интервалов покрывает отрезок целиком, то есть так, что все его точки будут внутренними точками этого конечного ряда интервалов» [185, v.I, с. 280-282]. В 1903 году Борель отметил существенную разницу двух приёмов построения интервалов, одного – когда делится основной интервал на частные интервалы, причём закон деления не обусловлен той точечной областью, которая имеется в виду, и другого – когда исходным пунктом берутся данные точки и строятся интервалы около этих точек. До какой степени различны оба эти приёма, видно из следующего примера: если отрезок (0, 1) делить на части, то, каковы бы они ни были, на них будут лежать рациональные точки, и сумма частных интервалов с такими точками равна единице; если же строить отрезки около каждой рациональной точки $\frac{p_i}{q_i}$, то получится счётный ряд интервалов, на которых только и расположены такие точки; при этом сумма этих интервалов может быть сделана произвольно малой. Борель называет интервал $\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^2\sqrt{5}}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^2\sqrt{5}}\right)$ каноническим интервалом для дроби $\frac{p}{q}$. Теорему Гурвица (1891) можно перефразировать так: «всякое иррациональное число заключается внутри бесконечного множества канонических интервалов».

Отсюда следует, что каждое число интервала (0,1) будет внутренним для по крайней мере одного канонического интервала, число которых бесконечно. А в таком случае, по теореме

[110] Борель впоследствии неоднократно обращался к этой теореме в 1898 и в 1903, формулируя различные её варианты.

Бореля, можно бесконечным числом способов выбрать *конечное число* таких канонических интервалов, что каждая точка (0,1) будет лежать по крайней мере одного из них. В 1895 г. вариант этой теоремы для плоской области дал П. Кузен[111] [218, с. 22].

В 1900 году теорему о покрытиях сформулировал для бесконечного случая Шёнфлис [417, с. 51-52]. В 1902 году опубликован вариант этой теоремы В.Г. Юнга [458, с 387], благодаря которому появился термин *покрытие*, *overlapping*. В 1903 появилась формулировка теоремы для шаров Э. Л. Линделёфа [373, с. 697]. В 1902/3 году Анри Лебег в курсе лекций по интегрированию сформулировал теорему для несчётного случая (опубл. в 1904 [64, с. 97]. В 1904 появился вариант Веблена [442, с. 436-437].

Огромная подготовительная работа была проделана такими математиками середины 19 века, как Больцано, Коши, Дирихле, Риман, Липшиц, а окончательно сформулировали понятие равномерно непрерывной функции и её свойства Кантор и Гейне. К этому времени была создана теория множеств, зарождалась теория меры. Использование понятия производного множества стимулировало её развитие. Борель выделял те области, к которым применимо мероопределение. Лебег ввёл внутреннюю меру области. Появилась классификация точек на внешние и внутренние, классификация предельных точек. Развивалось исследование числовых областей и позже построение областей по заданным свойствам. Это привело к появлению конструктивной и дескриптивной ветвей теории функций. Метод покрытий, будучи сначала вспомогательным инструментом деления отрезка на части и суммирования тех из них, где функция имеет ограниченное колебание, превратился за сотню лет в важный инструмент анализа свойств функции. Этот феномен постепенного преобразования вспомогательного средства в самостоятельный результат широкого значения был известен ещё в Античности под названием поризм. Постепенное обогащение смыслами сопутствовало методу покрытий в истории анализа.

4.6. Генрих Эдвард Гейне. Лекции по теории функций

Научная биография. Генрих Эдвард (Эдуард) Гейне (1821– 1881) – немецкий математик, член-корреспондент Берлинской Академии наук, член Геттингенского научного общества. Коллега и во многом соратник Кантора. Представитель школы Вейерштрасса. Основные работы Гейне написаны в области теории потенциала, теории функций и теории дифференциальных уравнений. Мы расскажем о нём подробнее, так как на русском языке о нём написано очень мало.

[111] Кузен обращался к этой теореме и ранее, в 1893 г.

Генрих Эдвард Симон Гейне[112] родился в Берлине 15 марта 1821 в семье торговца и банкира Карла Генриха Гейне и Генриэтты Мартен, был восьмым из девятерых детей. Семья Гейне была в родстве с семьёй Мендельсон-Бартольди [433]. Таким образом, Гейне в 1831 стал родственником Петера Лежёна-Дирихле, женившегося на сестре композитора Феликса Мендельсона Ребекке. Сам Гейне часто упоминал, что является двоюродным братом поэта Генриха Гейне (1797– 1856), но по данным Института Генриха Гейне в Дюссельдорфе, это не так (заключение было сделано в первой половине XX века). В 1825 был окрещён в лютеранскую веру. Сначала получал домашнее обучение, затем учился в гимназии Friedrichswerdersche, а потом в гимназии Köllnische в Берлине, где уровень преподавания математики и естественных наук был выше, и которую закончил в 1838 году.

Осенью того же года Гейне поступил в университет Гумбольда в Берлине. После одного семестра в Берлине он в течение трёх семестров учился в университете Геттингена, где слушал лекции К. Гаусса (1777– 1855) и М.А. Штерна (1807– 1894) по теории чисел. Вернувшись в университет Берлина в 1840, Гейне слушал лекции П. Лежён-Дирихле (1805– 1859), лекции по геометрии Я. Штейнера (1796– 1863) и по астрономии Иоганна Франца Энке (1791– 1865), директора обсерватории. Ещё студентом он заинтересовался исследованиями К. Вейерштрасса (1815– 1897), Э. Куммера (1810– 1893), Л. Кронекера (1823– 1891) и К. Борхардта (1817– 1880), в течение всей жизни поддерживал контакты с этими математиками, неоднократно приезжая в Берлин. В 1842 окончил университет в Берлине, выполнив научную работу под руководством П. Лежёна-Дирихле. 30 апреля 1842 года Гейне представил свою диссертацию «О некоторых дифференциальных уравнениях» (De aequationibus nonnullis differentialibus). Экспертами были Э. Дирксен (1788– 1850) и М. Ом (1792– 1872).

Он называл своим учителем Лежёна-Дирихле, заинтересовавшим его вопросами анализа. Общение с этим и другими математиками Берлина, прежде всего с Вейерштрассом, Куммером и Кронекером сформировали направление его исследований.

После 1842 он провёл год (два семестра) в университете Альбертина в Кёнигсберге под руководством К. Якоби (1804–1851) и физика-теоретика Ф. Ноймана (1798–1895), участвуя в работе математического семинара вместе с Г. Кирхгофом (1824–1887), З. Аронхольдом (1819–1884) и Ф. Зейделем (1821–1896). Лекции читались не только на немецком, но и на английском и испанском языках. Сохранился конспект Гейне лекций по дифференциальным уравнениям, связанным с задачами механики. Этот курс был прочитан К. Якоби и Ф. Нойманном в зимнем семестре 1842/1843. В 1843 году в журнале Крелле выходит первая статья Гейне «О некоторых задачах, приводящих к уравнениям в частных производных» [294]. С 20 июля 1844 года он

[112] Биографический материал изложен по статье [265, 216, 445, 407 (I, III)], а также T. Anselma: E. Heilborn, in: Frankfurter Ztg., 1930, Nr. 849; A. Jacker, in: Der Schriftsteller 17, 1930, H. 11; Kosch, Lit.-Lex. (W); Lex. D. Frau (W).

работает приват-доцентом (т.е. внештатным преподавателем, как кандидат) в университете Бонна[113].

В 1845 году выходит его работа «К теории тяготения и теплоты» [295], в которой он использует уравнения Ламе. Одновременно с Ж. Лиувиллем (1809–1882), работавшим в Париже, Гейне установил связь между ньютоновским потенциалом и эллиптическими интегралами, определил второе независимое решение дифференциального уравнения Ламе, т.е. ввёл функции Ламе второго рода. В дальнейшем исследования уравнений Ламе продолжали Гейне, Ш. Пикар и Ш. Эрмит. Под влиянием Дирихле Гейне с 1846 года заинтересовался темой суммирования рядов, причём его первые статьи носят характер переписки с Дирихле [296, 297]. К влиянию Якоби можно отнести интерес Гейне к преобразованию рядов в непрерывные дроби [298].

В 1848 году Гейне стал экстраординарным профессором в Бонне.

В 1850 году Гейне женился на Софи Вольф, дочери берлинского купца. В счастливом браке родились четыре дочери и сын. Младшая дочь, Ансельма (Сельма) Гейне (1855– 1930), стала писательницей (псевдоним Feodor Helm) и опубликовала воспоминания об отце (1930). В 1905 она написала роман «Мать», посвящённый эмансипации женщин.

В Бонне Гейне пишет работы «Исследование рядов» [299], «Очерки теории эллиптических функций» [300], «Суммирование некоторых особых рядов» [301]. В последней работе Гейне обращается к исследованиям Гаусса 1811 года по сходимости тригонометрических рядов и рядов с дробно-рациональными членами.

В 1851 году выходит его статья «Теория притяжения эллипсоидов» [302], в 1853 работа о разложении алгебраических функций в ряды Эйзенштейна [303].

В 1854 году Гейне публикует четыре работы: «Исследование интегральной функции» [304], «Дальнейшее исследование интегральной функции» [305], «О разложении корней алгебраического уравнения в степенной ряд» [306], «Потенциал круглого диска» [307].

В 1855 году выходят «Дополнения к отчёту о потенциале круглого диска» [308], и «Прямое доказательство равенства двух определённых интегралов» [309].

Таким образом, к 34-летнему возрасту Гейне уже имел солидную базу по исследованию дифференциальных уравнений в частных производных, теории тепла, суммированию рядов, исследованию непрерывных дробей и эллиптических функций.

6 сентября 1856 года Гейне был назначен ординарным профессором университета Галле, в котором он проработал в течение 20 лет как преподаватель и исследователь.

---

[113] Ни экземпляра его диссертации, ни отзывов и документов, связанных с оформлением доцентуры, в архивах университета Бонна не сохранилось.

Сначала Гейне вёл курсы по теории потенциала с приложениями, по рядам Фурье и тригонометрическим рядам, по механике и теории теплоты. А. Вангерин (Wangerin, 1844–1933), поступивший в университет Галле в 1862, писал, что Гейне был очень хорошим преподавателем, его лекции отличала чёткость и результативность. Он всегда указывал студентам, что недостаточно читать учебники и пособия, нужно обращаться к первоисточникам.

Среди опубликованных им работ многие имеют методический характер, это курсы лекций по различным разделам. За все годы работы в университете Гейне прочитал лекции по курсам алгебры и теории чисел, аналитической механики, теории потенциала с приложениями, алгебраического анализа, определённых интегралов, рядов Фурье, тригонометрических рядов, теории теплоты.

Как исследователь, Гейне занимался преимущественно теорией потенциала, теорией функций и дифференциальными уравнениями.

В Галле он пишет «Переход от неопределённого интеграла к определённому» [310], «Приведение эллиптических интегралов к канонической форме» [311], «Письмо в редакцию о непрерывных дробях» [312], «Комментарии к трактату Якоби по вариационному исчислению» [313], «Формула инверсии Лагранжа» [314], «О биномиальном ряде» [315], «Письмо в редакцию о функциях Ламе» [316], «Некоторые свойства функций Ламе», «О числителе и знаменателе приближённых значений непрерывных дробей» [317].

В 1861 в Берлине выходит его книга «Справочник по сферическим гармоникам» [318]. Расширенные переиздания вышли в 1878 и 1881 годах, количество страниц составило 864 в двух томах, переиздано ещё раз в 1961 году. Здесь он предлагает новый термин – «цилиндрическая функция». Образцовое изложение и систематизация материала на многие годы сделала справочник основным в этой области.

В 1863 г. Гейне избирают членом-корреспондентом Берлинской академии наук и членом Геттингенского научного общества.

Его работы 1863–1864 годов – «Функции Ламе различных порядков» [319], «Теоремы Абеля» [320], «О некоторых определённых интегралах» [321], «Специальные функции Ламе первого рода произвольного порядка» [322], «О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка и о существовании и числе функций Ламе первого рода» [323].

Гейне был ректором университета в Галле в течение одного учебного года, с 12.07.1864 по 12.07.1865. Его инаугурационная речь была посвящена законам Ньютона [324]. Тогда же его семья купила собственный дом (Ecke Luisenstraße 1).

Публикуемые им работы имеют как исследовательскую, так и методическую направленность и способствовали его преподавательской деятельности. Лекции Гейне были интересны и доступны. Понятия предела, непрерывности и сходимости сопровождались неясностями даже для исследователей, а для студентов и вовсе были окружены туманом. Понятия эти объясняли Вейерштрасс на языке «ε – δ», и Гейне на языке подпоследовательностей (фундаментальных последовательностей). У Гейне был талант облекать новые концепции в понятную и педагогически удачную форму.

Гейне продолжал работать над проблемами анализа. Он занимался тригонометрическими рядами и чувствовал необходимость более тонкого анализа структуры числовой прямой и понятия непрерывности. Начиная с 1870 года, Гейне размышлял о сходимости рядов и об ослаблении степени общности, что привело его к введению понятия равномерной сходимости на компакте. Это отражено и в его последующих работах: «О непрерывных дробях» [325], «Сообщение о непрерывных дробях» [326], «Геометрический смысл сферических гармоник» [327], «Функции Фурье–Бесселя» [328], «О тригонометрических рядах» [329], где ради теоремы о единственности представления функции тригонометрическим рядом исследуется равномерная сходимость рядов Фурье. Историк математики Ф.А. Медведев отмечает: «Одним из интересных аспектов этой статьи Гейне является сознательно выставленный им принцип пренебрежения точечными множествами при рассмотрении различных вопросов анализа. Правда, он пренебрегал только конечными множествами, но сам принцип понимал достаточно широко. Так, вслед за определением равномерной сходимости Гейне ввёл понятие «вообще равномерно сходящегося ряда», т.е. такого ряда, который сходится на [α,β], если из [α,β] выбросить произвольно малые окрестности конечного числа точек [77, с. 356]; говорил он о «вообще непрерывной функции» [там же, с. 355]; три основные свои теоремы он сформулировал и доказал при соблюдении того же принципа; поведение ряда в критических точках его не интересовало, и он прямо указывал на это [там же, с. 356]»

В последующих работах «Переписка по вариационному исчислению» [330], «О некоторых условиях при доказательстве принципа Дирихле» [331, 332] Гейне продолжает попытки подвести прочный фундамент под теорию, уделяет большое внимание обоснованию фундаментальных понятий.

Гейне и Кантор. Большой заслугой Гейне было привлечение к работе в Галле Георга Кантора, 24-летнего преподавателя гимназии в Берлине. Именно Гейне внушил ему уверенность в своих силах и заинтересовал вопросами анализа, в частности, вопросами сходимости. Под влиянием Эдварда Гейне, друга и Коллеги, как называл его сам Кантор, интересы Кантора сместились в область теории функций действительного переменного. Кантор писал сестре 7 февраля 1869 года: «В Галле меня ожидает настоящее целостное поле деятельности, соответствующее моей работе, возможно, там я получу признание, и мои стремления найдут применение» [349, с. 19].

В 1869 году Кантор получил звание приват-доцента университета Галле и стал преподавателем математического семинара факультета искусств. Кантор проработал в этом университете всю жизнь. С 1872 по 1877 – экстраординарным профессором факультета естественной и общественной истории. С 1877 по 1913 – в должности ординарного профессора.

Совместные беседы Гейне и Кантора, а также начавшееся в 1870-х годах знакомство Кантора с Р. Дедекиндом (1831–1916), привели каждого из них к необходимости освободить понятия числа, предела, и непрерывности от физического и геометрического толкования, необходимости арифметизации континуума, созданию теории действительного числа, и подвели Кантора к созданию теории множеств.

1872 год ознаменовался выходом работ всех троих авторов на эту тему. Каждый из них предложил свою концепцию числа и непрерывности. И если работы Кантора «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов» [50, с. 9-17] и Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа» [27] переведены на русский язык, то работа Гейне «Лекции по теории функций» [333] до недавнего времени была неизвестна русскому читателю. В этой работе дано систематическое изложение основ анализа с позиции теории действительного числа, введено понятие равномерной непрерывности; в качестве вспомогательного средства используется метод, получивший впоследствии название леммы Гейне–Бореля. Работа полностью приведена в приложении.

В 1873 году Гейне пишет статью «Потенциал однородных групп» [334], в 1875 г. – «О постоянном электрическом токе в плоских пластинках» [335]. Это был год, когда Гейне хотел перейти в университет Геттингена, но его отвергли профессора. В 1876 году выходит его замечание о разностном методе Коши «Письмо в редакцию журнала Лиувилля» [336]. В 1877 году в связи с празднованием столетия Гаусса Гейне был награждён медалью Гаусса. В 1880 году Гейне публикует «Некоторые приложения расчётов Коши» [337], в 1881 году «О сферической функции $P_n(\cos y)$ при бесконечном *n*» [338].

Все годы своей работы в университете Гейне был популярен среди студентов, стимулируя своих слушателей к продолжению научной работы. Он был непременным и добросовестным членом высшей экзаменационной комиссии, проявляя к кандидатам симпатию и дружелюбие. Гейне руководил докторскими диссертациями Генриха Цуге (Züge) 1875 «О притяжении однородного эллипсоида», Карла Баера (Baer) «Равновесие и движение тепла в однородном параболоиде вращения». Он делал вводные доклады на абилитациях (защита права на чтение лекций) К. Неймана (Neumann) (1858), Г. Роха (1863), И. Томе и Г. Шварца (1867), Г. Кантора и Э. Юргенса (1869), Вильтайса (1881).

Гейне умер в Галле после тяжёлой болезни 21 октября 1881 года.

4.7. Понятие связности в математическом анализе XIX в. Кантор и Вейерштрасс

Топология ведёт свою историю с задачи о Кёнигсбергских мостах, поставленной и решённой Л.Эйлером в 1736 году [144, с. 336-340].

Первая работа, в которой топология получает своё название, была написана И.Б. Листингом в 1848 году [68, с. 119]. Листинг (1808–1882) был профессором Геттингенского университета, где преподавал Гаусс и где учился Риман. Как и Риман, Листинг уделяет основное внимание комбинаторным свойствам преобразований и ещё не мыслит область как точечное множество. В 1862 году Листинг продолжил комбинаторную топологическую тему в работе «Описание пространственного многообразия или обобщение теоремы Эйлера о многограннике» [377]. Это был ранний период развития топологии, ещё до появления работ Г. Кантора (1845–1918) по теории множеств.

Понятие связности у Римана. Понятие связности впервые появляется у Б. Римана (1826–1866) в диссертации «Основания теории функций комплексной переменной» (1851 год), в докладе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854 год) и в «Теории абелевых функций» (1857 год). Риман рассматривал пространство в реально-физическом смысле, а не как точечное множество; поверхность рассматривал как лист, разостланный по плоскости или над плоскостью [101, с. 52]; односвязной называл «кусок» поверхности, ограниченный замкнутой несамопересекающейся кривой. В «Основах общей теории функций одной комплексной переменной» 1851 года Риман писал: «Две части поверхности считаем связными, если из точки одной части в точку другой части можно провести кривую, принадлежащую поверхности; в противном случае две части поверхности называются несвязными или отдельно расположенными» [101, с. 54].

Понятие связности в работах Кантора. Топология получила новое направление с появлением теории множеств Кантора в период с 1872-1884 годов. Кантор начинал с анализа сходимости тригонометрических рядов и анализа точек на прямой, и в первых своих работах создал теорию точечных областей. Он ввёл понятие действительного числа на основании фундаментальной последовательности, развил понятие предельной точки, данное Вейерштрассом в 1865 году, на её основе создал понятие производного множества, а также и равномерной сходимости[114]. Затем он построил иерархию бесконечных множеств, что привело его к трансфинитным числам. Кантора интересовала природа континуума и многие его

[114] Одновременно с Э.Гейне, который уступал приоритет Кантору.

исследования приводили к топологическим результатам, например, вопрос о возможности взаимно-однозначного отображения двумерного континуума на область действительных чисел (1878 год). В период с 1879 по 1884 год Кантор опубликовал цикл из шести статей «О бесконечных линейных точечных многообразиях» [50, с. 40-139], в которых содержатся основные его результаты по теории множеств. Кантор определил множества первого рода, у которых n-е производное множество пусто, и все остальные – множества второго рода. Ввёл понятие плотности в интервале и показал, что множества первого рода нигде не плотны в интервале, показал счётность множеств первого рода и некоторых второго рода. Ввёл понятие изолированного множества, как не содержащего своих предельных точек, и доказал счётность изолированных множеств в R^n. В пятой работе Кантор ввёл трансфинитные порядковые числа и сформулировал гипотезу континуума, а также рассмотрел вопрос, о том, когда подмножество из R^n может быть названо «континуумом». Для этого он определил понятие совершенного[115] множества и связного точечного множества. Совершенное множество по определению совпадает со своим производным. Множество T по определению связно, если t и t' из T для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число точек $t_1, t_2, ...t_n$ из T, что все расстояния $tt_1, t_1t_2, t_2t_3, ..., t_{n-1}t_n, t_nt'$ не превосходят ε. Подмножество R^n определёно как континуум, если оно совершенно и связно.

В восьмидесятые годы XIX века в работах немецких математиков по математическому анализу появилось много новых результатов и понятий, которые нужно было привести к строгому единообразию. Как пишет Кетсиер, «Коши создал новый концептуальный аппарат, чтобы дать прочную основу существовавшего анализа, и в его математике функция всегда останется связана с формулой. Во второй половине XIX века концептуальный аппарат сам стал объектом исследования. Это произошло с обобщением понятия функции: она стала произвольным соответствием между числами» [199, с. 3]. В то же время теория действительного числа ещё была недостаточно развита – хотя имелись различные определения иррационального числа, но не было известно, как много иррациональных чисел по сравнению с рациональными числами[116], есть ли ещё другие, неопределяемые с помощью последовательностей числа, а главное, – как распределены иррациональные числа на числовой прямой. Теорема о равномерной непрерывности была сформулирована для функции, заключённой между двумя рациональными пределами. Вейерштрасс отдавал себе отчёт, что построение действительных чисел происходит умозрительно, «в мире наших мыслей», и стремился согласовать арифметическое понимание числа и общее понимание величины как

[115] Совершенным Кантор назвал множество, содержащее все свои предельные точки.
[116] Это показал Кантор в работах 1874 -1878 годов.

результата измерения геометрического или физического объекта. Наряду с увеличением значения понятия иррациональных чисел росла и критика расширения понятия действительного числа. Коллега Вейерштрасса по Берлинскому университету Л. Кронекер (1823–1891) резко выступал против теорий Вейерштрасса и Кантора, утверждая, что все числа должны быть выражаемы через натуральные и их отношения. Его резкие выступления как в публикациях, так и в коллегиальном кругу, и даже в лекциях для студентов, были направлены на необоснованность теории функций Вейерштрасса [53, с. 327]. Клейн рассказывает о переживаниях Вейерштрасса по поводу нападок Кронекера, изложенных в письме Вейерштрасса к С. Ковалевской 24 марта 1885 года. Видимо, желание защититься и продемонстрировать обоснованность теории функций в свете нового понимания действительного числа и вызвали у Вейерштрасса намерение прочитать дополнительный курс лекций, посвящённый основаниям анализа. Он осуществил это в 1886 году.

О лекциях Вейерштрасса 1886 г. Карл Вейерштрасс (1815–1897) читал лекции в Берлинском Промышленном институте и Берлинском университете с 1856 года. Он систематизировал курс математического анализа, ввёл понятие непрерывной функции на языке "$\varepsilon - \delta$"; многое сделал в теории действительного числа. Благодаря ему математический анализ приобрёл строго обоснованную форму. Он стремился упорядочить новые открытия, совершённые в семидесятые годы Шарлем Мере, Рихардом Дедекиндом и Георгом Кантором, Эдвардом Гейне, стремясь изложить их классическим языком и согласовав с традиционным представлением о числе как об отношении величин.

Именно для этого в летнем семестре 1886 года он читает специальный дополнительный курс, посвящённый базовым понятиям математического анализа. Лекции проходили три раза в неделю в мае–июне. Конспект этих лекций, сделанный его студентами, был издан относительно недавно, в 1989 году [450].

Вейерштрасс начинает курс словами: «Эти лекции составлены таким образом, чтобы дополнить лекции по теории аналитических функций зимнего семестра 1884/85. Та цель, которая имелась в виду, была достигнута, но более синтетическим методом, и некоторые результаты не получили желаемого обобщения, качество доказательств не было в полной мере удовлетворительным. Таким образом, представляется полезным после этих лекций рассказать о различных методах, лежащих в основании теории функций, проследить их исторически и критически, чтобы продемонстрировать различные точки зрения и попытаться их примирить. Короче говоря, показать тенденцию исторического развития математической науки, особенно в области анализа, и таким образом объяснить основные понятия науки. Нашей целью будет показать, что принципы математической науки основаны на действительно прочном фундаменте» [там же, с. 20].

Для обоснования представимости функции Вейерштрасс использовал понятие действительного числа, включавшее его собственное учение о числе как об агрегате (обозримой совокупности), то есть конечной или бесконечной десятичной (или иной) записи, которая в бесконечном случае есть абсолютно сходящийся ряд, отвечающем отношению равенства (эквивалентности для бесконечных представлений) и порядка.

Как и Дедекинд, Вейерштрасс разделяет физическую реальность и «мир наших мыслей», в котором формируется идея числа для описания чисел и функций, следовательно, можно расширить множество чисел с помощью предельного перехода. Отсюда следует, что любые длины могут быть представлены числами, но не всякому числу соответствует длина.

Для него конечны все величины, выраженные через пропорции (отношения), бесконечная числовая величина называется определённой, если задан каждый элемент составляющего её сходящегося ряда[117]. Каждому из слагаемых вполне упорядоченного ряда соответствует определённая точка, но только в случае абсолютной сходимости ряда[118]. Условием этого является равномерная сходимость. Тогда при любой перестановке членов ряда пределом будет являться одна и та же числовая величина, расширяющая понятие числа.

Вейерштрасс вводит понятие переменной величины, связывая с ним понятие предельной точки[119], и следуя Кантору, определяет иррациональное число как предельную точку рациональных чисел. Он приводит пример: «число *e*, состоящее из элементов $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots.$, это хорошо определённый ряд, который определяет конкретную числовую величину, тем не менее можно показать, что не существует рациональной числовой величины, которая равна ей по определению, что показывает, что числовая область рациональных чисел не полна[120]» [там же, с. 58]. Вейерштрасс решает эту проблему в аспекте аналитического продолжения функции.

Вейерштрасс обращается к теореме Больцано о точной верхней границе переменной величины[121], но подвергает сомнению, всякая ли числовая величина соответствует точке[122]. Для него вся совокупность положительных числовых величин шире, нежели вся совокупность всех возможных отрезков от *A* в направлении *AB*. Если числовая величина определена, то есть выражена абсолютно сходящимся рядом, ей несомненно соответствует геометрический отрезок.

---

[117] О сходимости ряда как о критерии существования числа говорил и Кантор в 1883 году

[118] Здесь Вейерштрасс критикует определение иррационального числа, данное Коши в 1821 году, как предела последовательности рациональных чисел.

[119] Понятие предельной точки, введённое Кантором в 1872 году, сразу же стало популярным у математиков, например, Г. Шварц написал о нём Улиссу Дини, который использовал его в своём курсе анализа [228].

[120] Иррациональность числа *e* была доказана в конце XVIII века (1776 год) И. Ламбертом, а его трансцендентность в 1873 году Ш. Эрмитом.

[121] В 1817 году Больцано формулировал эту теорему так: «Если свойство *M* не принадлежит *всем* значениям переменной величины *x*, однако, если оно принадлежит *всем* тем, которые *меньше*, чем известное *u*, то всегда существует величина *U*, являющаяся наибольшей из тех, о которых можно утверждать, что все *x*, меньшие, чем она, обладают свойством *M*» [56, с. 192].

[122] Кантор постулировал это как аксиому.

Например, в десятичной системе ряд $a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+....,\ 0\le a_k<10,\ k\ge 1$, может представлять на отрезке любую числовую величину, которая возникает в вышеприведённом выражении ряда как первая, вторая [частичная сумма] и так далее. Вычисляя частичные суммы, Вейерштрасс определяет таким образом бесконечно много числовых величин, в окрестности которых сгущено бесконечно много определённых точек, и без определённых точек можно образовать непрерывную последовательность. Таким образом, можно определить положение точки *D*, разделяющей отрезок на два непрерывных отрезка «так, чтобы оно как-то согласовывалось с нашим врождённым, естественным понятием предела, после чего мы можем представить себе, что прямая не ограничена ничем, кроме точек, так что можно предположить, что D представляет собой определённую величину».

Вейерштрасс создаёт концепцию числовой прямой с помощью абсолютно и равномерно сходящихся рядов, но ему необходимо обратиться к понятию сечения: «Должна быть одна и только одна точка отделения двух отрезков друг от друга, и этой точкой является рассматриваемая числовая величина». Он определяет сечение на отрезке как точную верхнюю границу частичных сумм сходящегося ряда. Но в отличие от Дедекинда Вейерштрассу для обоснования теории аналитических функций нужно понятие непрерывности *n*-мерного точечного многообразия, следовательно, он должен определить в нём окрестность и границу. Окрестность точки $(a_1,a_2,...,a_n)$, в которой находится бесконечно много определённых точек, Вейерштрасс определяет как *n*-мерный куб, $a_i-d<x_i<a_i+d,\ i=1,...,n$ при произвольно малом *d*. Тогда можно сформировать все возможные числовые комбинации *n* величин окрестности точки. Тогда по крайней мере в окрестности хотя бы одной точки вида $(x_1,x_2,...,x_n)$ существует бесконечно много определённых точек. Следовательно, окрестность точки $(a_1,...,a_n)$ n – кратного многообразия действительных переменных можно определить как $\sqrt{(x_1-a_1)^2+...+(x_n-a_n)^2}\le d$, а окрестность точки $x_k=\xi_k+\eta_k i,\ k=1,2,...,n$ *n*-кратного комплексного многообразия величин как $\sqrt{\sum_1^n(\xi_k-a_k)^2+\sum_1^n(\eta_k-b_k)^2}\le d.$

Отсюда следует возможность классифицировать все точки как определённые, если в каждой их окрестности бесконечно много определённых точек; в ином случае как граничные, или предельные (Grenzstelle).

Далее Вейерштрасс рассуждает по поводу определения континуума, связности и деления плоской области. Пусть для функции двух переменных областью определения является часть плоскости с некоторыми исключёнными точками. Тогда переход от одной неисключённой точки к другой возможен непрерывным связным путём. Можно выделить часть плоскости, содержащей этот путь. Вейерштрасс делает это с помощью цепочки областей, с помощью последовательности кругов, таких, что центр следующего круга лежит внутри предыдущего круга, а радиусы выбраны так, что все исключённые точки останутся снаружи.

Для случая, когда количество исключённых точек бесконечно велико, Вейерштрасс применяет другой приём и рассматривает пример: «исключённые точки лежат на окружности таким образом, что произвольная начальная точка в каком-либо направлении проецируется на дугу в u'; этот круг имеет единичный радиус, для $u'=2\xi\pi$, где ξ пробегает все рациональные значения от 0 до 1, несмотря на то, что множество устранимых точек не является непрерывной линией [тем самым устраняется определённая часть плоскости без точек, непрерывно расположенных на линии]. Внутри круга не содержится исключённых точек, возьмём какую-нибудь точку в качестве центра круга, все точки которого должны быть определены; можно убедиться, что его радиус не превышает определённого предела; вновь возьмём в круге новую точку и очертим вокруг неё круг, так же как вокруг первой точки. Можно сделать вывод, что если неограниченно продолжать эту процедуру, мы никогда не выйдем из внутренней области, через исключённые точки, ограничивающие круг, за пределы круга, подобно тому, как аналогично рассуждая, точка извне никогда не сможет попасть в круг. Таким образом, мы видим, что непрерывной последовательности точек недостаточно для разложения двумерного многообразия на части. Как мы видим из примера, даже априорно невозможно определить виды разложения плоскости на части»[123].

Как любезно прокомментировал это место у Вейерштрасса профессор Е. Медушевский, «предыстория связности у Вейерштрасса весьма интересна. Это понятие для современных топологов есть чистое свойство фигур и пространств, а для Вейерштрасса его исследование мотивируется стоящими перед ним задачами. Множества, рассматриваемые Вейерштрассом – это множества точек, *исключённых* из области определения функции (особые точки функции), или их дополнения. В данном примере множество точек $u'=2\xi\pi$ единичной окружности с рациональным ξ означает множество исключённых точек. Оно счётно, но достаточно для того, чтобы препятствовать аналитическому продолжению из внутренней части круга во внешнюю, так как аналитическое продолжение производится с помощью конечной цепочки открытых дисков, каждый из которых имеет общую точку с предыдущим. Это очень сильное условие связности, значительно более сильное, чем условие Кантора, где мы требуем только соединения для любого ε, конечной последовательности *точек*, каждая из которых удалена на расстояние ε

[123] Ещё в 1885 году Л.Е. Фрагмен доказал, что разложение плоскости возможно только с помощью континуума, а последовательности точек, то есть счётного множества, для этого недостаточно. – *Благодарю профессора Е. Медушевского за это замечание*.

от следующей. Посредством таких последовательностей мы можем проникнуть из внутренней области круга во внешнюю. Чтобы предотвратить такое свободное проникновение из области определения в дополнение множества исключённых точек, требуется множество, содержащее нетривиальные континуумы. Это как раз случай, описанный Фрагменом. Неизвестно, рассматривал ли кто-нибудь понятие связности в приложении к теории функций. Пожалуй, только Миттаг-Леффлёр был способен рассматривать связность как автономный инструмент в математическом исследовании функций[124]».

Вейерштрасс определяет замкнутое множество как множество точек, любая окрестность которых содержит бесконечно много определённых точек. Таким образом, для внутренней части круга вместе с окружностью каждая точка окружности определена и одновременно является граничной. Любое точечное множество *P* можно сделать замкнутым, добавив к нему его предельные точки. Вокруг точек, не принадлежащих ни к множеству, ни к его границе, можно описать круг конечного радиуса. Абсолютный радиус окрестности такой точки – это верхний предел радиусов всех её окрестностей. Его нижний предел не равен нулю. С помощью такого замкнутого множества *P* из *n*-кратного многообразия Вейерштрасс выделяет один или несколько континуумов.

С помощью построения ломаной линии, соединяющей две точки континуума, Вейерштрасс показывает, что если все звенья ломаной со своими окрестностями лежат в этом континууме, то он связен. Но во всякой точке ломаной линии радиус имеет конечное значение, иначе точка будет граничной. Следовательно, точки ломаной принадлежат точечному множеству *P*, таким образом, это множество может быть использовано для продолжения континуума.

Но теперь во всякой точке ломаной линии ρ имеет конечное значение, потому что иначе упомянутое место (точка) является предельной точкой для *A*, то есть принадлежит точечному множеству *P*, так что можно использовать его как любое продолжение континуума. Из всякой точки континуума можно попасть в те токи, которые принадлежат этому континууму.

Доказав это положение для плоскости, Вейерштрасс обобщает его на случай *n*-кратных многообразий. Он определяет линию как совокупность точек[125] $x_k = a_k + t\left(b_k - a_k\right),\ \left(k = 1,\ldots,n\right)$, где t – неограниченная действительная переменная. Если t принимает значения от 0 до 1, получаем отрезок *ab*. При $t > 1$ получаем продолжение отрезка за пределы *b*, при $t < 0$ –

---

[124] Личное сообщение от 07.05.2013.

[125] Gesamtheit der Stellen, геометрическое место точек.

продолжение отрезка за пределы *a*. Расстояние точки *b* до точки *a* равно $\sqrt{\sum_{1}^{n}(b_k - a_k)^2}$. Если оно равно *r*, тогда окрестность точки *a* радиуса *r* – это все значения $\sqrt{\sum_{1}^{n}(b_k - a_k)^2} < r$.

Используя неравенство треугольника $ax<ab+bx$, Вейерштрасс доказывает, что, если точки *n*-мерного многообразия *a*, *b*, *x* не лежат на одной прямой, то $\sqrt{\sum(x_\lambda - a_\lambda)^2} < \sqrt{\sum(b_\lambda - a_\lambda)^2} + \sqrt{\sum(x_\lambda - b_\lambda)^2}$. Он доказывает это вариационным методом, а именно, показывает, что выражение $\sqrt{\sum(x_\lambda - a_\lambda)^2} = R$ имеет в некоторой одной точке минимум, и в другой точке максимум, составив выражение $\sum(x_\lambda - a_\lambda)^2 - \varepsilon\sum(x_\lambda - b_\lambda)^2$. Доказанную теорему он использует в дальнейшем. На её основе Вейерштрсс вводит следующее определение: если в окрестности точки *a* содержится точка *b*, в окрестности точки *b* содержится точка *c* и так далее, то любая точка *s*, по которой мы можем перейти из *a* в *c*, называется связной (смежной) с точкой *a*.

Он показывает, что если *s* связано с *a*, то и *a* связано с *s*. Это означает, что исходя из любой точки континуума, мы всегда в нём и останемся.

Далее Вейерштрасс создаёт понятие границы континуума, то есть таких точек, в окрестности которых находятся как точки, принадлежащие континууму, так и точки, ему не принадлежащие. Совокупность таких точек Веерштрасс называет границами континуума. Например, на плоскости границей может быть одна точка, бесконечно много точек, расположенных дискретно; и непрерывный контур. Вейерштрасс доказывает, что помимо этого приведённого примера в континууме имеются границы; и что все они содержатся в замкнутом точечном множестве, с помощью которого определялся континуум.

Если добавить к незамкнутому континууму все предельные точки, то получим структуру, которую вправе называть замкнутым континуумом.

Все рассуждения Вейерштрасса направлены на создание аппарата обоснования теории аналитических функций, аналитического продолжения. Они ориентированы только на эти цели, и в то же время содержат начала новых идей функциональных пространств.

Дальнейшее развитие идей Вейерштрасса. Как мы видим, в этих лекциях Вейерштрасса уже заложены понятия измеримого множества, метрического и топологического пространства. Теорема о том, что каждое ограниченное бесконечное подмножество в R^n имеет предельную точку (которая понималась им иначе, нежели Кантором), рассматривалась Вейерштрассом для $n=2$ в курсе лекций 1865 года, общее доказательство было дано им в 1874 году. Но Вейерштрасс не выделял понятие предельной точки как базовое, это сделал Кантор в 1872 году, построив иерархию производных множеств. Лекции Вейерштрасса не публиковались, но идеи его расходились благодаря слушателям, студентам Германии, Италии и России. В Италии его идет продолжили Дж. Асколи (1843–1896), Ч. Арцела (1847–1912), У. Дини (1845–1918).

Идеи Вейерштрасса в Италии. Курсы математического анализа в Италии приводились в соответствие с достижениями немецких и французских математиков. С этой целью Ф. Бриоши, Э. Бетти, Ф. Казорати (неоднократно) ездили в Германию для встреч с Вейерштрассом, Куммером, Кронекером и другими математиками [186, с. 221]. Благодаря интенсивной переписке между Г. Шварцем, Ф.Казорати и У.Дини итальянские математики были в курсе всех математических новостей Германии. Лучшим в Италии считался курс Улисса Дини «Основания теории функций действительной переменной» [228], который он читал в университете Пизы с 1871 по 1915 год. Новые результаты Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда были включены в этот курс. В 1877–78 годах у Вейерштрасса обучался С. Пинкерле (1853–1936), и в 1880 году он начал читать в университете Павии курс «Теория аналитических функций по Вейерштрассу» (Teorica delle funzioni analitiche secondo Weierstrass), а позже издал его [404]. Так идеи Вейерштрасса распространялись в Италии.

В 1883 году В. Вольтерра начал создавать теорию функционалов, или «функций линий с действительными значениями». Эти функции рассматриваются как элементы множества, для которого могут быть определены понятия окрестности и предела последовательности. Вольтерра дал определения непрерывности и производной функции линии и попытался построить теорию функций линий аналогично римановой теории комплексных функций.

В 1884 году Джулио Асколи (1843–1896) распространил теорему Больцано–Вейерштрасса на множества функций. В 1889 году Ч. Арцела обобщил эту теорему и доказал, что равностепенно непрерывное множество F равномерно ограниченных функций на $[a, b]$ имеет предельную функцию.

Потом Чезаре Арцела рассмотрел непрерывные действительнозначные функционалы, определённые на равностепенно непрерывном множестве функций F и показал, что если F замкнуто, то есть содержит все свои предельные функции, нижнюю границу множества величин функционалов, то достигается верхняя граница и все промежуточные значения.

Теперь фундаментальная теорема Асколи–Арцела в анализе формулируется в терминах компактности, на языке, созданном Фреше в 1904 году.

М. Фреше, Ф. Рисс и Ф. Хаусдорф. В 1906 году Морис Фреше (1878–1973) в диссертации «О некоторых вопросах функционального исчисления» [260] ввёл понятие метрического пространства [там же, с. 30], формализованное в 1914 году Хаусдорфом, с аксиомами тождества, симметрии и треугольника.

Ф. Рисс (1880–1956) в 1908 году в докладе «Непрерывность и абстрактная теория множеств» [411] на IV Международном математическом конгрессе в Риме характеризовал континуум с помощью понятия предельной точки, удовлетворяющей трём основным аксиомам: каждый элемент, являющийся предельной точкой, подмножества *M*, является также предельной точкой всякого множества, содержащего *M*; если подмножество разделить на два подмножества, то каждая предельная точка является предельной точкой по крайней мере одного из них; подмножество, состоящее только из одного элемента, не имеет предельной точки. Для усиления Рисс добавил четвёртую аксиому: каждая предельная точка множества единственным образом определяется через совокупность всех его подмножеств, где она является предельной точкой.

Феликс Хаусдорф (1868–1942) окончил университет в Лейпциге в 1891 году, слушал лекции в университетах Фрайбурга и Берлина. Возможно, он был знаком с лекциями Вейерштрасса, прочитанными в 1886 году. Ещё в 1912 году Хаусдорф, читая лекции по теории множеств в университете Бонна, ввёл понятие окрестности U_x точки *x* как множества всех точек *y*, для которых $x \cdot y < \rho$, где ρ – положительное число, внутренность сферы радиуса ρ, $x \cdot y = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \geq 0$ – расстояние между точками *x* и *y*. Окрестность у него обладает следующими свойствами: Каждая U_x содержит x и содержится в *r* (где *r* – это любое *n*-мерное пространство, например, плоскость). Для двух окрестностей одной и той же точки $U'_x \supseteq U_x$ или $U_x \supseteq U'_x$. Если *y* лежит в U_x, то существует окрестность U_y, которая содержится в U_x ($U_x \supseteq U_y$). Если $x \neq y$, то существуют две окрестности U_x, U_y без общих точек [Хаусдорф Ф. рукопись 1912 г., Архив университета Бонна // Ketsier, van Mill. By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of Mathematics. – 43 p.]. В 1914 году Хаусдорф написал одно из первых систематических изложений теории множеств[126] и теории топологических пространств «Основания теории множеств» [293, на русском языке: 130], где ввёл понятие топологического пространства. В этой книге Хаусдорф пользуется понятием верхней границы, введённым Вейерштрассом.

Заключение. Понятие связности используется преимущественно в топологии [389]. Вейерштрасс, развивая созданный им метод аналитического продолжения, построил собственное, более сильное, чем у Кантора, понятие связности для нужд теории аналитических функций. Намерение Вейерштрасса обосновать и систематизировать современный ему математический анализ привело к созданию им новых направлений и понятий в анализе и топологии. Как говорил Вейерштрасс, «даже введение в математические науки требует

---

[126] Первым был Шёнфлис.

изучения различных проблем, что в первую очередь показывает нам значительность и состоятельность науки. Нужно иметь в виду, что конечной целью изучения оснований науки является стремление получить уверенность в справедливости исследования» [450, с. 20]. Вейерштрасс настолько глубоко проанализировал методы и понятия классического анализа, что его построения привели к понятию метрического и топологического пространства, на основе которых зародился функциональный анализ.

Нам известна ранняя история связности как путь идей Б. Больцано (1817) – Г. Кантор (1879–1883) – К. Жордан (1893) – Н. И. Леннес (1905–1911) – А. Шёнфлис (1904) – Ф. Рисс (1906) – У. Г. и Дж. К. Юнг (1906) – Ф. Хаусдорф (1914) [456]. Теперь имя Вейерштрасса займёт достойное место в истории развития понятия связности.

Автор благодарит профессора Е. Медушевского (Mioduszewski) за ценные замечания, высказанные при обсуждении этого параграфа.

4.8. Рихард Дедекинд и его метафизика

Биографический очерк. Дедекинд родился 5 октября 1831 года в Брауншвейге (Brunswick, Braunschweig), родине Карла Гаусса. Его семья была известной и уважаемой в городе. Отец, Юлиус Левин Ульрих Дедекинд, сын врача, был известным юристом, профессором колледжа Collegium Carolinum в Брауншвейге (этот колледж в 1795 году закончил Гаусс). Мать Дедекинда, Каролина Генриетта, урождённая Эмпериус (Emperius), была дочерью Иоганна Эмпериуса, профессора того же колледжа, впоследствии ставшего директором герцогского музея. После того, как наполеоновские войска разграбили музей, Иоганн Эмпериус в 1815 году поехал в Париж и добился возвращения экспонатов музея [428]. В семье было четверо детей, Рихард был младшим. Его брат Адольф стал председателем окружного суда в Брауншвейге, сестра Матильда умерла в 1860 году; другая сестра, Юлия, стала писательницей и поэтессой, с ней он прожил вторую половину своей жизни. В те времена квартиры профессоров были на территории университетов, и дети росли в академической атмосфере, среди картин и скульптур, слушая музыку. Рихард был очень музыкален, был превосходным виолончелистом и пианистом.

Рихард закончил гимназию Брауншвейга, увлекался химией и физикой, но в 1848 году, поступив в колледж Каролинум, стал заниматься математикой, так как хотел найти в ней логическую структуру естественных наук. Там он изучал элементы аналитической геометрии, алгебру, механику и анализ. В 1850 году поступил в Геттингенский университет (Georgia Augusta), где оказался подготовленным по математике лучше других студентов. Лекции читали В. Вебер, И. Листинг, М. Штерн, и изредка К. Гаусс. В университете существовал математический семинар для подготовки методистов учителей гимназий. На этом семинаре Дедекинд подружился с Риманом. Если Риман горячо интересовался практическими и экспериментальными занятиями, тяготел к вопросам математического анализа, Дедекинд был сосредоточен на теоретической науке, прежде всего алгебре и теории чисел. В Геттингене началась их долгая дружба, продолжавшаяся до самой смерти Римана в 1866 году. В 1857 году больной Риман провёл некоторое время в семье Дедекиндов в их летнем доме в Бад-Гарцбурге. Томас Сонар полагает, что Дедекинд употреблял термин «Mannigfaltigkeit» (многообразие, множество) в беседах с Кантором под влиянием его первого использования Риманом.

Весной 1850 года Дедекинд, как он вспоминает, прослушал элементы теории чисел в небольшом, но очень интересном курсе Штерна (Stern).

В зимнем семестре 1850/51 года Дедекинд посещал лекции Гаусса по методу наименьших квадратов. Краткий отчёт Гаусса содержит информацию об этом курсе, вот воспоминания Дедекинда, написанные в 1901 году:

«В начале следующего зимнего семестра я решил, что достаточно подготовлен, чтобы слушать его лекции по методу наименьших квадратов, и вооружившись журналом посещения лекций, не без сердечного трепета, я вступил в его жилище, где увидел его сидящим за письменным столом. Моё сообщение, казалось, мало порадовало его, я слышал также, что он не любил вести курсы; после того, как он написал своё имя в журнале, он сказал после некоторой паузы: «Возможно, вы знаете, что всегда очень неясно, состоятся ли мои лекции; где вы живёте? У парикмахера Фогеля? Хорошо, это удачно, так как он также и мой парикмахер, я уведомлю вас через него несколькими днями позже». Через несколько дней Фогель, личность, известная всему городу, весь преисполненный важностью своей миссии, вошёл в мою комнату сказать мне, что несколько других студентов тоже записались, и тайный советник Гаусс будет читать курс.

Нас было девять студентов, все мы были очень старательны, редко кто-то из нас пропускал, хотя путь в обсерваторию зимой бывал иногда неприятен. Аудитория, выделенная из служебного помещения Гаусса как прихожая, была очень маленькой.

Мы сидели за столом, длинные стороны которого были удобны для троих, но не четверых. Напротив двери у внешнего края сидел Гаусс, и когда все мы присутствовали, то те двое из нас, кто приходил позже, должны были плотно придвигаться к нему и класть тетради на колени. Гаусс носил лёгкую чёрную шапочку, очень длинный коричневый кафтан, серые брюки; обычно он сидел в удобной позе, смотрел вниз, немного наклоняясь и положив согнутые руки на колени.

Он говорил без записей, довольно легко, очень понятно, просто и отчётливо; но когда он хотел сделать особое ударение на новом пункте, он использовал особенно характерные слова, затем он внезапно поднимал голову, поворачивался к одному или другому сидящему радом с ним, и пристально смотрел на него своими прекрасными проникновенными голубыми глазами. Это было незабываемо. Если он возвращался к пояснению принципов развития математических формул, то он вставал и в величавой, очень прямой позе, писал на доске возле него своим особым красивым почерком; он всегда экономно и продуманно распределял весьма небольшое пространство доски. Для числовых примеров, тщательному завершению которых он придавал большое значение, он приносил с собой необходимые данные на маленьких листочках бумаги.

24 января 1851 года Гаусс закончил изложение первой части своего курса, в котором он познакомил нас с основами своего метода наименьших квадратов. Далее последовало исключительно ясное развитие основных понятий и важных теорем анализа и вероятностей, иллюстрируемых оригинальными примерами, которые служили введением во вторую и третью методику установленного метода, в который я должен был углубляться. Могу только сказать, что мы следили за ним с неослабевающим интересом в этих искусных лекциях, где уже были рассмотрены несколько примеров из теории определённых интегралов. Но нам, как и самому Гауссу, который сначала неохотно согласился читать этот курс, казалось, что он стал испытывать некоторое удовольствие, обучая нас. Конец наступил 13 марта, Гаусс встал, все мы были вокруг него, и он отпустил нас с дружескими прощальными словами: «Мне остаётся только поблагодарить вас за большое старание и внимание, с которым вы слушали мои лекции, возможно, изложенные слишком сухо». Полвека прошло с тех пор, но эти так называемые сухие лекции навечно остались в моей памяти как самые лучшие из всех, что я когда-либо слушал» [344, 243].

В следующем семестре Дедекинд снова слушал лекции Гаусса по углублённой (расширенной) геодезии. В 1852 году, всего лишь после четырёх семестров, он завершил свою докторскую работу под руководством Гаусса, став последним из его студентов, написав диссертацию по теории интегралов Эйлера. Гаусс свидетельствовал, что Дедекинд очень много знал и был самостоятелен, вдобавок имел «благоприятные многообещающие виды на будущее».

По окончании Геттингенского университета Дедекинд не выполнил достаточных требований для получения права на работу (хабилитация), поэтому он провёл ещё два года, заполняя пробелы, и квалифицировался как приват-доцент через несколько недель после Римана. После того, как в 1855 году в Геттинген приехал Дирихле (1805-1859), чтобы после смерти Гаусса занять его место профессора высшей математики, Дедекинд посещал его лекции по теории чисел, теории потенциала, неопределённым интегралам и уравнениям в частных производных. Влияние Дирихле на Дедекинда было огромно, Дедекинд признавался, что общение с Дирихле сделало его новым человеком. Вскоре между ними завязались тесные дружеские отношения, и он вошёл в круг знакомств Дирихле. Жена Дирихле, Ребекка, была сестрой композитора Феликса Мендельсона. Их дом был всегда открыт для гостей, которые собирались поговорить о литературе и музыке. Приходили известные музыканты и композиторы, в том числе Брамс. Гости часто музицировали, Дедекинд как виолончелист и пианист был желанным участником. Светские друзья семейной пары Дирихле иногда сожалели, что такая талантливая и обаятельная женщина, как Ребекка, вышла замуж за простого математика.

Интересы Дедекинда постепенно сместились от эллиптических и абелевых функций к теории Галуа, он первым начал преподавание его теории в Геттингенском университете (его лекции слушали всего два студента). На следующий год он вновь читал этот курс для двух студентов, а в 1856 году одному слушателю. Тогда жалование преподавателя зависело от количества студентов, записавшихся на его лекции, Дедекинд был вынужден обратиться к герцогу Брауншвейгскому за вспомоществованием, его ходатайство было удовлетворено [428, с. 65]. В 1858 году Дедекинд по рекомендации Дирихле[127] принял приглашение в Технический университет (Политехник) Цюриха на должность профессора математики. Обучая будущих инженеров, он впервые пришёл к мысли о недостаточном обосновании арифметики для нужд математического анализа.

В 1859 году он вместе с Риманом совершил поездку в Берлин, где встречался с Вейерштрассом и Куммером.

В 1862 году в его родном Брауншвейге колледж Collegium Carolinum был преобразован в Технический институт (сейчас Технический университет Брауншвейга), Дедекинд вернулся туда и преподавал в нём до 1894 года, отклоняя приглашения в другие университеты. В 1872 году он стал первым президентом расширенного технического университета Брауншвейга. Он никогда не был женат[128] и прожил остаток своей жизни с матерью[129] и со своей незамужней сестрой Юлией. Дедекинд избирался членом Берлинской (1880), Римской и Французской (1900) Академий наук. Он получил докторские степени в университетах Осло, Цюриха и Брауншвейга. Известно, что скромность и научная молчаливость Дедекинда привела к тому, что в 1904 году «Математический календарь» опубликовал сообщение о смерти Дедекинда, якобы случившейся 4 сентября 1899 года. В письме редактору Дедекинд написал: «По моим собственным наблюдениям я в тот день был вполне здоров и вёл оживлённый разговор о теории множеств с моим гостем и уважаемым другом Георгом Кантором (из Галле), который в связи с этим нанёс мне смертельный удар, но не мне самому, а сделанной мне ошибке» [362].

---

[127] Дирихле рекомендовал Римана и Дедекинда, но президент Цюрихского Политехника, Карл Капеллер, приехав в Геттинген и прослушав лекции обоих, выбрал Дедекинда.

[128] Сейчас студенческий совет в университете Брауншвейга называется “Dedekinder”

[129] Умерла в 1894 г.

В 1871 году Дедекинд, обобщив теорию многочленов и алгебраических чисел, ввёл в математику абстрактные алгебраические структуры: кольца[130], идеалы и модули. Совместно с Кронекером он создаёт общую теорию делимости. Исследования Дедекинда были изданы в виде приложения к «Теории чисел» Дирихле 1863 года [371]. Биограф Дедекинда Эдвардс (H. M.Edwards) полагает, что эта книга, изданная после смерти Дирихле, в действительности написана Дедекиндом [243]. Сам Дедекинд в письме Кантору 19 января 1879 года писал: «Я полностью занят переработкой теории чисел Дирихле[131]». Сочинения Дирихле под редакцией Дедекинда вышли в Брауншвейге тремя изданиями. Можно лишь сожалеть, что русский перевод лекций Дирихле по теории чисел не содержит знаменитого XI Дополнения, написанного Дедекиндом, в котором изложена теория идеалов. В 1927 году университет Брауншвейга украсили парадные портреты Гаусса и Дедекинда, на портрете кисти Кёнигсдорфа Дедекинд держит в руке «Теорию идеалов», – книгу, которой отдельно не существует, это его знаменитое «XI Дополнение» к лекциям Дирихле.

Дальнейшее развитие оснований высшей алгебры во многом обязано открытиям Дедекинда.

В течение всей его жизни его отличала большая научная порядочность и деликатность. Он принимал участие в изданиях Гаусса, Римана (1868 год, «О представлении функций при помощи тригонометрических рядов» и «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии», а в 1876 году вместе с Вебером издал сочинения Римана, написав большой биографический очерк), Дирихле, и считал этот труд более важным, нежели публикацию собственных результатов. В 1995 году в Эвансвилле (Индиана, США) была найдена переписка Дедекинда с Кантором, Фробениусом и Вебером, сейчас она выкуплена и хранится в архиве университета Брауншвейга. Фрагменты переписки Кантора и Дедекинда (49 фрагментов) по немецкому изданию Э. Нётер 1937 г. [198] опубликованы на русском языке в переводе Ф.А. Медведева в книге Г. Кантор. Труды по теории множеств, 1985 г.

Сочинения Дедекинда в трёх томах (67 работ и переписка) вышли в Брауншвейге в 1930-х годах (Richard Dedekind. Gesammelte mathematiche werke / Herausgegeben von R. Fricke, E. Noether, Ö. Ore. B.I, 1930, B.II, 1931. B.III. 1932). Подробный анализ работы Дедекинда «Что такое числа и для чего они служат?» содержится в работе [345].

Первый перевод работы Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа» был сделан С.О. Шатуновским и издан в Одессе в 1894 году в журнале «Вестник опытной и

---

[130] Термин «кольцо» не принадлежит Дедекинду, его позже ввёл Гильберт.
[131] Имеется в виду работа Дедекинда над третьим изданием лекций Дирихле.

экспериментальной физики» (№ 191-192), затем переиздавался в Одессе в издательстве «Матезис», он доступен в интернете[132].

В начале 1870-х годов Дедекинд познакомился с Георгом Кантором. Знакомство перешло в долголетнюю дружбу и сотрудничество; их отношения сопровождал горячий интерес, увлечённость теорией множеств, иногда раздражение, отчуждение и прекращение переписки. Оба они любили проводить лето в горах Германии и Швейцарии (Гарц и Интерлакен), где и познакомились. Бурное желание двадцатисемилетнего Кантора найти понимающего собеседника и советчика развеяло сомнения Дедекинда в важности его собственных размышлений о построении теории числа средствами теории множеств. Они были настолько увлечены обсуждением создаваемой Кантором теорией множеств, что, когда Кантор в 1874 году женился и проводил с молодой женой Валли медовый месяц в Гарце, к ним присоединился Дедекинд, и они с Кантором целыми днями обсуждали вопросы теории множеств.

Дедекинд наряду с Кантором считается основателем теории множеств. Его работы стали наглядным примером применения новых методов. Дедекинд применил аксиоматический метод построения системы натуральных чисел в 1888 году в работе «Что такое числа и для чего они служат?» [223] в русском переводе [28, 29].

Он ввёл основные операции над множествами (включение, пересечение, сумма) в том объёме, которые нужны ему для операций над множеством алгебраических чисел, обобщил понятие отображения, ввёл понятие цепи. Система аксиом арифметики, сформулированная здесь Дедекиндом для натуральных чисел, год спустя была развита и упрощена Дж. Пеано (1858-1932), [401], чьё имя за ней и закрепилось, но ещё до него Дедекинд показал, как основные теоремы арифметики получаются из его аксиом.

В начале XX века аксиоматический метод был окончательно принят школой Гильберта как основополагающий в математике.

Определение числа, данное Дедекиндом, включено в курсы современного математического анализа.

О работе Дедекинда «Что такое числа и для чего они служат?». Дедекинд выбрал для работы «Что такое числа и для чего они служат?» эпиграф Ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει – «Человек всегда считает»[133]. Книга посвящена сестре Юлии и брату Адольфу.

В 1888 году символика теории множеств ещё не сформировалась, и Дедекинд для обозначения отношения «принадлежит, является частью» использует символ $\mathfrak{Z}$, этот же символ использован и в русском издании 1905 года. В издании 2015 г. этот символ заменён на $\in$.

[132] Первый английский перевод Бемана появился только в 1901 году.
[133] Благодарю Л.Я. Жмудя за консультацию и перевод с греческого.

В работе «Что такое числа и для чего они служат?» Дедекинд дал своё изложение теории множеств (систем, по его терминологии) как теоретической основы арифметики. Здесь он впервые в истории сформулировал определение бесконечного множества[134] без использования отрицания: система называется бесконечной, если она подобна какой-либо правильной своей части; в противном случае система называется конечной[135].

Вся работа состоит из предисловия к первому изданию, 14 параграфов и 172 пунктов.

Теория Дедекинда, как и теория Кантора, принадлежит к периоду «наивной» теории множеств, когда ещё не было строгой аксиоматики, позже созданной Цермело и Френкелем.

Первый параграф. Дедекинд определяет основные понятия теории множеств (систем) и их элементов, объединение, пересечение, простейшие свойства. Понятие пустого множества он исключает. Термин «вещь» он употребляет как элемент множества, рассматривая принадлежность вещей к одному множеству через их связанность в нашем сознании, и возникновение нового объекта в сознании. Последовательность таких этапов образует лестницу смыслов[136], согласованную с предшествующим построением математики, образующую новые понятия, новое представление о непрерывности числовой области. Понятие о числе независимо от представлений о физическом и геометрическом пространстве, оно является продуктом нашей мысли. Дедекинд противопоставляет свою концепцию числа равносильным и строгим концепциям Вейерштрасса и Кантора, а также полемизирует со Штольцем[137], Ж. Таннери и Кронекером («Господь создал натуральные числа, а остальное – от дьявола»).

Два множества равны, когда они имеют одни и те же элементы. Множество, содержащее один элемент, не то же самое, что этот элемент. Определяет включение как подмножество, равенство множеств, объединение, пересечение, отношения транзитивности и ассоциативности.

Второй параграф. Отображение системы (функции множества). Здесь Дедекинд определяет отображение (трансформацию) как функцию множества, вводит основные операции над ними, тождественное отображение, композицию отображений. Для каждого элемента множества S элементы множества $\varphi(S)$ образуют множество значений - изображений. Но понятие области определения у него нет, также он не говорит, к какому множеству принадлежат элементы $\varphi(s)$. Для простоты Дедекинд полагает, что если T – подмножество S, то и $\varphi(T)$ ограничено $\varphi(S)$. Общий делитель понимается как общее подмножество.

Третий параграф: Подобие отображения. Подобные системы. (Взаимно-однозначные функции. Взаимно-однозначное соответствие между множествами). Определяет указанное

134 Определение 64, ранее Дедекинд обсуждал это определение в переписке с Кантором, Шварцем и Вебером.

135 Термин система сейчас заменён на термин «множество», подобие означает однозначное соответствие (определение 26); правильная часть системы – это не совпадающее с ней подмножество (определение 6); отображение – см. определение 21.

136 Кантор использовал иерархию предельных точек.

137 В своих работах [431, 432] Штольц делает попытку ввести актуально бесконечно малые.

соответствие, обратную функцию, тождественную функцию. Устанавливает транзитивность подобия, классы подобных множеств (классы эквивалентности).

Четвёртый параграф. Отображение системы в себе самой (Отображение множества на себя). Создаёт понятие цепи, чтобы подмножество *A* из *S*, для которого φ осуществляет отображение на себя, то есть φ(*A*) = *A*. Задав любое подмножество *A* из *S*, мы определим цепь A_0, созданную из А как пересечение всех цепей, содержащих *A* относительно отображения φ. Определив свойства цепей, Дедекинд вводит принцип математической индукции для цепей. Далее он рассматривает отображение множества на себя. Утверждает, что изображение каждой цепи также будет цепью. Д. Джойс [345] интерпретирует теоремы этого параграфа как топологические и предлагает графическую иллюстрацию. В пункте 57 определяется цепь изображения (что по Дедекинду эквивалентно изображению цепи). Джойс замечает, что, так как функция непрерывна, образ замыкания будет содержаться в замыкании образа, но это не гарантирует равенства. Пункт 59 содержит теорему о полной индукции, основную для математической индукции.

Пятый параграф. Конечное и бесконечное. Здесь содержится известное определение бесконечного множества как эквивалентного своей части. Дедекинд указывал на происхождение идеи определения из «Парадоксов бесконечного» Больцано, изданной в 1851 году. Действительно, в этом сочинении Больцано пишет: «Два бесконечных многообразия могут быть в таком отношении к другому, что с одной стороны возможно соединить каждую вещь одного многообразия с некоторой вещью другого в пару таким образом, что не останется в обоих многообразиях ни одной вещи, соединённой в пару, и ни одна вещь не будет входить в две или несколько пар. С другой стороны, возможно при этом, что одно из этих многообразий заключает в себе другое просто как часть, так что множества, которые они представляют, если мы рассматриваем составляющие их вещи как равные, то есть как единицы, имеют между собой самые разнообразные отношения» [8, с. 30]. Далее Больцано приводит два примера. Заметим, что Больцано гениально предвосхитил все появившиеся во второй половине XIX века концепции действительного числа: в 1817 году в работе «Аналитическое доказательство..» он вводит понятие точной верхней границы, на основе которой построена концепция Вейерштрасса; в этой же работе вводит критерий сходящейся последовательности, который использовал в 1821 году Коши и на основе которого построены концепции Мере 1869 года и Кантора-Гейне 1872 года. В 1830 годы Больцано начал создавать теорию действительного числа, используя понятие сечения, на которой строил свою концепцию Дедекинд. Рукопись Больцано была издана только в 1930-е годы.

Теорема 66 Дедекинда из этого параграфа – «Существуют бесконечные системы» – самая загадочная во всей работе. Она настолько отличается от строгого обоснованного изложения Дедекинда, и выходит за пределы математической терминологии в область онтологии, что кажется инородной. Тем не менее, она является центральной теоремой всего изложения. Это аллюзия к восхождению по лестнице смыслов, упомянутой в предисловии. Дедекинд апеллирует к «Парадоксам бесконечного» Больцано. Больцано в §13 утверждает, что понятие «бесконечный» обладает предметностью: «Многообразие предложений и истин самих в себе бесконечно» [там же, с. 17].

Шестой параграф. Просто бесконечные системы. Ряд натуральных чисел. Дедекинд создал теорию цепей в двух предыдущих разделах. Теперь он определяет простое бесконечное множество с однозначным отображением в себя так, что оно оказывается цепью некоторого элемента, отсутствующего в его изображении. Дедекинд называет его основным элементом и обозначает символом 1. Этого достаточно для определения множества натуральных чисел с упорядочением. Такое множество удовлетворяет оговоренным в п.71 условиям. Эти четыре условия год спустя использовал Пеано для формализации аксиом арифметики.

Седьмой параграф. Бóльшие и мéньшие числа. Здесь соединяются понятия простого бесконечного множества и функции упорядочения, а элементы множества N названы числами. Определяется бинарное отношение порядка, и доказываются простейшие свойства, в том числе закон трихотомии (п. 90). Дедекинд показывает, что каждая цепь образуется одним элементом, в каждой части системы существует одно и только одно наименьшее число. Далее определяется система всех тех чисел, которые не превышают данного. Для таких систем определяются свойства. Определяется наибольшее число части системы N.

Восьмой параграф. Конечные и бесконечные части числового ряда. Здесь Дедекинд показывает, что будет ли подмножество N конечным или простым бесконечным, зависит от наличия в нём наибольшего элемента.

Девятый параграф. Определение отображения числового ряда с помощью индукции. Дедекинд показывает правомерность способа построения с помощью полной индукции функций, определённых на системе натуральных чисел. Он вводит новую систему, элементы которой могут и не содержаться в N. Приводимый Дедекиндом пример показывает, что он предполагает единственность расширения. Джойс интерпретирует этот раздел в терминах теории категорий.

Десятый параграф. Классы просто бесконечных систем. Дедекинд показывает, два любых простых бесконечных множества подобны, а все простые бесконечные множества образуют класс подобия.

Одиннадцатый параграф. Сложение чисел. Дедекинд определяет операцию сложения (вычитания) на множестве натуральных чисел и её свойства.

Двенадцатый параграф. Умножение чисел. Определение операции и её свойства.

Тринадцатый параграф. Возвышение в степень чисел. Определяет операцию возведения и её свойства.

Четырнадцатый параграф. Число элементов конечной системы. Дедекинд показывает, что каждое конечное множество подобно по крайне мере одному множеству Z_n, определённому в п. 98 (если n – какое-либо число, то Z_n - система всех тех чисел, которые не больше n), и называет n количеством элементов этого конечного множества. Он начинает рассматривать конечные кардинальные числа, показывая, например, что конечное объединение конечных множеств конечно. Далее он вводит ординальные числа. Методы доказательства представляют собой высоко абстрактный подход.

Последнее замечание Дедекинда заключается в том, что существуют так называемые мультимножества, в которых каждый элемент имеет кратность. Он называет это расширенное понятие полезным во многих отношениях, но не считает обсуждать это подробно.

Выводы к четвёртой главе

Деятельность по упорядочению математического анализа, начатая Б. Больцано, О. Коши, Ш. Мере, была продолжена Г. Ганкелем, К. Вейерштрассом, Э. Гейне, Г. Кантором и Р.Дедекиндом. По материалам изучения их работ получены следующие выводы.

Больцано один из первых начал разрабатывать аксиоматический метод как общенаучную логическую процедуру с такими характеристиками, как полнота, непротиворечивость, независимость. Он первым обратил внимание на то, что истины арифметики не могут быть выведены из эмпирических наук, прежде всего из геометрии; основал правила арифметики на четырёх аксиомах и двух правилах сложения и умножения, из которых можно вывести все правила арифметики для натуральных чисел. В 1817 г. Больцано для доказательства существования точной верхней границы использует покрытие области интервалами. У него же впервые встречается понятие «точки с их перифериями», термин Menge – множество. Он же впервые определил бесконечное множество как эквивалентное своей части.

Опыту логического изложения математики и формализации алгебры были посвящены работы М. Ома. Выявлением аксиом арифметики занимался Н.И. Лобачевский (1834, 1843). Попытку построить теорию арифметики предпринял Г. Грассман (1861 г.). Необычная терминология и абстрактное изложение делали его сочинения малодоступными, он не был понят коллегами.

Г. Ганкель в 1867 году разъяснил сущность идей Грассмана, а позже (1869) дал своё независимое изложение теоретической арифметики. Научной особенностью математического творчества Ганкеля, ученика Римана, было сочетание историко-математического и философского методов. Ганкель был единственным среди немецких профессоров, преподававшим историю математики. Он видел развитие идеи во времени, и связь идеи с потребностями времени. В историческом отношении интересна его статья о пределе (1869), подводящая итоги развития концепции предела незадолго до возникновения концепций числа и непрерывности. Ганкель констатировал процесс расширения понятия числа. Он рассмотрел действительные, комплексные и гиперкомплексные числовые системы, барицентрическое исчисление Мёбиуса и построил для него алгебраическую систему, а также построил алгебраические системы для некоторых алгебр Грассмана и кватернионов Гамильтона. Ганкель выделил инвариантный почти для всех цивилизаций принцип записи чисел; ему принадлежит формулировка принципа постоянства формальных законов для новых концепций; предвосхищение теории меры; метод сгущения особенностей. Так как теория множеств ещё не появилась, Ганкелю не хватало характеристик для описания множеств точек разрыва, но его работа стала важным продвижение к современной теории интеграла. Вопрос о необходимости аксиоматизации арифметики, поднятый Больцано и продолженный Грассманом и Ганкелем, был дополнен работами Дедекинда, Буля, и завершён в 1889 году Дж. Пеано. Из работ Ганкеля видно, насколько остро встала необходимость классификации точечных множеств и характеристики их сравнения, классификации точек разрыва; насколько нужна была новая концепция числа, как с точки зрения теоретической арифметики, так и с позиций анализа; необходимость новой концепции непрерывности и нового категориального аппарата. В последующие годы Кантором была создана теория множеств, Кантором и Дедекиндом – концепция непрерывности, Дедекиндом и Пеано – аксиоматика арифметики; в лекциях Вейерштрасса начинают формироваться концепция компактности, концепция метрического и топологического пространства, позже оформившиеся в работах М. Фреше (1906 г) и Ф. Хаусдорфа (1914 г.). Ганкель отмечает, что если в прежние века математика изучала и описывала естественный мир, то в последний век создавался математический аппарат для технических достижений. Потребность в математических методах в приложении к теории потенциала, электротехники и другим разделам физики XIX века давала свободу выбора адекватных математических моделей, соответствующих прикладным потребностям в областях, созданных физиками.

В 1869 и 1872 г. вышли работы Ш. Мере с его концепцией иррационального числа, не получившие признания, но от этого не менее значимые. Он расширил понятие числа добавлением иррациональных чисел как классов эквивалентных сходящихся последовательностей и фиктивных пределов (сходящаяся последовательность есть число). Но неудачная терминология, тяжёлый язык и отказ расширить понятие функции обрекли его труды на неудачу, его работа получила признание лишь столетие спустя.

На материале исследования творческого пути Вейерштрасса показано, что уже в 1861 г. он сделал решительный шаг в анализе – ввёл язык эпсилонтики. В его лекциях содержится понятие окрестности, бесконечно малой, иррационального числа как предела бесконечного ряда. Теория иррациональных чисел, использующая предельную точку, появилась у Вейерштрасса после 1872 года и была разработано Кантором. Вейерштрасс вводит в теорию иррациональных чисел понятие точной верхней грани. Изложение его теории постепенно обогащалось. Это привело к созданию Вейерштрассом своей концепции континуума. Вейерштрасс нуждался в понятиях связности и континуума для приложений в области аналитических функций. Множества, рассматриваемые Вейерштрассом – это, как правило, счётные множества точек, исключённых из области определения функции (особые точки функции), или их дополнения. Условие связности у Вейерштрасса более сильное, чем у Кантора. Сравнительный анализ понятий континуума и связности у Вейерштрасса и Кантора был сделан Г. Миттаг-Леффлером и Э. Фрагменом. Вейерштрасс строго определил понятие непрерывности функции в окрестности точки на созданном им языке ε-δ. Им сформулированы свойства таких функций, а также свойства функций, непрерывных на отрезке, в том числе теорема о приближении функций, разработано понятие равномерной сходимости рядов как условия интегрирования. Задолго до Фреше и Хаусдорфа в лекциях Вейерштрасса формируется аксиоматика метрического и топологического пространства. Благодаря особенностям преподавания Вейерштрасс создал школу строго обоснованного математического анализа, теории эллиптических и абелевых функций, вариационного исчисления, многие его ученики стали крупными математиками. Влияние Вейерштрасса распространилось в России, Франции, Италии и других странах.

На материале работ Б. Больцано, П.Л. Дирихле и Э. Гейне рассмотрена история понятия равномерной сходимости, равномерной непрерывности и идея покрытий отрезка. В связи с этим рассмотрены работы О. Коши (1821, 1823), Н. Абеля (1826), К. Вейерштрасса (1842), Ф.Л. Зайделя (1849), Дж. Г. Стокса (1849), О. Коши (1853), В. Томе (1866), Э. Гейне (1870), посвящённые равномерной сходимости ряда. Показано, что метод покрытия (не разбиения) интервалами впервые использовал Б. Больцано в 1817 г. В 1854 и 1858 г. П. Дирихле в своих лекциях формулирует равномерную непрерывность как фундаментальное свойство непрерывных функций, но не доказывает её строго, ибо в то время ещё не была доказана теорема о пределе ограниченной монотонной функции, не было обосновано понятие точной верхней грани, которые сформулировал в своих лекциях Вейерштрасс в 1870-е; не была разработана концепция действительного числа, появившаяся в 1870-е годы в работах Кантора и Гейне. Понятие иррационального числа и вычисление функции от такого числа в 1850-е годы ещё было неясным. Не было известно, как много иррациональных чисел на отрезке, как их упорядочить. Не было понятия плотности расположения чисел. Всё это ввёл Кантор в 1872-74 годах. Р. Липшиц, ученик Дирихле, продолжил исследования своего учителя относительно расширения условий сходимости рядов Фурье для случая бесконечного числа разрывов и экстремумов (1864) и впервые дал определение окрестности. Липшиц один из первых обратил внимание на различие между множествами, которые потом будут названы нигде не плотными, всюду плотными и приводимыми. Более слабое условие Липшица сформулировал У. Дини. Э. Гейне, ученик Дирихле, вводя понятие равномерной сходимости (1870), писал, что на возникновение идеи повлияла работа Дирихле. В этой же статье Гейне ввёл понятие равномерной непрерывности для функции одной и двух переменных. Развивая эту идею в 1872 г., Гейне, следуя рассуждению Кантора, вводит понятие фундаментальной последовательности, на её основе концепцию действительного числа, предела, функции, непрерывной функции, затем формулирует теорему о равномерной непрерывности функции (теорема Гейне-Кантора), и доказывает её с помощью идеи покрытий конечным числом интервалов, каждый из которых содержит хотя бы одну точку интервала (лемма Гейне). Гейне не повторяет, а развивает идею метода на основе своей концепции действительного числа. Его доказательство представляет собой значительный шаг вперёд по сравнению с доказательством Дирихле, который рассматривал кусочно-непрерывную функцию и пользовался нестрогими геометрическими представлениями. В этой же работе Гейне первым высказал мысль, что некоторым (конечным) множеством точек разрыва можно пренебрегать, но языка теории множеств и способов оценки величины или меры такого множества ещё не было. Заметим также, что «Лекции по теории функций» были первым учебным пособием по теории функций, ознаменовавшим появление нового раздела математического анализа.

Поздняя история теоремы о покрытиях посвящена формулировкам У. Дини (1878), К. Вейерштрасса (1880), И.Томе (1880), С. Пинкерле (1882), Э. Бореля (1895 и 1903), А. Гурвица (1891), П. Кузена (1895), А. Шёнфлиса (1900), В.Г. Юнга (1902), Э.Л. Линделёфа (1903), А. Лебега (1902/3), О. Веблена (1904).

Огромная подготовительная работа была проделана такими математиками середины 19 века, как Больцано, Коши, Дирихле, Риман, Липшиц, а окончательно сформулировали понятие равномерно непрерывной функции и её свойства Кантор и Гейне. К этому времени была создана теория множеств, зарождалась теория меры. Использование понятия производного множества стимулировало её развитие. Борель выделял те области, к которым применимо мероопределение. Лебег ввёл внутреннюю меру области. Появилась классификация точек на внешние и внутренние, классификация предельных точек. Развивалось исследование числовых областей и позже построение областей по заданным свойствам. Это привело к появлению конструктивной и дескриптивной ветвей теории функций. Метод покрытий, будучи сначала вспомогательным инструментом деления отрезка на части и суммирования тех из них, где функция имеет ограниченное колебание, превратился за сотню лет в важный инструмент анализа свойств функции. Постепенное обогащение смыслами сопутствовало методу покрытий в истории анализа.

Р. Дедекинд, ученик Гаусса и Дирихле, занимался вопросами алгебры. В 1871 г. он, обобщив теорию многочленов и алгебраических чисел, ввёл в математику абстрактные алгебраические структуры: кольца, идеалы и модули. Совместно с Кронекером он разработал общую теорию делимости. Знакомство с Кантором способствовало его интересу к проблемам теории множеств. Идея Дедекинда о постепенном восхождении человечества по лестнице смыслов была высказана им в работе «Что такое числа и для чего они служат?» (1888). Это было его собственное построение теории множеств (систем), где Дедекинд применил аксиоматический метод построения системы натуральных чисел. Термин «вещь» он употребляет как элемент множества, рассматривая принадлежность вещей к одному множеству через их связанность в нашем сознании, и возникновение нового объекта в сознании. Последовательность таких этапов образует лестницу смыслов , согласованную с предшествующим построением математики, образующую новые понятия, новое представление о непрерывности числовой области. Понятие о числе независимо от представлений о физическом и геометрическом пространстве, оно является продуктом нашей мысли.

Система аксиом арифметики, сформулированная здесь Дедекиндом для натуральных чисел, год спустя была развита и упрощена Дж. Пеано, чьё имя за ней и закрепилось, но ещё до него Дедекинд показал, как основные теоремы арифметики получаются из его аксиом. В начале XX века аксиоматический метод был окончательно принят школой Гильберта как основополагающий в математике.

Глава 5. ОСНОВНЫЕ КОНЦЕПЦИИ ЧИСЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ, СФОРМИРОВАВШИЕСЯ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XIX ВЕКА

5.1. Развитие понятий числа и непрерывности в теории функций XIX в.

Алгебраические иррациональности приближались последовательностями ещё Эйлером и Кестнером, который ещё до О. Коши рассматривал иррациональные числа как пределы рациональных последовательностей [347, с. 198]. Так же рассматривал иррациональные числа и Коши в своём курсе анализа 1821 г., хотя не определял операций над ними. Критерий сходимости последовательностей был сформулирован Коши в 1821 году. Понимание непрерывности числовой прямой у математиков XIX века, как правило, основано на пределах последовательностей, за одним исключением – это определение через сечение (Больцано и Дедекинд). В 1869 году Шарль Мере определил неизмеримые числа как пределы последовательностей, сходящихся к пределам, выражаемым не численно, а фиктивно, и ввёл для них отношение порядка.

В 1830-е годы над построением концепции числа работал Больцано, его построения во многом предвосхищают концепции Кантора и Дедекинда [104].

Ощущение нового понимания действительного числа, континуума и непрерывности витало в математической атмосфере XIX века. С 1822 года в работах Фурье возникла проблема сходимости тригонометрического ряда и единственности разложения функции в ряд. В 1829 году Лежён-Дирихле сформулировал условия сходимости тригонометрических рядов. Но прикладные задачи требовали расширения класса функций, разложимых в ряд Фурье, следовательно, анализа числового интервала, развития понятия числа и непрерывности.

С 1858 Дедекинд размышлял об определении действительного числа как сечения, но ничего не публиковал. Вейерштрасс читал лекции в Берлинском университете, используя понятие равномерной сходимости (конвергенции почти всюду), но публиковал только специальные статьи, а лекции не издавал и не разрешал литографировать. Идеи формировались, но не было систематического изложения.

Непрерывная функция. По Больцано, 1817, функция $f(x)$ изменяется по закону непрерывности, для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, разность $f(x+\omega) - f(x)$ может быть сделана меньше чем любая заданная величина, если можно принять ω столь малым, сколько мы хотим.

По Коши, 1821 г., функция непрерывна, если для каждого значения x разность $f(x+\alpha) - f(x)$ неограниченно уменьшается вместе с уменьшением числового значения α. Иными словами, функция остаётся непрерывной относительно x между данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции.

В 1823 году Коши издаёт «Конспект лекций по исчислению бесконечно малых» [210], где даёт следующее определение непрерывной функции: «Для функции $f(x)$, принимающей единственным образом конечные значения для всех x, содержащихся между двумя данными пределами, разность $f(x+i) - f(x)$ будет всегда между этими пределами бесконечно малой, т.е. $f(x)$ есть непрерывная функция в тех пределах, в которых она изменяется. Ещё говорят, что в окрестности какого-либо частного значения переменной x функция $f(x)$ всегда является непрерывной функцией этой переменной, если она непрерывна между двумя, даже весьма близкими, пределами, содержащими эту данную точку» [210, с. 17-20].

По Вейерштрассу, 1861: «если $f(x)$ есть функция x и x – определённое значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f(x+h)$. Разность $f(x+h) - f(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x в $x+h$. Если для h можно определить такую такую границу δ, что для *всех* значений h, меньших δ по абсолютному значению, разность $f(x+h) - f(x)$ становится меньше сколь угодно малой величины ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции. Другими словами, некоторая величина может стать бесконечно малой, если её абсолютное значение может стать меньше какой-либо произвольно взятой малой величины. Если некоторая функция такова, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции, то говорят, что она – непрерывная функция аргумента или что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом». Вейерштрасс определял непрерывность функции в окрестности точки и на интервале. Он замечал, что нельзя говорить о непрерывности в точке.

Теорему о том, что всякая непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём, доказал Дирихле в своих лекциях 1854 года, но они были опубликованы лишь в 1904 году. При этом Дирихле неявно использовал тот факт, что если отрезок покрыт бесконечным числом интервалов, то среди них можно выбрать конечное число, также покрывающее данный отрезок. Гейне, ученик Дирихле, несомненно, знал это. Подобная конструкция есть и у Вейерштрасса при построении цепочки открытых дисков.

Непрерывность числовой области. В 1870-е годы в математике произошло удивительное явление – сразу четыре математика сформулировали концепцию действительного числа и непрерывности. Открытие рядов Фурье требовало анализа множеств точек разрыва. Реформы математического анализа, произведённые О. Коши и К. Вейерштрассом, показали необходимость арифметизации континуума.

Работы, в которых было впервые введено понятие непрерывности числовой области – это работы 1872 года Кантора, Дедекинда, изложение Коссаком теории Вейерштрасса – опубликованы на русском языке. Работа Гейне «Лекции по теории функций», в которой изложена совместная точки зрения его и Кантора, а также фрагменты работы Мере «Новый курс инфинитезимального анализа» до недавнего времени были неизвестны русскому читателю, их перевод приведён в этой диссертации.

В 1869 и 1872 годах французский математик Шарль Мере (Charles Méray, 1835–1911), в статье [384] и в курсе анализа [385] ввёл свою концепцию действительного числа как предела последовательностей Коши рациональных чисел: «инварианта сходится к некоему фиктивному неизмеримому пределу, если она сходится к точке, не допускающей точное определение» (теорема 5). Он ввёл отношение порядка, замкнутость относительно арифметических операций. К сожалению, соотечественники не оценили его работы, а франко-прусская война не позволила ознакомиться с его результатами немецким математикам.

Начиная с Шарля Мере, иррациональные числа понимались как пределы эквивалентных последовательностей рациональных чисел с определёнными над ними операциями, причём Мере вводил их как некое фиктивное понятие[138]. Он пишет: «1. Мы будем называть вариантами различные числа (натуральные или дробные, положительные или отрицательные) $v_{m,n,\ldots}$, значение которых зависит от натуральных чисел $m,n,\ldots$, принимающие все положительные комбинации значений, которые мы будем называть её показателем. 2. Если существует число V, такое, что можно выбрать $m,n,\ldots$ достаточно большим, чтобы разность $V-v_{m,n,\ldots}$ была бы по абсолютной величине меньше произвольного числа для некоторых значений индексов и для всех бóльших величин, тогда мы скажем, что вариант $v_{m,n,\ldots}$ стремится или сходится к пределу V. Если $V=0$, вариант $v_{m,n,\ldots}$ называется бесконечно малой величиной, как например, разница между вариантом и его пределом» [385, с. 1-2]. Современники не оценили новые идеи Мере, но сто лет спустя французы стали называть новую концепцию числа концепцией Мере–Гейне или концепцией Мере–Кантора.

В статье Гейне 1872 г. «Лекции по теории функций» [333] содержатся два его знаменитых результата: теорема о равномерной непрерывности, носящая имя Кантора–Гейне, и теорема о покрытиях, носящая имя леммы Гейне–Бореля (Борель строго доказал её в 1895 году). Статья представляет изложение основ теории функций в традициях Вейерштрасса, но с введением нового понятия действительного числа, иррационального числа и непрерывности. Это конспект лекций, которые Гейне читал своим студентам.

[138] Заметим, что в эти же годы Кронекер, отвергал в анализе любые попытки создания новых объектов с помощью предельных построений.

По Гейне, 1872, функция $f(x)$, определённая на интервале (a,b), непрерывна в точке x_0 этого интервала, если для каждой последовательности x_n чисел интервала (a,b), формула $\lim x_n = x_0$ при n, устремлённом к бесконечности, влечёт за собой формулу $\lim f(x_n)=f(x_0)$.

Иррациональные числа Гейне тоже определяет через последовательности: «Я называю числовой последовательностью числа $a_1, a_2, ..., a_n, ..$, если для любого данного числа η, отличного от нуля и достаточно малого, существует значение n такое, что $a_n - a_{n+\nu}$ для любого положительного натурального v будет меньше, чем η. Слово «число» без дополнительных оговорок уже употребляется для рациональных чисел. Ноль будет рассматриваться как рациональное число. Любую числовую последовательность, в которой a_n с возрастанием индекса n будут меньше, чем данная величина, я буду называть элементарным рядом».

Кантор в 1870 доказал, что для функции, непрерывной на интервале, единственно её представление тригонометрическим рядом. Этот результат Кантор распространил на функции, имеющие конечное число точек разрыва. Но распределение этих точек на отрезке (континууме) должно быть исследовано более детально. С 1872 Кантор рассматривает соотношение точек на геометрическом отрезке. Он принимает как аксиому, что всякой точке оси соответствует некоторое число, которое он назвал действительным.

Статья Гейне «Лекции по теории функций» вышла с результатами, очень близкими к результатам Кантора в статье того же года. Гейне во введении к ней писал, что та часть его работы, в которой излагается теория действительных чисел, завершена уже давно и что её содержание подсказано соображениями других математиков, особенно Вейерштрасса, ставшими известными Гейне главным образом из устных сообщений. И лишь после этого он продолжил: «Особой благодарностью я обязан г-ну Кантору из Галле за его устные сообщения, которые оказали значительное влияние на форму моей работы тем, что я заимствовал у него соображения о способе введения произвольных чисел при помощи тех особенно удобных последовательностей, которые здесь названы числовыми последовательностями» [333, с. 173]. С другой стороны, уже после смерти Гейне, в 1886 году, Кантор в письме к Виванти писал: «В теории иррациональных числовых величин я воспользовался особыми актуально бесконечными множествами рациональных чисел, которые я называю фундаментальными последовательностями. Г-н Э. Гейне следовал в этом за мной (Crelles J., BD 74, s. 172). Его изложение отличается от моего лишь в способе выражения, по существу же оно совпадает с моим» [там же, с. 297]. Эта статья содержит теорему, называемую ныне теоремой Гейне–Кантора. Обе работы – и Гейне и Кантора – вышли в 1872 году.

Понятие действительного числа ещё формировалось. Предпосылками к его появлению служили предел фундаментальных последовательностей Коши, введённый как свойство, определение фиктивного предела последовательности рациональных чисел Шарля Мере, работы Вейерштрасса, где число – это класс эквивалентности агрегатов, и определение числа Гейне через фундаментальные последовательности; логически безупречно определил число Рихард Дедекинд через сечения. Это определение имело безупречную, почти юридическую форму, но оно не позволяло оценить объём понятия действительного числа. Далее всех пошёл Кантор в работах последующих лет по теории множеств. Он оценивает объём алгебраических иррациональных чисел[139] как счётное множество, оценивает объём всех иррациональных чисел как несчётное множество, и приходит к понятию сравнения объёма множеств через мощность, что позволило ему создать целостную теорию множеств. И во многом он был обязан поддержке своего друга и коллеги Эдварда Гейне.

5.2. Концепции Гейне-Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса

Георг Кантор (1845–1918) в 1870-х годах начал создавать теорию множеств. С 1872 Кантор рассматривает соотношение точек на континууме [203]. Он принимает как аксиому, что всякой точке оси соответствует некоторое число, которое он назвал действительным. Кантор вводит понятие фундаментальной последовательности, предельной точки, производного множества. Этот конструкт был плодотворным, многие математики, например, Г. Шварц, У. Дини, стали использовать его в курсах анализа. Основополагающим для определения числа Кантор сделал понятие взаимно-однозначного соответствия между множествами. Отличительной особенностью концепции Кантора была иерархия производных множеств, а впоследствии сравнение их по мощности, что позволило ему создать целостную теорию.

Эдуард Гейне (E. H. Heine, 1821–1881) работал в университете Галле. После Вейерштрасса Гейне стал вторым наставником Кантора в науке. Гейне пригласил Кантора в университет Галле, в котором Кантор и проработал всю свою жизнь. Именно благодаря Гейне интересы Кантора обратились к точечным множествам. В 1872 году Гейне с позиций преподавателя изложил свою концепцию действительного числа (числа вообще). В ней использовалось понятие фундаментальной последовательности и предельной точки. По признанию самого Гейне, эти понятия обсуждались им с Кантором и Вейерштрассом [333]. В этой работе содержатся два его знаменитых результата: теорема о равномерной непрерывности, носящая имя Кантора–Гейне, и теорема о покрытиях, носящая имя леммы Гейне–Бореля (Борель строго доказал её в 1895 году для счётного числа покрытий). Эта теорема у Гейне вспомогательный характер для конечного числа покрытий. Подход Гейне к определению

[139] Одновременно с Дедекиндом, который, правда, не придавал значения этому факту.

предела функции через предел фундаментальной подпоследовательности стал широко применяться в преподавании математического анализа. Помимо этого в «Лекциях» Гейне впервые сформулирован принцип пренебрежения некоторым множеством точек, то есть степень общности утверждения.

Рихард Дедекинд (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831–1916) в 1872 году опубликовал свою концепцию действительного числа с использованием понятия сечения как для чисел, так и для точек на прямой [222]. Особенностью определения Дедекинда был алгебраический подход к числу. Ученик Гаусса и Дирихле, Дедекинд создал теорию идеалов и аксиоматику арифметики. Его понимание числа тесно связано с понятием непрерывности числовой и геометрической прямой, и мы рассмотрим его подробнее в соответствующей главе. Работы Дедекинда легли в основу фундамента общей алгебры, его определение числа формально безупречно. Дедекинд применил аксиоматический метод построения системы натуральных чисел в 1888 году в работе «Что такое числа и для чего они служат?» [223].

Он вводит основные операции над множествами (включение, пересечение, сумма) в том объёме, которые нужны ему для операций над множеством алгебраических чисел, обобщает понятие отображения, вводит понятие цепи. Система аксиом арифметики, сформулированная здесь Дедекиндом для натуральных чисел, год спустя была развита и упрощена Дж. Пеано (1858–1932), чьё имя за ней и закрепилось [401], но ещё до него Дедекинд показал, как основные теоремы арифметики получаются из его аксиом.

В начале XX века аксиоматический метод был окончательно принят школой Гильберта как основополагающий в математике.

Определение числа, данное Дедекиндом, включено в курсы современного математического анализа.

Концепция числа у Кантора. Сравним эту работу Дедекинда с чуть опередившей её упомянутой работой Кантора «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов» [50, с. 9-18]. Здесь Кантор строит множество числовых величин, которое мы теперь называем действительными числами, дополняя множество рациональных чисел иррациональными, с помощью последовательностей рациональных чисел, названными им фундаментальными, то есть удовлетворяющих критерию Коши. Для них определяется отношение равно, больше, меньше. Числовая величина определяется как предел фундаментальных последовательностей. Введено понятие предельной точки (точки сгущения). В связи с проблемой сходимости рядов Кантор анализирует бесконечное множество точек и вводит арифметическое понятие иррационального числа с помощью последовательности рациональных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Эта последовательность подчинена тому условию, что для любого положительного ε все её элементы, за исключением не более чем конечного количества чисел, отличаются друг от друга не более чем на ε, т. е. существует натуральное n_1 такое, что при всех $n > n_1$ и для любого m будет выполняться неравенство $|a_{m+n} - a_n| < \varepsilon$. Кантор называет его фундаментальным условием, это условие Коши). Кантор начинает с усиления утверждения, что если последовательность удовлетворяет этому условию, тогда «имеется определённый предел *a*», или число *a* ассоциировано с последовательностью, т.е. иррациональные числа идентифицированы фундаментальными последовательностями. Две такие последовательности a_n и b_n определяют одно и то же иррациональное число, если $|a_n - b_n| \to 0$.

Если для любого данного иррационального числа и для достаточно большого *n* члены последовательности будут по абсолютной величине меньше любого данного числа, тогда *a=0*. Если все они больше, чем некоторое определённое положительное рациональное число, тогда *a*>0. Если все они меньше, чем некоторое определённое отрицательное число, тогда *a*<0. Основные операции распространяются на новую систему, подчиняясь тому, что если $a = a_n$ и $b = b_n$ – две фундаментальные последовательности, тогда $a_n + b_n$ и $a_n \cdot b_n$ определяют *a*+*b* и *ab*.

Если b_n– фундаментальная последовательность иррациональных чисел, тогда существует только одно иррациональное число *a*, определяемое последовательностью рациональных a_n, таких, что $b_n \to a$. Фундаментальная последовательность позволяет избежать введения новых типов чисел, т.е. иррациональные числа образуют полную систему. «Рациональные числа образуют основу для определения более общего понятия числовой величины. Когда я говорю о числовой величине в обобщённом смысле, то это происходит прежде всего в том случае, когда предложена бесконечная последовательность рациональных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ (1), заданная при помощи некоторого закона и обладающая тем свойством, что разность $a_{n+m} - a_n$ становится бесконечно малой при возрастании *n*, каково бы ни было целое положительное *m,* или, другими словами, что для произвольно выбранного (положительного рационального) ε существует такое целое число n_1, что $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ при $n \geq n_1$ и *m* – любое положительное целое число.

Это свойство последовательности (1) я выражаю словами: «последовательность (1) имеет определённый предел *b*»… Различным таким последовательностям должны соответствовать и разные пределы $b, b', b'', ...$

Если задана другая последовательность $a'_1, a'_2, ..., a'_n, ...$ (1′), имеющая определённый предел b', то оказывается, что обе последовательности, (1) и (1′) всегда находятся в одном из следующих соотношений, исключающих друг друга: 1) $a_n - a'_n$ становится бесконечно малой при возрастании *n*, 2) $a_n - a'_n$ начиная с определённого *n* всегда остаётся больше некоторой положительной (рациональной) величины ε, 3) $a_n - a'_n$ начиная с определённого *n* всегда остаётся меньше некоторой отрицательной (рациональной) величины –ε.

Если имеет место первое отношение, то я полагаю $b=b'$, если второе, то $b>b'$, если третье, то $b<b'$» [там же, с. 9–10].

Точно так же можно утверждать, говорит Кантор, что последовательность может находиться к рациональному числу a в одном из трёх отношений, что влечёт $b=a, b>a,\ b<a$. Отсюда в качестве следствия получается, что если b – предел последовательности, то $b-a_n$ становится бесконечно малой при возрастании *n*. Совокупность рациональных чисел Кантор называет областью *A*, совокупность всех числовых величин b называет *B*. На взятые вместе области *A* и *B* можно распространить применяемые конечное число раз числовые операции, принятые для рациональных чисел (сложение, вычитание, умножение, деление, если делитель ненулевой). Тогда область *A* (рациональных чисел) получается из области *B* (иррациональных чисел) и вместе с ней образует новую область *C*. А именно, если задана числовая последовательность чисел $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ числовых величин из *A* и *B*, не все из которых принадлежат области *A*, и если эта последовательность обладает тем свойством, что $b_{n+m} - b_n$ становится бесконечно малой при возрастании *n* и любом *m*, то об этой последовательности говорят, что она имеет определённый предел *c*. Числовые величины *c* образуют область *C*. Отношения равенства, больше, меньше и элементарные операции определяются аналогично предыдущим случаям. Но даже установленное равенство двух величин b и b' из *B* не влечёт их идентичности, а лишь выражает некоторое определённое отношение между последовательностями, которым они сопоставляются.

Из области *C* и предшествующих ей аналогично получается область *D*, из всех их – область *E* и т.д.; посредством λ таких переходов получается область *L*. Понятие числа, как оно развито здесь, несёт в себе зародыш необходимого и абсолютно бесконечного обобщения. *Числовая величина*, *значение* и *предел* Кантор употребляет как равнозначные. Для сравнения с этим параграфом Кантор ссылается на X книгу «Начал» Евклида[140].

Далее Кантор рассматривает точки на прямой, определяя расстояние между ними как предел последовательности, и вводя отношения больше, меньше и равно. Он вводит аксиому, что, и обратно, каждой числовой величине соответствует точка прямой, координата которой

---

[140] В X книге «Начал» представлена классификация несоизмеримых величин.

равна этой числовой величине и притом равна в том смысле, который объяснён в этом параграфе. Кантор называет это утверждение аксиомой, так как оно недоказуемо по самой его природе. Благодаря ей числовые величины дополнительно приобретают определённую предметность, от которой они, однако, совершенно не зависят.

В соответствии со сказанным выше Кантор рассматривает точку на прямой как определённую, если её расстояние от 0, рассматриваемое с определённым знаком, задано как числовая величина, значение, или предел λ-вида.

Далее Кантор определяет точечные множества или множества значений, и вводит понятие предельной точки[141] точечного множества. Под окрестностью понимается любой интервал, содержащий эту точку внутри себя. Таким образом, вместе с точечным множеством задаётся и множество его предельных точек. Оно называется первым производным точечным множеством. Если оно состоит из бесконечного числа точек, из него можно образовать второе производное множество и так далее.

Введение понятия предельной точки (точки сгущения) было плодотворным. Его сразу же начали использовать другие математики – Г. Шварц, У. Дини [228].

Концепция Дедекинда. Об одновременности появления трёх работ – Гейне, Кантора и Дедекинда, содержащих новое понятие числа и непрерывности, написал Дедекинд в 1872 г. Он размышлял над определением вещественного числа и понятия числовой непрерывности с 1858 года, ещё когда работал профессором в Политехнической школе Цюриха, но не считал нужным публиковать свои рассуждения. Дедекинд читал курс математического анализа, и, как он сам заметил, ощутил недостаток в научном обосновании арифметики.

Геометрическая интерпретация приближения переменной величины к пределу не могла быть строго научной, хотя и удобна в преподавании. Дедекинд поставил себе целью дать чисто арифметическое определение непрерывности, которое будет достаточным основанием анализа бесконечно малых. Как пишет сам Дедекинд: «Это мне удалось 24 ноября 1858 года, и несколько дней спустя я сообщил результаты своих размышлений моему дорогому другу Durège`у, что повело к продолжительной и оживлённой беседе[142]. Впоследствии я излагал эти мысли о научном обосновании арифметики то одному, то другому из моих учеников, читал об этом предмете доклад в учёном обществе профессоров здесь, в Брауншвейге, но я не мог окончательно решиться на действительное опубликование, потому, во-первых, что изложение представляется нелёгким, и потому ещё, что самый предмет так мало плодовит. Несколько дней назад, 14 марта [1872 года], в то время как я наполовину стал уже подумывать, чтобы избрать

[141] Сейчас мы говорим «точка сгущения» - такая точка, в каждой окрестности которой содержится бесконечно много точек данного множества и может быть, и она сама.
[142] Дюреж Генрих (1821-1893), немецкий математик, работал вместе с Дедекиндом в Цюрихе, затем преподавал в Пражском университете. Автор работ по теории функций комплексной переменной и эллиптическим функциям.

эту тему предметом настоящего юбилейного сочинения[143], ко мне в руки попала, благодаря любезности её автора, статья E. Heine (Crelle Journal, Bd. 74)[144], которая и подкрепила меня в моём решении. По существу, я вполне согласен с содержанием этого сочинения, но должен откровенно сознаться, что моё изложение кажется мне более простым по форме и более точно выдвигающим настоящее ядро вопроса. В то время как я писал это предисловие (20 марта 1872 года), я получил интересную статью «Ueber die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reichen» G.Cantor`a (Mathem. Annalen von Clebsch und Neumann, Bd.5), за которую высказываю искреннюю благодарность остроумному автору. Как мне кажется при быстром чтении, аксиома[145] в §2 вполне согласуется, независимо от внешней формы изложения, с тем, что я отмечаю ниже в §3, как сущность непрерывности[146]. Какую же пользу представит выделение, хотя бы только в понятии, вещественных чисел ещё более высокого порядка, я, согласно с моим пониманием системы вещественных чисел, как совершенной в самой себе, ещё признать не в состоянии[147]» (Дедекинд. Р. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса: Матезис. 1923. С. 10-11).

В этой же работе Дедекинд формулирует сущность непрерывности: «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, – это рассечение прямой на два фрагмента. Если система всех действительных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то существует одно и только одно число, производящее это разложение» [там же, с 17–18].

Дедекинд рассматривал свойства равенства, упорядоченности, плотности множества рациональных чисел *R*, (числового корпуса, термин, который ввёл Дедекинд в дополнениях к изданным им лекциям Дирихле). При этом он старался избегать геометрических представлений. Определив отношение «больше» и «меньше», Дедекинд утверждает его транзитивность; существование между двумя различными числами бесконечного множества других чисел; а также для любого числа разбиение множества рациональных чисел на два бесконечных класса, таких, что числа одного из них меньше данного, и другого, числа которого больше данного числа; причём само число, производящее это разбиение, может быть отнесено

[143] Автор выпустил это сочинение к юбилею своего отца. – *Примечание С. О. Шатуновского*. Юлиус Левин Ульрих Дедекинд (1795-1872) был профессором-юристом, историком и чиновником в Коллегиум Каролинум, как до 1862 года называлась Высшая техническая школа в Брауншвейге.

[144] В этой статье «Лекции по теории функций» Э. Гейне вводит понятие непрерывности с помощью фундаментальных последовательностей, используя, как он сам признаёт, некоторые результаты Г. Кантора.

[145] «Каждой числовой величине соответствует определённая точка прямой, координата которой равна этой числовой величине и притом равна в том смысле, который объяснён в указанном параграфе, и обратно» [50, с. 13].

[146] «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, это рассечение прямой на два куска» [27, с. 17].

[147] Дедекинд имеет в виду понятие предельной точки и производного множества, определяемого Кантором в работе 1872 года.

либо к одному, либо к другому классу, и тогда оно будет либо наибольшим для первого, либо наименьшим для второго класса.

После этого Дедекинд рассматривает точки на прямой линии и устанавливает для них те же свойства, что и только что установленные для рациональных чисел, постулируя, что каждому рациональному числу соответствует точка на прямой линии.

Но на прямой есть бесконечно много точек, которые не соответствуют никакому рациональному числу, например, величина диагонали квадрата с единичной стороной. Отсюда следует необходимость арифметическим путём дополнить множество рациональных чисел, чтобы область новых чисел обрела такую же полноту или непрерывность, что и прямая. Ранее понятие иррациональных чисел было связано с измерением протяженных величин, то есть с геометрическими представлениями. Дедекинд стремится ввести новое понятие чисто арифметическими средствами, то есть определить иррациональные числа посредством рациональных чисел:

«Предыдущее сравнение области *R* рациональных чисел с прямой привело к открытию в первой изъянов, неполноты, или разрывности, между тем как прямой мы приписываем полноту, отсутствие пробелов, или непрерывность. В чём же собственно состоит непрерывность? Всё и заключается в ответе на этот вопрос, и только в этом ответе мы приобретаем научное основание для исследования *всех* непрерывных областей. Смутными разговорами о непрерывной связи малейших частиц, конечно, многого не достигнешь. Дело идёт о том, чтобы дать точный признак непрерывности, который мог бы служить базисом действительных дедукций. Долгое время я напрасно об этом думал, но, наконец, нашёл искомое. Разные лица, вероятно, оценят эту находку различно, но всё же я думаю, что большинство найдёт её содержание весьма тривиальным. Оно состоит в следующем: в предыдущих параграфах обращено было внимание на то, что каждая точка *p* прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, т.е. в следующем: «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, – это рассечение прямой на два фрагмента. Если система всех действительных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то существует одно и только одно число, производящее это разложение» [27, с. 17-18].

Это свойство прямой Дедекинд называет аксиомой, принимая которую, мы придаём прямой непрерывность. Причём Дедекинд утверждает, что это наш мысленный акт, который производится независимо от того, является ли реальное пространство непрерывным или разрывным, это мысленное заполнение новыми точками не влияет на реальное бытие пространства.

Далее Дедекинд переходит к построению иррациональных чисел. Он называет сечением деление множества рациональных чисел любым числом, обращая внимание на то, что либо в одном классе есть наибольшее, либо в другом классе есть наименьшее, и обратно, если сечение обладает этим свойством, то оно производится либо наименьшим, либо наибольшим числом. В то же время существует бесконечно много сечений, которые не могут быть произведены рациональным числом. Например, если D есть целое число, не являющееся квадратным, то существует целое положительное число λ, такое, что $\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$. Таким образом получается, что в одном классе нет наибольшего, а в другом классе нет наименьшего числа, производящего это сечение, в чём и состоит неполнота, или разрывность области рациональных чисел. В таком случае, если сечение не может быть произведено рациональным числом, создадим новое, иррациональное число, которое создаёт это сечение. Каждому определённому сечению соответствует одно и только одно рациональное или иррациональное число. Два числа неравны, если они соответствуют различным сечениям. Между ними можно определить отношения «больше» или «меньше».

Дедекинд рассматривает непрерывность области $\mathfrak{R}$ вещественных чисел: «Область $\mathfrak{R}$ обладает ещё и непрерывностью, то есть имеет место следующее предложение: Если система $\mathfrak{R}$ всех действительных чисел распадается на два класса a_1 и a_2 такого рода, что каждое число α_1 класса a_1, меньше каждого числа α_2 класса a_2, то существует одно и только одно число α, производящее это разложение» [там же, с. 25].

Он определяет вычисления с вещественными числами. При этом он доказывает теорему о непрерывности арифметических операций: «Если число λ есть результат вычислений, совершённых над числами α, β, γ, …, и если λ лежит внутри интервала L, то можно указать интервалы A, B, C (внутри которых лежат числа α, β, γ,…) такого рода, что результат такого же вычисления, в котором, однако, числа α, β, γ,…заменены числами соответственных интервалов A, B, C,…, будет всегда представлять число, лежащее внутри интервала L» [там же, с. 28]. Дедекинд сетует на трудность изложения этой теоремы, что облегчается с введением понятий переменных величин, функций и пределов. Заметим, что несмотря на то, что работа была написана в 1872 году, Дедекинд не пользуется уже разработанным аппаратом математического анализа, сделанным Вейерштрассом, в частности, его языком ε-δ. Понятие предела носит у него качественный оттенок. Дедекинд по существу использует только те аспекты непрерывности, которые нужны ему для обоснования понятия числа и арифметических операций над числами средствами теории множеств.

Дедекинд устанавливает зависимость введённых им понятий с основными положениями анализа бесконечных. Определение предела он даёт в таком виде: «Говорят, что переменная величина x, пробегающая последовательные определённые численные значения, приближается к постоянному *пределу* α, если она в ходе процесса изменения *окончательно* заключается между каждыми двумя числами, между которыми α само лежит, или, что то же, если разность $x-\alpha$, взятая абсолютно, опускается ниже всякого данного значения, отличного от нуля» [там же, с. 29].

Дедекинд доказывает теорему: «Если величина x возрастает постоянно, но не сверх всяких границ, то она приближается к некоторому пределу» [там же, с. 29].

На этом заканчивается работа Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа». Как мы видим, определение понятий непрерывности и действительного числа безупречно с логической точки зрения, оно носит юридический оттенок, но представление об объёме и структуре понятия из него не следует. Математики, определив число таким способом, переходят в построениях к более практичному определению числа Кантора.

Кантор спорит с Дедекиндом. 28 апреля 1872 года, получив работу Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа, Кантор писал ему: «Искренне благодарю Вас за Вашу работу о непрерывности и иррациональных числах. Как я теперь смог убедиться, точка зрения, к которой я пришёл несколько лет тому назад, отправляясь от занятий арифметикой, фактически совпадает с Вашими взглядами; имеется различие лишь в способе введения числовых величин. Я вполне убеждён, что Вы правильно выявили сущность непрерывности» [50, с. 327].

Позже Кантор полемизировал с Дедекиндом. В 1882 году он написал Дедекинду: «Я пытался обобщить Ваше понятие сечения и воспользоваться им для определения понятия континуума, но мне это не удалось. Напротив, мой исходный пункт – счётные «фундаментальные последовательности» (под ними я понимаю последовательности, элементы которых неограниченно сближаются друг с другом) – кажутся годящимися для этой попытки» [там же, с. 356]. О преимуществах и недостатках концепции Дедекинда Кантор написал позже, в 1883 году: «каждому числу b соответствует лишь единственное сечение. Но она сопровождается и тем крупным недостатком, что числа в анализе никогда не представляются в форме «сечений», в которую их приходится лишь вписывать весьма искусственным и сложным образом» (Кантор Г. «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном», §9) [50, с. 84].

К 1878 году Кантор переходит от анализа точечных областей к понятию мощности, формулирует гипотезу континуума, рассматривает непрерывные отображения между множествами различной размерности. Тем острее он ощущает недостаточность определения непрерывности через сечение.

Вейерштрасс. В том же 1872 году вышли лекции Вейерштрасса по теории действительного числа, изложенные его учеником Е. Коссаком, определяющее иррациональные числа с помощью понятия агрегатов (конечных числовых множеств) и десятичных приближений [352], есть в русском переводе, см. [58].

Карл Вейерштрасс не публиковал и не разрешал литографировать свои лекции. Он читал их, начиная с 1856 года, конспекты некоторых студентов всё же попадали в печать. В 1872 году вышла книга Коссака, содержавшая изложение концепции числа по Вейерштрассу с помощью понятия агрегатов (конечных числовых множеств) и десятичных приближений (там же).

В летнем семестре 1886 года в ответ на упрёки Л. Кронекера в недостаточной обоснованности лекций по теории аналитических функций Вейерштрасс прочитал дополнительные главы, посвящённые основаниям теории функций [450]. К этому времени уже появились концепции числа Кантора, Гейне и Дедекинда. Вейерштрасс делает попытку обобщить их и привести в согласование с классическим представлением о числе как о пропорции.

Он обращается к теореме Больцано (теореме о корневом интервале) и доказывает её, избегая геометрических и физических представлений. Обобщение Вейерштрассом концепций Кантора и Дедекинда потребовало анализа понятий окрестности и точной верхней границы, и привело к формированию свойств метрического и топологического пространства, что было формализовано лишь в 1904–1906 годах М.Фреше и в 1912–1914 годах Ф. Хаусдорфом.

Карл Вейерштрасс в лекциях последних лет сделал попытку критически обобщить результаты коллег. У него с самого начала была своя концепция числа как агрегата[148], отличная от концепций предыдущих авторов. Агрегат представлял собой множество, конечное или обозримое[149], с помощью которого число представлялось как разложение по степеням произвольно выбранной основной единицы. Как правило, это десятичное представление вида $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots$. Рассмотрим фрагмент его лекций 1878 года о свойствах чисел:

«Правила сложения: согласно этому определению можем вывести следующие теоремы относительно сложения:

1) $a + b = b + a$
2) $(a + b) + c = (a + c) + b$

[148] Термин впервые встречается у Ньютона.
[149] Термин Вейерштрасса.

Из двух этих правил следует, что сумма произвольного количества чисел не зависит от того, в каком порядке осуществляется сложение. Имеем

$[(a + b + c + d) + e] + f = [(a + b + c + d) + f] + e$

Согласно другому правилу

$(a + b + c) + d + e + f = (a +b + d) + c + e + f$

Вновь в силу 2)

$a + b + c + d + e + f = b + a + c + d + e + f$ в силу 1).

Затем можно в сумме переставить две очерёдности чисел. Сначала в очерёдности представленной соседними числами можно каждое число представить как сумму меньших чисел (..).

Умножение. До введения правил умножения числовых величин нужно сначала убедиться, что для двух произвольных вычислимых чисел a и b число, обозначенное ab , допускает определение операции, которая подчиняется следующим правилам:

I) $ab = ba$;

II) $(ab)c = (ac)b$;

III) $a(b + c) = ab + ac$.

Из III) и I) легко получается III)′

$$(a+b+c+\ldots)(a'+b'+c'+\ldots) = aa'+ab'+ac'+\ldots+ba'+bb'+bc'+\ldots+ca'+cb'+cc'+\ldots$$

(…)» [455, с. 380].

Вейерштрасс формально определяет числовые величины как символы вида $a + b + c + \ldots$, где a, b, c,… есть положительные измеримые числа. Перейдём к конструкции агрегатов. Если ненулевые слагаемые a, b, c,… бесконечно велики, а выражение $a + b + c + \ldots$ понимаем как ряд, то условие III)′ не следует из условий I) и II); его доказательство требует знакомства с тем фактом, который приписывается Вейерштрассу: если ряд абсолютно сходится, то его сумма не зависит от порядка слагаемых. Условие III)′ можно интерпретировать как частный случай этого утверждения.

Первый цикл лекций, посвящённый неизмеримым числам, Вейерштрасс читал в 1861/62 учебном году. Понятию неизмеримого числа и различным конструкциям этих чисел посвящены первые часы его лекций по математическому анализу, в течение многих лет читаемых в Берлине. Например, в лекциях 1886 года (9 июня) он говорил о неизмеримых числах так:

«В произвольной близости от каждого неизмеримого числа существует произвольно много числовых величин, которые приближаются к нему произвольно близко. Следовательно, каждая неизмеримая числовая величина есть граница измеримых [числовых величин], в этом случае [раньше] определённых. Каким же тогда должен быть способ чисто арифметического определения различия между измеримыми и неизмеримыми? Если принять существование измеримых числовых величин, то нет никакого смысла, чтобы [числа] неизмеримые определять как точные границы, так как это заранее вовсе неизвестно, разве что за исключением измеримых и ещё некоторых числовых величин».

Это отчётливый упрёк по адресу конструкции действительных чисел Мере–Гейне–Кантора, хотя во время лекции он и не называл имён. Далее во время этой лекции Вейерштрасс аргументировал:

«Но числовая величина, которая раньше была определённой, по правде понималась как измеримое число, но и также содержит в себе и другие. Рассмотрим, например, число e, которое представлено упорядоченными элементами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, ..., \frac{1}{n!}, ...,$ образующими хорошо определённый ряд. Этот ряд однозначно определяет числовую величину, которая ему равна; можно сказать, что не существует измеримой числовой величины, равной представленной числовой величине [так называемому числу e]. Отсюда сразу делаем вывод, что область [всех] величин не исчерпывается измеримыми числами» [455, с. 381-382].

На лекции 11 июня 1886 года Вейерштрасс продолжал свои рассуждения так:

«Пользуясь тем, что с помощью введённого наглядного метода легко удаётся доказать, что каждая числовая величина соответствует некоторой определённой геометрической длине. А именно, можно представить числовую величину в некоторой арифметической форме, например, в десятичной системе в виде $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ...$, где $0 \le a_k \le 10$, где $k \ge 1$, то есть мы можем все наши [положительные] числовые величины представить как отрезки [длины]» [450]. Проблеме соответствия числа, числовой величины, точки и места на прямой, посвящены исследования Гейне, Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса. Все они глубоко чувствовали внутреннюю связь числа и непрерывности, и стремились выразить её в своих определениях.

Вейерштрасс отмечает неполноту поля рациональных чисел, рассматривает разницу между понятиями числа и числовой величины. Число у него - это агрегат[150], конечная совокупность, например в виде десятичной или иной записи относительно условно выбранной единицы. Каждому числу соответствует точка на прямой, но не очевидно, что каждой точке соответствует число[151]. В отличие от вышеназванных авторов он определяет действительное число как предел частичных сумм абсолютно сходящегося ряда, обращая внимание на необходимость арифметизации понятия предела. Вводит упорядоченность, замкнутость относительно арифметических операций. Вводит понятие комплексного числа.

---

[150] Этот термин применительно к числу впервые встречается у Ньютона.

[151] Кантор вводит это утверждение как аксиому, утверждая, что доказать это невозможно. Дедекинд полагает, что числа – это объекты «мира наших мыслей» и наше право полагать их связанными с точками.

Кантор строил целостную теорию точечных множеств, полагая прикладные вопросы вторичными. Его теория точечных множеств, задуманная как обобщение современного математического анализа, спустя годы стала основанием, фундаментом математики. Дедекинд создавал арифметическое понятие числа как алгебраист, не склоняясь к проблемам математического анализа. Его построение спустя 15 лет привело к созданию аксиоматики арифметики. Гейне преследовал педагогические цели, его изложение предела и непрерывности через фундаментальные последовательности вошло в современные курсы анализа.

В отличие от них Вейерштрасс создавал своё обоснование для теории аналитических функций. Те понятия, которые он вводит, не носят глобального характера, но необходимы лишь для его построений. Он вводит собственные понятия континуума и связности, которые отличаются от таковых же понятий у Кантора; для аналитического продолжения по пути строит цепочку открытых дисков, что эквивалентно лемме Гейне о покрытиях. Число у Вейерштрасса определено так, чтобы было достаточно определить непрерывное изменение арифметических величин в их взаимной зависимости, «то есть осуществляется вычисление арифметического выражения, выполненное так подробно, что для любого требования к точности для любой величины t функция может быть представлена с любым приближением. Для строго определённой непрерывной функции также всегда можно найти математическое выражение» [там же, с. 21]. При этом, если функция представлена в виде ряда, то это не сужает, а расширяет возможности исследования этой функции, но ряд должен обладать равномерной сходимостью. «Для любого значения x, для которого функция определена, она действительно представима» [там же, с. 36].

Кантор о сравнении различных способов введения понятия числа и непрерывности. 28 апреля 1872 года, получив работу Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа, Кантор писал ему: «Искренне благодарю Вас за Вашу работу о непрерывности и иррациональных числах. Как я теперь смог убедиться, точка зрения, к которой я пришёл несколько лет тому назад, отправляясь от занятий арифметикой, фактически совпадает с Вашими взглядами; имеется различие лишь в способе введения числовых величин. Я вполне убеждён, что Вы правильно выявили сущность непрерывности» [50, с. 327].

Правда, в их последующей переписке содержится полемика о способе определения непрерывности, и в 1882 году Кантор пишет Дедекинду: «Я пытался обобщить Ваше понятие сечения и воспользоваться им для определения понятия континуума, но мне это не удалось. Напротив, мой исходный пункт – счётные «фундаментальные последовательности» (под ними я понимаю последовательности, элементы которых неограниченно сближаются друг с другом) – кажутся годящимися для этой попытки» [там же, с. 356].

В 1883 году Кантор, анализируя различные формы введения числа, в цикле работ «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном» §9, стр. 81–87, писал: «Я хотел бы вкратце и построже сказать о трёх известных мне и в существенном однородных главных формах строго арифметического изложения учения об общих действительных числах. Это *прежде всего* способ введения, которым в течение ряда лет пользовался в своих лекциях об аналитических функциях профессор Вейерштрасс и некоторые намёки на которые можно найти в программной работе г-на Э. Коссака (Die Elemente der Arithmetik. Berlin 1872). *Во-вторых*, г-н Р. Дедекинд в своём сочинении «Stetigkeit und irrationale Zahlen» (Braunschweig 1872) опубликовал своеобразную форму определения. *В-третьих*, в 1871 году я предложил (Math. Ann. 1872, Bd. 5, S. 123) форму определения, внешне имеющую сходство с вейерштрассовской… На мой взгляд, эта *третья*… является самой простой и естественной из всех и имеет ещё то преимущество, что она самым непосредственным образом приспособлена для аналитических вычислений» [там же, с. 81].

«Определению какого-либо иррационального действительного числа всегда соответствует строго определённое множество первой мощности рациональных чисел. В этом заключается общая черта всех форм определений. Различие же их состоит в моменте порождения, при помощи которого множество соединяется с определяемым им числом, и в тех условиях, которым должно удовлетворять множество, чтобы оно оказалось подходящей основой для соответствующего определения числа.

При *первой* форме определения в основу кладётся множество положительных рациональных чисел a_ν, которое будет обозначаться (a_ν) и которое удовлетворяет тому условию, что, сколько бы и каких из этих a_ν мы ни суммировали в конечном количестве, эта сумма всегда остаётся меньше некоторой заданной границы. Теперь если мы имеем две подобных совокупности (a_ν) и (a'_ν), то строго доказывается, что могут представиться три случая: или каждая часть $1/n$ единицы всегда встречается одинаково часто в обеих совокупностях, если только их элементы суммируются в достаточном, доступном увеличению количестве, или $1/n$ начиная с известного n всегда содержится чаще в первой совокупности, чем во второй; или наконец, $1/n$ начиная с известного n всегда содержится чаще во второй совокупности, чем в первой. Соответственно этим случаям мы полагаем, обозначая через b и b' определяемые этими двумя совокупностями (a_ν) и (a'_ν) числа, что в первом случае $b = b'$, во втором $b > b'$, в третьем $b < b'$. Если мы соединим обе совокупности в одну новую совокупность $(a_\nu + a'_\nu)$, то это даёт основу для определения $b + b'$. Если же из двух совокупностей (a_ν) и (a'_ν)

образовать новую совокупность $(a_\nu a'_\nu)$, элементы которой являются произведениями из всех (a_ν) на все (a'_ν), то эта новая совокупность принимается в качестве основы определения bb'.

Мы видим, что здесь момент порождения, связывающий множество с порождаемым им числом, заключается в *образовании сумм*. Но следует подчеркнуть как *существенное* то, что здесь оперируют только суммированием всегда *конечного* количества рациональных элементов, а *не* полагается заранее, например, что определяемое число b равно сумме $\sum a_\nu$ бесконечного ряда (a_ν). В этом заключалась бы *логическая ошибка*, ибо, скорее, определение суммы $\sum a_\nu$ получается только путём приравнивания её непременно уже определённому заранее готовому числу b. Я думаю, что эта логическая ошибка, которой впервые избегнул Вейерштрасс, совершалась почти всеми и не была замечена лишь потому, что она относится к тем редким случаям, когда действительная ошибка не может причинить большого вреда в исчислении. Несмотря на это, с вышеуказанной ошибкой связаны, по моему мнению, все те трудности, которые заключаются в понятии иррационального, между тем как если избегнуть этой ошибки, то иррациональное число занимает место в нашем духе с такой же определённостью, ясностью и отчётливостью, как и рациональное число.

В форме определения г-на Дедекинда в основу кладётся *совокупность всех* рациональных чисел, но разделённых на две группы таким образом, что если мы обозначим числа первой группы U_ν, а числа второй группы через B_μ, то всегда $U_\nu < B_\mu$. Подобное деление множества рациональных чисел г-н Дедекинд называет его «сечением», обозначает через $(U_\nu | B_\mu)$ и сопоставляет ему число b. Если сравнить два подобных сечения $(U_\nu | B_\mu)$ и $(U'_\nu | B'_\mu)$ друг с другом, то, как и при *первой* форме определения оказывается всего *три* возможности, соответственно которым представленные обоими сечениями числа b и b' или приравниваются друг к другу, или принимается, что $b > b'$, или $b < b'$. Первый случай имеет место, – если отвлечься от некоторых, легко регулируемых исключений, возникающих при рациональности определяемых чисел, – лишь при полном тождестве обоих сечений. В этом наблюдается решительное и безусловное преимущество данной форму определения по сравнению с обеими другими, а именно то, что каждому числу b соответствует лишь *единственное* сечение. Но она сопровождается и тем крупным недостатком, что числа в анализе *никогда* не представляются в форме «сечений», в которую их приходится лишь вписывать весьма искусственным и сложным образом.

И здесь затем следуют определения в виде суммы $b + b'$ и произведения bb' на основе новых сечений, получаемых из двух заданных.

Недостаток, связанный с *первой* и *третьей* формами определения, а именно, что здесь одни и те же, т.е. равные числа, представляются бесконечно часто, и что, таким образом, не получается непосредственно однозначного обозрения всех действительных чисел, можно весьма легко устранить путём специализации положенных в основу множеств (a_ν), если привлечь к рассмотрению какую-либо из известных однозначных систем, вроде десятичной системы или разложения в простые цепные дроби.

Перейду теперь к *третьей* форме определения действительных чисел. И здесь в основу кладётся бесконечное множество рациональных чисел (a_ν) первой мощности, но теперь ему приписывается другое свойство, чем в теории Вейерштрасса, а именно: я требую, чтобы взяв произвольно малое рациональное число ε, можно было бы так удалить конечное число членов множества, чтобы оставшиеся имели попарно разность, которая по абсолютной величине меньше ε. Всякое такое множество (a_ν), которое можно также охарактеризовать равенством $\underset{\nu=\infty}{Lim}(a_{\nu+\mu}-a_\nu)=0$ (при произвольном μ), я называю *фундаментальной последовательностью* и сопоставляю ему некоторое определяемое им число b, для которого целесообразно даже воспользоваться самим знаком (a_ν), как это сделано у г-на Гейне, который в этих вопросах после многих устных обсуждений присоединился к моим взглядам (См. Журнал Крелле, т. 74, с. 172). Подобная *фундаментальная последовательность*, как можно строго вывести из её понятия, приводит к трём случаям: или её члены a_ν для достаточно больших значений ν по абсолютной величине меньше, чем любое наперёд заданное число; или они начиная с некоторого ν больше определённо заданного положительного рационального числа ρ, или же они начиная с известного ν меньше некоторой определённо заданной отрицательной рациональной величины $-\rho$. В первом случае я говорю, что b равно нулю, во втором, что b больше нуля или положительно, в третьем, что b меньше нуля или отрицательно.

Затем переходим к элементарным операциям – сумма, произведение, частное, в том числе и между рациональным a и иррациональным числом.

Лишь теперь мы переходим к определению равенства и обоих случаев неравенства двух чисел b и b' (из которых b' может также равняться a), говоря при этом $b=b'$, $b>b'$ или $b<b'$ в зависимости от того, равна ли нулю, больше нуля или меньше нуля разность $b-b'$.

После всех этих подготовительных рассуждений получается в качестве первой *строго доказуемой* теоремы, что если b есть число, определяемое фундаментальной последовательностью (a_ν), то $b-a_\nu$ при возрастании ν становится по абсолютной величине меньше, чем любое мыслимое рациональное число, или иначе, что $\mathop{Lim}\limits_{\nu=\infty} a_\nu = b$.

Следует обратить внимание на следующий кардинальный пункт, значение которого легко пропустить: в случае третьей формы определения число b не определяется вовсе как «предел» членов a_ν фундаментальной последовательности (a_ν). Принять это значит совершить такую же логическую ошибку, как та, о которой мы говорили при рассмотрении *первой* формы определения, и именно на том основании, что тогда предполагается наперёд существование предела $\mathop{Lim}\limits_{\nu=\infty} a_\nu = b$. Скорее, дело обстоит обратным образом, а именно так, что благодаря нашим предыдущим определениям понятию числа *b* приписываются такие свойства и отношения к рациональным числам, что отсюда можно с логической очевидностью вывести заключение: $\mathop{Lim}\limits_{\nu=\infty} a_\nu$ существует и равен *b*. Да простят мне все эти подробности, которые оправдываются тем, что большинство проходят мимо этих неприметных деталей и затем легко натыкаются на противоречия в иррациональных числах, ставя их под сомнения, между тем как соблюдение указанных здесь предосторожностей легко предохранило бы их от этого. Действительно, они тогда ясно поняли бы, что иррациональное число благодаря *приданным ему нашим определением свойствам* является такой же реальностью для нашего духа [50, с. 84-85], как рациональное и даже как целое рациональное число, и что вовсе нет нужды *получать* его путём предельного процесса, а что, скорее, наоборот, *располагая* этими свойствами, можно общим образом убедиться в пригодности и очевидности предельных процессов. Ведь приведённую выше теорему легко обобщить следующим образом: если (b_ν) представляет собой какое-нибудь множество рациональных или иррациональных чисел, обладающее тем свойством, что $\lim\limits_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu}-b_\nu)=0$ (каково бы ни было μ), то существует некоторое число *b*, определяемое фундаментальной последовательностью (a_ν), и такое, что $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{\nu=\infty} b_\nu = b$.

Оказывается, следовательно, что *те самые* числа *b*, которые были определены на основании фундаментальных последовательностей (a_ν) (я называю эти фундаментальные последовательности последовательностями первого порядка) таким образом, что они оказываются пределами a_ν, могут быть представлены различными способами и как пределы последовательностей (b_ν), где каждое b_ν определяется с помощью фундаментальной последовательности первого порядка $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ (с фиксированным ν) [там же, с. 85].

Поэтому любое подобное множество (b_ν), если оно обладает тем свойством, что $\lim\limits_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu}-b_\nu)=0$ (при произвольном μ), я называю фундаментальной последовательностью *второго* порядка.

Точно так же можно образовать фундаментальные последовательности *третьего*, *четвёртого*,…, n-го порядка, а также фундаментальные последовательности порядка α, где α – любое число второго числового класса.

Все эти фундаментальные последовательности дают для определения какого-либо действительного числа b то же самое, что и фундаментальные последовательности первого порядка. Всё различие заключается лишь в более сложной, пространной форме задания. (…).

Я пользуюсь теперь следующим способом выражения: числовая величина b дана фундаментальной последовательностью n-го, соответственно, порядка α. Если решиться на это, то мы получаем таким путём необыкновенно лёгкий и в то же время понятный язык, чтобы описать наиболее простым и выпуклым образом всю полноту многообразных, часто столь сложных образований анализа. Благодаря этому получится, на мой взгляд, серьёзный выигрыш в ясности и прозрачности изложения. Тем самым я возражаю против опасений, высказанных г. Дедекиндом в предисловии к его сочинению «Непрерывность и иррациональные числа». Мне вовсе не приходило в голову вводить с помощью фундаментальных последовательностей второго, третьего и т.д. [там же, с. 86] порядков новые числа, которые не были бы определены уже с помощью фундаментальных последовательностей первого порядка: я имел в виду лишь понятийно различную форму задания. Это ясно вытекает из различных мест моей работы.

Я хотел бы здесь обратить внимание на одно замечательное обстоятельство, а именно, что порядки фундаментальных последовательностей, различаемые мною с помощью чисел первого и второго числового классов, совершенно исчерпывают все мыслимые в анализе, уже найденные и не найденные формы обычных типов последовательностей, исчерпывают в том смысле, что нет вовсе фундаментальных последовательностей, – как я это строго докажу при других обстоятельствах, – порядковое число которых можно было бы обозначить каким-нибудь числом, например, третьего числового класса» [там же, с. 85].

Выводы. В 1872 году действительное число было определено как предел сходящихся последовательностей, для которого определено отношение порядка и арифметические операции Мере, Кантором и Гейне. Кантор развил эту идею, образуя новые последовательности из иррациональных чисел (иерархию предельных точек). Концепцию на языке агрегатов дал Вейерштрасс, с помощью концепции сечения – Дедекинд.

Теория действительного числа и понятие непрерывности числового континуума получили дальнейшее развитие в работах французской школы теории функций (Бэр, Борель, Лебег и другие), московской школы теории функций (Егоров, Лузин и его ученики), польской школы теории множеств и теории меры (Серпинский и его ученики), и других математиков XX века. В XX веке исследования А.Н. Колмогорова показали, что все эти концепции эквивалентны [55, 125].

5.3. Развитие идей Кантора и судьба его переводов в России

С 1872 по 1897 год Кантор написал свои основные работы по теории множеств. Математики России, бывавшие в научных командировках в университетах Берлина, Геттингена, читавшие журнал Крелле (его получали университеты Российской Империи) Mathematische Annalen, Acta Mathematica, познакомились с идеями теории множеств. Постепенно идеи Кантора входили в научные исследования, в преподавание, появлялись в печати в виде пересказов и переводов. Мы рассмотрим историю наследия Кантора в России с 1892 по 1985 годы.

Одесса, 1892 г. И.Ю. Тимченко. Первое упоминание о работах Кантора в России (1892 г.) мы нашли у Ивана Юрьевича Тимченко (1863–1939), закончившего Новороссийский университет в 1885 году. Тимченко занимался астрономией, математикой и историей математики, неоднократно ездил за границу для работы в библиотеках (в 1890, 1892, 1893, 1896 годах). Темой магистерской диссертации Тимченко выбрал исторический анализ развития теории аналитических функций. Его работа «Основания теории аналитических функций» была опубликована в трёх выпусках «Записок математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей» в 1892 и 1899 годах, и защищена в 1899 году [121, 122].

Это глубокое исследование охватывает период от античности до конца XIX века, в нём анализируется развитие основных идей, руководивших теорией аналитических функций. Важнейшей из них является концепция непрерывности и связанных с ней понятий окрестности и предельной точки. Тимченко отдаёт дань Вейерштрассу в развитии понятия окрестности, равномерной сходимости рядов, и Георгу Кантору в геометрической трактовке концепции непрерывности, в его работах о линейных многообразиях. Тимченко указывает связь представления Кантора о непрерывности («сплошности», как пишет Тимченко) с принципом непрерывности Лейбница [121, с. 12]. Тимченко пишет: «Один из самых плодотворных принципов новой математики – *объединение* или *обобщение*, – представление, устанавливающее известный правильный переход от одной определённой группы математических объектов к другим, в силу чего все они являются элементами одной и той же группы. Принцип этот очень важен во всех областях математических знаний, служа могущественным средством для уяснения природы фактов и значительно упрощая аналитические операции. Но совершенно особое значение приобретает это начало в приложении в таких случаях, когда элементы группы представляют из себя *сплошную систему*[152], как это бывает в области непрерывно изменяющихся конкретных величин. В таких

[152] Понятие о сплошности – одно из самых трудных основных математических понятий. Полное изложение его, по крайней мере, в приложении к системам известного рода, дано лишь недавно Георгом Кантором, см. Ueber unendl., lineare Punktmannigfaltigkeiten, Math. Ann. B. XXI 1883, 5,

случаях всегда полезно объединить данную группу с *производной*[153] группой так называемых предельных элементов, не принадлежащих к данной, но связанных с ней сплошностью. При известных ограничительных условиях *свойства основной группы, изменяясь непрерывно при переходе от одного элемента к другому, распространяются на производную* – это есть принцип, названный Лейбницем законом непрерывности» [там же, с. 224, курсив оригинала]. Примечательно, что Тимченко обратился к самым ключевым работам Кантора. Первая из них – это работа 1872 года «Обобщение теоремы из теории тригонометрических рядов», где вводится новая концепция числа и понятие предельной точки (радостно подхваченное математиками, читавшими курсы анализа, например, Г. Шварцем и У. Дини. Вторая, самая знаменитая – это Пятый Мемуар из цикла «О бесконечных линейных точечных многообразиях», состоящего из 6 частей, опубликованных в 1879–1884. В Пятом Мемуаре «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном» содержатся все основные понятия и теоремы, в том числе понятия пустого множества, совершенного множества, концепция действительного числа и её сравнительный анализ с таковыми же концепциями Вейерштрасса и Дедекинда; введена шкала мощностей и поставлена гипотеза континуума.

Одесса, 1896 г. С.О. Шатуновский. Самуил Осипович Шатуновский (1859–1929) не получил систематического образования, побывав студентом различных учебных заведений в России и Швейцарии. Долгое время Шатуновский зарабатывал уроками в маленьких губернских городах. Он писал математические работы по основам геометрии и алгебры, аксиоматическому определению величины; публиковался в российских и зарубежных журналах и следил за математической жизнью Европы. Шатуновский появился в Одессе между 1891 и 1893 годом (судя по публикациям в ВОФЭМ[154], где указывался город проживания автора). Благодаря хлопотам одесских профессоров Ярошенко, Слешинского, Тимченко и Кагана Шатуновскому было позволено в виде исключения сдать магистерские экзамены, открывавшие дорогу к преподаванию [134]. Должность приват-доцента Шатуновский получил лишь на 47-м году жизни, а после1917 года стал профессором Новороссийского университета. С 1905 года Шатуновский читал математический анализ, используя понятия и методы теории множеств. Первые понятия математического анализа изложены с позиции теории множеств, но русская терминология отличается от современной, так, например, множество названо комплексом. Он даёт систему построения вещественных чисел, вводит понятие сходящегося комплекса (плотного множества). Впервые вводится понятие устранимого разрыва функции. Его

§10, pp.572-576. Одна из первых попыток такого изложения сделана была ещё Аристотелем с целью выяснить природу движения и опровергнуть парадоксы элеатов…– *примечание Тимченко*.

[153] См. G. Cantor. Math. Ann. 1872 . T. V §2 или Acta Mathem. T. II, 4, 1883; Extention d`un théorem de la théorie des séries trigonométriques, p. 343 – *примечание Тимченко*.

[154] Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики – журнал, выходивший в Одессе в 1886 по 1917 годы.

терминология самобытна, но изложение строго. Этот курс был литографирован в 1906–1907 гг. и переиздан в 1923 году [137]. Слушателями курса были Г.М. Фихтенгольц, Д.А. Крыжановский, И.В. Арнольд. Несомненное влияние этого курса мы видим в «Основах математического анализа» Г.М. Фихтенгольца (1888–1959), закончившего Новороссийский университет в 1911 году.

Поражает научное чутьё Шатуновского при выборе работ для перевода. Он первым перевёл работы Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа» (написана в 1872 г., перевод Шатуновского 1894 г.) и Кантора «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (написана в 1874 г., переведена в 1896 г.). Именно в этих двух работах создаётся новая концепция числа, ставшая основой математики XX века.

В Одессе с 1886 по 1917 год выходил журнал «Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики». В 1896 году в 233 номере там была опубликована статья О.С. Шатуновского «Доказательство существования трансцендентных чисел (по Кантору)» [136]. Шатуновский изложил доказательства теорем из работы Кантора 1874 года «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел», но с добавлением его более поздних достижений, в частности, понятия мощности, которое появилось у Кантора только в 1878 году в работе «К учению о многообразиях».

С 1904 по 1925 год в Одессе существовало издательство математической и физической литературы «Матезис» (знание). Организаторами были преподаватели – математики Новороссийского университета В.Ф. Каган, С.О. Шатуновский (научный редактор), астроном А.Р. Орбинский и владелец типографии М.Ф. Шпенцер. Наряду с учебниками для средних и высших учебных заведений в издательстве выходили переводы новинок зарубежной математики. В «Матезисе» несколько раз переиздавались названные работы Дедекинда и Кантора в переводе Шатуновского. Например, 4-е издание вышло в 1923 году [27].

Москва, 1900 г. Б.К. Млодзеевский. Московские математики были в курсе научных достижений Западной Европы благодаря поступлению литературы, научным командировкам. Студенты для подготовки к магистерскому званию по крайней мере один семестр слушали лекции в научных центрах Германии и Франции. Лекции, читаемые в Московском университете, включали информацию о научных достижениях. Теорию функций действительной переменной в Московском университете читал Болеслав Корнелиевич Млодзеевский (1858–1923). Благодаря теории множеств курсы математики и прежде всего теории функций перестраивались на новой основе. Млодзеевский использовал в качестве опорного курс Улисса Дини, который уже в 1870-е годы использовал результаты Кантора в своём курсе [82, 109]. Впервые Млодзеевский прочитал этот курс в осеннем семестре 1900 года, и читал ещё несколько раз до 1908 года (там же).

В архиве П.А. Флоренского, тогда студента з курса математического факультета, был найден конспект лекций Млодзеевского, прочитанных в 1902 году. Курс состоял из 29 лекций (три раза в неделю). Судя по конспекту, Ф.А. Медведев предполагает, что «Млодзеевский по-видимому, не был в то время непосредственно знаком с трудами Г. Кантора. Фамилия последнего и многочисленные принадлежащие ему теоретико-множественные и теоретико-функциональные результаты упоминаются в лекциях неоднократно. Но судя по характеру этих упоминаний (отсутствие прямых ссылок на канторовские работы, указания, что те или иные соображения излагаются по одной из перечисленных выше работ и так далее), правдоподобно предположение, что к 1902 году Б.К. Млодзеевский знал о работах Кантора из вторых рук, главным образом по работам П. Таннери, Ж. Таннери и А. Шёнфлиса» [82, с. 134]. В лекциях Млодзеевского теория множеств используется для изложения учения об аргументе функции. Рассматриваются точечные множества («группы точек») и функции на них, вводится понятие предельной точки и производного множества; разделение множеств на первый и второй род; формулируется теорема о равенстве нулю меры множества первого рода; верхней и нижней границы; понятие мощности множеств, счётности («счётовости») множеств рациональных и алгебраических чисел; равномощность континуумов разных измерений; счётность счётной суммы счётных множеств, несчётность континуума с упоминанием гипотезы континуума; совершенные множества; порядковый тип («порода»), полная упорядоченность («благоустроенная группа»); порядковые трансфинитные числа и алефы [там же, с. 138–139].

Москва, 1904 г. П.А. Флоренский. Павел Александрович Флоренский (1882–1937), с 1900 по 1904 год был студентом математического факультета Московского университета. В осеннем семестре 1902/03 учебного года он слушал курс лекций Млодзеевского, из которого узнал о теории множеств Кантора. С 1903 года Флоренский готовил диссертацию «Идея прерывности как элемент миросозерцания», предисловие к которой опубликовано в Историко-математических исследованиях в 1986 году [127]. В ней Флоренский пишет о канторовской трактовке непрерывности.

Второй раз Флоренский обратился к учению Кантора в 1904 году в работе «О символах бесконечности (Очерк идей Кантора)» [128, т. I, с. 79-128]. Флоренский поставил себе целью пересказать смысл работ Кантора. Он излагает развитие понятий потенциальной и актуальной бесконечности в истории философии и переходит к изложению теории трансфинитных чисел Кантора. При этом он в основном обращается к поздним работам Кантора, которые тот написал для философского обоснования своего понимания бесконечности и теории типов – «О различных точках зрения на актуально бесконечное» 1886 года и «К учению о трансфинитном» 1888 года. Начиная с IV по VII главы своего сочинения [там же, с. 109–120], Флоренский пересказывает учение Кантора о точечных множествах («группах»), их «вполне определённости», упорядоченности («устроенности»), вполне упорядоченности («вообще устроенной группы», например, трёхкратно упорядоченной), соответствие взаимное и однозначное, эквивалентность, в том числе для бесконечных множеств («трансфинитных групп»), всюду плотные множества, порядковые типы, мощность и её связь с эквивалентностью; эквивалентность целого и части для бесконечных множеств; конечные (нетрансфинитные) и бесконечные множества; алгебра трансфинитных чисел, мощность счётного множества («счётовой группы») как наименьшее из трансфинитов, алеф-нуль, шкала («ска́ла») алефов; классы типов. Учение Кантора, хоть и в сокращённом виде, изложено верно, преимущественно это пересказ двух названных статей. Флоренский сосредоточился на философском аспекте учения, тяготеющего к философии религии. Он ставит Кантору в заслугу введение символов актуальной бесконечности. Далее Флоренский пытается понять научную мотивацию Кантора, истоки которой ищет в его биографии, хотя сам и признаёт, что «биографические данные о Канторе нигде не опубликованы и поэтому фактический материал чрезвычайно скуден. Приходится интерполировать чутьём, но, создав *себе* представление о его личности, чрезвычайно затруднительно доказать правомерность своего взгляда» [там же, с. 120, курсив оригинала]. Упорство и целенаправленность научного пути Кантора Флоренский приписывает еврейской религиозности, усиленной до самопожертвования. Мы можем учесть молодость двадцатидвухлетнего Флоренского, взявшегося интерполировать, а точнее проецировать свои воззрения (и воззрения Вл. Соловьёва) на внутренний мир незнакомого ему учёного, смешивая понятия национальности и религиозной принадлежности. Сейчас уже известно, что Кантор был лютеранином, родившись в семье лютеранина-отца и матери-католички; что лишь его дед по мужской линии был иудеем, а в следующем поколении как отец, так и брат, и сестра, были лютеранами, ещё одна из сестёр отца была православной. Мужская линия восходит к португальским евреям, поселившимся в Копенгагене; женская линия – к австрийским чехам и венграм, католикам [110]. Имея родителей разных конфессий, Георг Кантор не был очень религиозен, а впоследствии, в поисках теологического обоснования понятий своей теории, он консультировался только с католическими богословами, хотя апеллировал ко всей философской литературе, посвящённой проблемам бесконечности и континуума.

Флоренский полагал, что абсолютное постигается в символах [128, т. I, с. 126], и потому абсолютизировал стремление Кантора создать символы трансфинитов. «Если Кантор, как личность, является живейшим образцом еврея, то его мировоззрение носит характер того же едва ли не в большей степени» [там же, с. 127]. Вновь смешивая этнические и конфессиональные характеристики, Флоренский делает вывод, что именно поэтому Кантор рассматривал актуальную бесконечность: «Идея законченной бесконечности, как у абсолютной личности – Бога, так и у человеческой, есть достояние еврейства, а эта идея есть, кажется, самое существенное основание у Кантора. В то время как другие, арийцы, признают только потенциальную бесконечность, «дурную», неопределённое и неограниченное, его душе мысль о невозможности актуальной бесконечности кажется чудовищной» [там же, с. 127].

Увлечение Флоренского философской стороной теории Кантора разделяли А.Ф. Лосев (хотя Лосев не читал самого Кантора, в его статьях среди ссылок на литературу присутствует только интерпретация учения Кантора в статьях П. Таннери, но нет работ самого Кантора) и другие московские философы [111].

К первому десятилетию XX века учение Кантора распространилось в математических кругах Европы и России. На его основе в работах Лебега, Бореля и Бэра зародилась теория меры. В Москве с 1911 года начинает формироваться школа теории функций, а затем и дескриптивной теории множеств, у истоков которой стояли Д.Ф. Егоров и Н.Н. Лузин.

Казань, 1904–1908 гг. А.В. Васильев. Александр Васильевич Васильев (1853–1929) с 1874 года после окончания Петербургского университета работал в Казанском университете сначала приват-доцентом, с 1887 года профессором. Его широкая образованность, знание языков, многочисленные контакты с зарубежными учёными позволили ему стать хорошим организатором и просветителем. Он занимался как научной, так и общественно-политической деятельностью, пропагандировал идеи Лобачевского, подготовив к изданию собрание его сочинений. В Казани до 1855 года работал дядя Георга Кантора, Дмитрий Иванович Мейер (1819–1856), известный юрист и создатель русского гражданского права [110]. В кабинете Васильева висели два портрета – Лобачевского и Мейера. Васильев был знаком с Кантором по переписке и пропагандировал его идеи.

С 1904 по 1908 гг. в издательстве Казанского университета выходит «Введение в анализ» А.В. Васильева с изложением начал теории множеств. Как пишет С.С. Демидов, «Мало-помалу курсы математического анализа начинают выстраиваться на современный лад. Здесь первенство принадлежит математикам Одессы (С.О. Шатуновский), Киева (Б.Я. Букреев), Казани (А.В. Васильев)» [33, с. 77].

С момента появления учения Кантора прошло около 30 лет. За это время учение обогатилось как трудами последователей, так и критикой оппонентов, благодаря чему приобрело законченную форму. Вся теория заключалась в 10 основных статьях Кантора. Первая обобщающая монография Шёнфлиса появилась в 1900 году, но и она была не полна. Необходимо было целостное изложение теории.

Теория множеств Кантора состоит из двух частей: теория линейных точечных множеств и теория трансфинитных чисел. Млодзеевский разделил задачу целостного изложения теории между двумя диссертантами: В.Л. Некрасовым и И.И. Жегалкиным. Некрасов должен был полно изложить теорию точечных множеств, а Жегалкин – теорию трансфинитных чисел, и каждый должен был добавить к изложению собственные результаты. Оба диссертанта справились с поставленными задачами. Млодзеевский оппонировал на обеих защитах. Обе защиты состоялись в 1908 году. Жегалкин защитился 12 марта, Некрасов 4 октября. Магистерские диссертации были изданы годом раньше и стали первыми в России монографиями по теории множеств.

Москва–Томск, 1907 г. В.Л. Некрасов. Владимир Леонидович Некрасов (1864–1922) окончил Казанский университет, где и был оставлен преподавателем, а в 1900 году переведён в открывшийся Томский технологический институт на кафедру чистой математики. Для приготовления магистерской диссертации с 1902 по 1903 был в Европе в научной командировке. Его магистерская диссертация «Строение и мера линейных точечных областей[155]» была опубликована в 1907 году в «Известиях Томского технологического института» [85].

Глава I содержит обстоятельный исторический очерк основных результатов теории множеств и теории меры с исчерпывающим библиографическим обзором. Список литературы расположен в хронологическом порядке от 1638 до 1907 года. В третьей главе «Новейшие работы» Некрасов дополняет его литературой, появившейся к моменту поступления рукописи третьей главы в печать. Как пишет Н.Н. Круликовский: «До появления в 1928 году книги А. Френкеля «Введение в теорию множеств», в которой библиография доведена до 1928 года, библиография В.Л. Некрасова была наиболее полной. В историческом обзоре проявляется стремление автора отделить теорию точечных множеств от абстрактных множеств» [63, с. 24]. Мы можем видеть это из следующих слов Некрасова: «Что касается размера, то ещё *Cantor*`ом было установлено, что точечные области могут быть конечны, счётны или иметь размер непрерывности. Выяснение же того, в каком отношении последний размер находится в ряду *алефов*, входит в задачи теории трансфинитных чисел и нас здесь не занимает» [85, т. 5, с. 98]. Некрасов, начиная рассматривать историю от открытия бесконечно малых Ньютоном и Лейбницем, пишет, что «родоначальником в современной теории областей был *Bolzano*, но развил и поставил её на строго научную почву *G. Cantor*» [там же, с. 2, курсив оригинала]. В третьей главе Некрасов добавляет к числу предтеч и Галилея с его примером о соответствии бесконечных множеств натуральных чисел и их квадратов [там же, с. 225]. Как фундаментальные, Некрасов выделяет введённые Кантором понятия предельной точки и произвольного множества. Далее он приводит основные положения теории точечных множеств, называя три основные характеристики линейных областей: размер, строение и меру.

[155] «Область» у Некрасова понимается как множество.

Вторая глава содержит собственные результаты Некрасова по строению линейных множеств, соответствующих трём типам размещений и их комбинациям, как для замкнутых, так и для открытых множеств. Структура точек разрыва функции является приложением результатов Некрасова. Заметим, что Некрасов, пожалуй, первым отметил приоритет Улисса Дини в классификации точек разрыва [там же, с. 102]. Третья глава содержит дополнения в виде новой литературы и исторического упорядочения развития идей теории множеств. В четвёртой главе приведено учение о мере А. Лебега и В. Юнга, хотя начало теории меры Некрасов выводит от Римана и Ганкеля. Некрасов отмечает факт признания теории Кантора: «Право на существование и роль учения об областях в общей системе науки является упроченным: с этим учением считаются и в настоящее время нельзя уже избежать его влияния в целом ряде отделов анализа. И вся эта эволюция произошла в течение каких-нибудь 30-ти лет, не считая её так сказать, доисторического периода» [там же, с. 97].

Благодаря тщательному историческому анализу, скрупулёзному изложению теории точечных множеств Кантора и собственным результатам Некрасова монография сохранила значимость и по сей день.

Москва, 1907 г. И.И. Жегалкин. Иван Иванович Жегалкин (1869–1947) после окончания Московского университета читал в 1906-1907 годах курс абстрактной теории множеств, в 1907 году опубликовал монографию «Трансфинитныя числа[156]» (Жегалкин, И. Трансфинитныя числа. Москва: Университетская типография. 1907 г. на внешней обложке и 1908 г. на титульном листе. [41]), и в 1908 году защитил на эту тему магистерскую диссертацию. Впоследствии он возглавил исследования по математической логике, в которой получил крупные результаты, связав классическую логику и арифметику вычетов по модулю 2. Кольцо вычетов по модулю 2 называют алгеброй Жегалкина. В последующих работах он доказал разрешимость исчисления одноместных предикатов.

В диссертации Жегалкин излагает алгебру трансфинитных чисел Кантора по-своему, дедуктивно. Совсем нет списка литературы, только несколько упоминаний работ Кантора, Дедекинда, Цермело и Бернштейна. Главным образом, даётся переработанное изложение последней статьи Кантора 1897 года «К обоснованию учения о трансфинитных множествах». Жегалкин иначе излагает вводную часть, надеясь избежать тех противоречий теории, которые стали известны к началу XX века, связанных с проблемой вполне упорядочения и теоремы Цермело. Некоторые доказательства Кантора Жегалкин дополняет более строгими соображениями. Аксиома выбора была сформулирована Цермело в 1904 году и вызвала немало споров. Жегалкин, учитывая эту полемику, разделяет положения теории множеств на

[156] Автор выражает признательность П.Н. Антонюку за подаренную монографию Жегалкина.

зависящие и независимые от аксиомы выбора. Заслугой его является утверждение о независимости проблемы выбора от остальных постулатов математики, высказанное задолго до Серпинского и Гёделя.

В первой главе Жегалкин пытается построить теорию количественных и порядковых чисел до введения понятия конечного и бесконечного. Он вводит понятие конечного множества, упорядочения и полного упорядочения; понятие суммы, произведения и отображения множеств, собственное понятие ненастоящего множества. Во второй главе рассматривает отношение эквивалентности, мощности (как количественного числа), операции сложения, умножения и возведения в степень мощностей, чем заканчивает теорию мощностей. Третья и четвёртая главы посвящены понятию упорядоченного множества и понятия типа, а также их свойствам. В пятой главе рассматривается вполне упорядоченное множество и теорема Цермело (всякое множество можно мыслить вполне упорядоченным множеством [там же, с. 149]). Жегалкин доказывает возможность упорядочить семейство множеств для случая попарно непересекающихся множеств (Жегалкин называет их обособленными), а именно: «Пусть $M = \{m\}$ – какое угодно неупорядоченное множество. Рассмотрим множество всех его частей, которые будем обозначать символом M', причём «нуль-часть» исключаем из рассмотрения (но не само *M*). *Мы мыслим, что в каждой части* M' *мы выбрали произвольно какой-нибудь элемент* m'*, который будем называть «отмеченным» элементом этой части*. В возможности мыслить это мы убеждаемся так: если M' – какая-нибудь часть, то каждый элемент её, мыслимый как принадлежащий именно ей, а не иной какой части, даёт новую вещь, совокупность которых образует множество N', эквивалентное M'. Так как каждому M' соответствует своё N', то мы получаем систему уже обособленных множеств N'. Пусть P какое-нибудь определённое множество, в которое входит по одному элементу из каждого N'.

Если теперь M_1' определённая часть, то в P входит только один элемент из соответствующего ей множества N_1', и этот элемент будет некоторый элемент m_1' из M_1', мыслимый в его принадлежности к M_1'. Его, то есть m_1', мы и назовём отмеченным элементом в M_1'. Очевидно, как каждая часть имеет один определённый отмеченный элемент, так и для каждого элемента m' найдётся часть, в которой он отмечен, например, особое множество из одного его самого» [там же, с.150, курсив оригинала].

В шестой главе исследуются свойства порядковых чисел, то есть типов вполне упорядоченных множеств. Жегалкин подчёркивает важность введения порядковых отношений между ними, выделяя теорему о том, что всякое [порядковое] число есть тип множества всех чисел, меньших его. Только после того, как построена теория количественного и порядкового числа, он рассматривает в седьмой главе конечные множества и числа, из них как множество всех конечных чисел получает в восьмой главе счётные множества. В девятой главе вводится сравнение мощностей; в десятой и одиннадцатой главах изучаются общие свойства типов счётных множеств (чисел второго класса по Кантору). Двенадцатая глава посвящена образованию последовательности алефов, в тринадцатой главе изучается мощность степени. Завершается монография перечислением известных к тому моменту парадоксов. Фактически Жегалкин сделал попытку построить непротиворечивую и полную арифметику трансфинитных чисел, но он базировался на понятии конечного множества, не определив его строго, и переносил отношения между конечными числами на трансфиниты. Он исследовал также числа выше II класса, чего не было у Кантора. В последней главе Жегалкин рассматривает теорему Кёнига 1905 года для счётного множества множителей и даёт её первое доказательство для любого количества множителей [там же, с. 337], до Журдена и Цермело. Анализ его доказательства сделал Ф.А. Медведев в [81, с. 228-233].

Московская школа теории функций и множеств. В 1910 году в Московском университете начал работу семинар Д.Ф. Егорова по теории функций, в 1911 году с теоремы Егорова о равномерной сходимости началась история Московской школы теории функций, во главе которой стояли Егоров и Н.Н. Лузин. Исследования Лузина создали новое направление – дескриптивную теорию множеств, исследования его учеников развивали многочисленные направления на основе теории множеств – теорию меры, теоретико-множественную топологию, функциональный анализ, теорию вероятностей и многие другие.

Петербург–Одесса, 1914 г. П.С. Юшкевич. Три основные работы Кантора уже в переводе, а не в пересказе, вышли в 1914 году. С 1913 по 1915 год Васильев издавал в Петербурге серию «Новые идеи в математике». Он привлёк к переводу работ Кантора философа и переводчика философской литературы Павла Соломоновича Юшкевича (1873–1945), отца Адольфа Павловича Юшкевича. Было переведено три самых характерных работы Кантора, содержавшие квинтэссенцию его учения: «Основы общего учения о многообразиях» (Пятый Мемуар), «О различных точках зрения на актуально бесконечное» и «К учению о трансфинитном».

Мы почти не говорим здесь о личных контактах русских учёных и Кантора, упомянем лишь, что Кантор был избран иностранным членом Харьковского математического общества.

Теория Кантора в первоначальном виде (наивная теория множеств) была переработана и послужила основой новых направлений теории функций, теории меры, функционального анализа, теоретико-множественной топологии и многих других разделов математики. Непосредственно к основам теории множеств обращались отдельные русские математики, среди которых назовём чувашского математика Исайю Максимовича Максимова (1889–1976), аспиранта Лузина, работавшего в области теории множеств, теории чисел, теории функций и исследовавшего созданную им в 1930-е годы концепцию трансфинитного пространства.

Москва–Новосибирск, 1968 г. А.И. Фет. Драматическая судьба первого полного перевода Кантора на русский язык. Историю, которая будет здесь рассказана, поведала мне в июне 2014 года вдова первого переводчика всех трудов Кантора А.И. Фета, Людмила Павловна Петрова, проживающая в Новосибирске.

Абрам Ильич Фет (1924–2007), математик, философ, публицист и блестящий переводчик, родился в Одессе, закончил Томский университет, в 1948 году в Москве защитил кандидатскую диссертацию под руководством Л.А. Люстерника; в 1967 там же защитил докторскую, содержащую известный ныне результат: теорему Фета о двух геодезических. С 1955 года работал в Новосибирске. Вот что написала мне Людмила Павловна (фрагменты письма публикуются с её согласия):

«Поскольку Вы занимаетесь Кантором и вообще историей, Вам, вероятно, будет интересно узнать один эпизод из истории наследия Кантора в России. А.И. Фет перевел не только биографию Кантора, написанную Френкелем, а все его сочинения. Перевод был сделан с издания: Georg Cantor, Ernst Zermelo, ed., Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen inhalts, mit erläuternden anmerkungen sowie mit ergänzungen aus dem briefwechsel Cantor-Dedekind, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1932.

Это издание включает почти всё, что написано Кантором. Кроме того, в приложении представлены 5 писем из переписки Кантора с Дедекиндом и биография Кантора, написанная А. Френкелем.

Перевод был сделан в 1969–1970 годах, для заработка, так как осенью 1968 года, после подписания письма в защиту незаконно осужденных, А.И. Фет был изгнан с работы и оставался безработным до лета 1972 года.

Договор на перевод был заключен с московским издательством Физматлит на имя А.В. Гладкого, поскольку А.И. не имел права ни на какую работу. Когда перевод уже был готов и издательство начало работать над книгой, она была отвергнута комиссией Понтрягина (не перевод, а сама книга Кантора!)».

Понтрягин. Л.С. Понтрягин (1908-1988), академик, сделавший большой вклад в топологию и вариационное исчисление, в 1970 году возглавил созданную им группу, входящую в секцию редакционно-издательского совета (РИСО) АН СССР «Главная редакция физико-математической литературы издательства Наука». Вот что пишет он сам: «Ещё до организации группы секция приняла решение о переводе на русский язык собрания сочинений Г. Кантора. При повторном прохождении этого решения через секцию вопрос попал на группу. Ещё до того, как мы стали его рассматривать на группе, И. Р. Шафаревич при встрече в столовой сказал мне: «Кажется, я уже теперь не член секции[157], и поэтому я хочу вас предупредить относительно собрания сочинений Кантора. Кантору неправильно приписывается вся заслуга в создании теории множеств. Фактически очень значительная часть была сделана Дедекиндом. Это можно видеть из переписки Кантора с Дедекиндом. Так что следует к сочинению Кантора приложить эту переписку».

Я стал думать об этом соображении Шафаревича и пришёл к заключению, что сочинения Кантора вообще издавать не следует, поскольку привлекать внимание молодых математиков к теории множеств в настоящее время неразумно.

Теория множеств, очень популярная во времена Лузина, в настоящее время уже утратила актуальность. Моё предложение было принято группой, и книга была отвергнута. Секция с нами согласилась сразу, и это несмотря на то, что перевод сочинений Кантора уже был сделан! Так что пришлось его оплатить» [95, с. 175].

Людмила Павловна добавляет: «Лев Семенович ошибается – перевод не был оплачен.

Машинописный текст перевода 536 стр. находится в домашнем архиве. Все формулы, вставки и цветные пометы для издательства сделаны рукой А.И.Фета[158].

Когда Ф.А. Медведев и А.П. Юшкевич переводили труды Кантора для издательства «Наука», 1985, они не знали о существовании уже готового перевода Фета (или А.В.Гладкого)» (личное сообщение).

О мастерстве Фета как переводчика пишет Е. Н. Савенко:

«Проблема переводов волновала ученого на протяжении всей жизни. Выступая в 1997 г. на конференции, посвященной этому вопросу, он отмечал, что с 1960-х гг. в стране «началась эпоха безграмотных переводов» (Фет, А.И. Положение с переводами в России. Доклад А.И. Фета на конференции фонда Сороса, посвященной проблемам перевода, Новосибирск, 1997., с. 387). По его мнению, причинами такого положения были утрата умения отбора книг для перевода и низкая квалификация переводчиков. Подразумевалось не столько плохое знание языка, сколько непонимание смысла переводимого текста из-за слабой гуманитарной подготовки. Сам А.И. Фет – эрудит и интеллектуал – обладал уникальными способностями, необходимыми для качественных переводов: он точно распознавал значимые идеи и умел верно их формулировать» (Савенко Е.Н. Автор предпочёл остаться неизвестным // Гуманитарные науки в Сибири. 2011. № 3. С. 89-92).

Л.П. Петрова добавляет: «Он говорил мне, что хорошим переводом математической книги считает такой, который улучшает её. Сам А.И. рассматривал такие переводы как возможность хорошо узнать интересующую его книгу» (личное сообщение).

[157] В результате конфликта, описанного Понтрягиным, Шафаревич был исключён из секции.
[158] Заметим, что сейчас перевод Фета доступен на его сайте http://aifet.com/

Добавление автора: я переводила с немецкого языка первую биографию Кантора, написанную его учеником Адольфом Френкелем. Но увидев перевод, сделанный А.И. Фетом, я была восхищена ярким и живым языком, который делал текст полнокровным и эмоциональным, не искажая первоисточника ни на йоту. Переводчики меня поймут. Этот перевод, как и другие работы Фета, можно найти в Интернете. Полагаю, что и перевод трудов Кантора, сделанный Фетом, тоже следовало бы издать, хотя сейчас мы уже располагаем очень хорошим переводом 1985 года.

Москва–Ленинград, 1985 г. Ф.А. Медведев. В феврале 1983 года было закончено, а в 1985 году вышло издание трудов Кантора в издательстве «Наука». Оно было подготовлено А.Н. Колмогоровым (1903–1987) и А.П. Юшкевичем (1906–1993), и включало основные его работы по теории множеств, переписку Кантора с Дедекиндом и примечания Э. Цермело к немецкому изданию. Основным исходным текстом было издание 1932 года под редакцией Цермело [204]. В отличие от издания Цермело, включавшего 5 писем из переписки Кантора и Дедекинда, в русском издании 1985 года приводится в переводе Ф.А. Медведева 49 писем из этой переписки по немецкому изданию Э. Нётер и Ж. Кавайеса (Briefwechsel Cantor – Dedekind. Paris. 1937. 60 s.).

Русское издание 1985 года содержит три статьи Кантора («Основы общего учения о многообразиях», «О различных точках зрения на актуально бесконечное» и «К учению о трансфинитном») в переводе П.С. Юшкевича, изданные в 1914 году в «Новых идеях в математике»; одиннадцать статей в переводе Фёдора Андреевича Медведева, в том числе «Принципы теории порядковых типов. Первое сообщение», не входившее в сборник 1932 года под редакцией Цермело, и найденное А. Граттан-Гиннессом в рукописи, хранящейся в институте Миттаг-Леффлёра в Швеции и опубликованное им в 1970 году [272]. Эта статья была написана Кантором в 1884 году для журнала Миттаг-Лёффлера «Акта математика», но была отклонена как слишком философская.

Фёдор Андреевич Медведев (1923–1994) – математик и историк математики, всю свою жизнь посвятил истории теории множеств, автор четырёх книг и многих статей по истории теории множеств и о творчестве самого Кантора. Он не только тщательно перевёл труды Кантора, его переписку с Дедекиндом и комментарии Цермело, но и добавил свои очень ценные замечания к работам Кантора. Фёдор Андреевич был моим учителем, благодаря ему я тоже стала исследователем истории учения Кантора.

Судьба русских переводов Кантора прошла вместе с Россией её историю XX века.

5.4. Улисс Дини и развитие понятия непрерывной функции

Итальянский математик Улисс Дини работал в период расцвета математического анализа, годы его жизни (1845–1918) совпадают с годами жизни Георга Кантора, который высоко его ценил. Основные результаты Дини относятся к дифференциальной геометрии, основам анализа и рядам Фурье. Курс математического анализа, который Дини читал почти 50 лет, был основан на исследованиях П. Дирихле, Н. Абеля, П. Дюбуа-Реймона, К. Вейерштрасса и Г. Миттаг-Леффлера, и с годами обогащался результатами Г. Кантора, Э. Гейне, Р. Дедекинда, Г. Ганкеля и Г. Шварца. Во многих случаях Дини вводил более общие формулы и методы. Так, например, в области непрерывности и равномерной непрерывности функций он показал получение результатов Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера с помощью метода Э. Бетти, и подобным же образом обогатил новыми методами теорию степенных и тригонометрических рядов и теорию функций комплексной переменной. Дини принадлежит определение непрерывности функции через односторонние пределы, а также собственная классификация разрывов. В этой главе мы рассмотрим его вклад в развитие понятия непрерывности.

Улисс Дини родился 14 ноября 1845 года в Пизе в небогатой семье Пьетро и Терезы (урожд. Marchionneschi).

В Нормальной школе[159] университета Пизы он учился у Э.Бетти[160](1823–1892) и О. Моссотти[161](1791–1863). В 19-летнем возрасте представил работу (диссертацию) по приложениям теории поверхностей. Выиграв конкурс на обучение за границей, 1864–65 год он провёл в Париже, работая под руководством Ж. Бертрана и Ш. Эрмита, и за это время опубликовал семь работ по теории поверхностей. С 1866 года и до конца жизни работал профессором (с 1867 г. – ординарным профессором) Пизанского университета (в 1888–1890 гг. – ректор). Сначала он занимался высшей алгеброй и теоретической геодезией, в 1871 г. был назначен профессором анализа и высшей геометрии на место своего учителя Энрико Бетти, которому была передана кафедра математической физики. С 1877 помимо этого читал лекции по инфинитезимальному анализу. Этот курс Улисс Дини читал до самой смерти 28 октября 1918 года.

В течение 10 лет Дини был членом правительства города Пизы, и в течение 25 лет был членом Верховного света Пизы, с 1880 г. он – член Национального Парламента как депутат от

[159] Высшая Нормальная школа Пизы, основанная в 1810 г. Наполеоном по образцу Нормальной школы в Париже, входит в состав университета Пизы. Сам университет ведёт свою историю с XI века; среди его студентов, а потом профессоров в XVI веке был Галилео Галилей. Здание XVI века построил Джорджо Вазари. В 1864 году там читал лекции Б. Риман.

[160] Энрико Бетти был не только ярким учёным, но и участником борьбы за объединение Италии, соратником Гарибальди. Его научные интересы были близки интересам Римана, с которым он состоял в тесной переписке, а в годы пребывания Римана в Италии – в тесной дружбе. В молодости Бетти занимался алгеброй, затем многозначными аналитическими функциями, комбинаторной топологией, ввёл понятия, которые Пуанкаре позже назвал «числами Бетти» и «группами Бетти». Также занимался теорией упругости и уравнениями матфизики [4, с. 9].

[161] По кафедре математической физики.

Пизы. В 1892 году был назначен государственным сенатором. Его политическая деятельность была направлена в сферу образования, в частности, благодаря ему была создана Прикладная инженерная школа, Женская нормальная школа, Технический институт. В 1908–1918 гг. он – директор педагогического колледжа.

Современники вспоминают о Дини как о прямом, честном и добром человеке, который посвятил свою жизнь не только преподаванию и фундаментальным исследованиям, но и общественной деятельности, направленной на благосостояние родного города и страны [174].

Первый период научной деятельности Дини связан с дифференциальной геометрией. Он занимался изучением свойств некоторых поверхностей в русле проблематики Ж.-Б. Мёнье и Ж. Лиувилля во Франции и Э. Бельтрами в Италии.

Методы высшей геодезии, которыми виртуозно владел Дини, позволили ему более простым способом заново вывести некоторые приближённые формулы Даламбера и формулы расчётов географических координат и длины дуги меридиана, сделанных ранее французскими инженерами.

В алгебре Дини сформулировал теорему о верхней и нижней границе для модулей корней алгебраических уравнений.

Ещё одна область исследований, вклад в которую внёс Дини, – это дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и в частных производных, к которым Дини обращался в течение полувека.

Известна теорема Дини о равномерной сходимости рядов и признак Дини поточечной сходимости рядов Фурье [229]. Его идеи относительно непрерывности рядов и непрерывных функций развивали Ч. Арцела и М. Краузе.

Дини, будучи студентом-геометром, заявил о себе как о серьёзном аналитике, опубликовав восемь работ. Первые десять лет творческой работы он предпочитал заниматься теорией поверхностей. По мере знакомства с аналитическими методами школы Вейерштрасса, он заинтересовался рядами Фурье, а затем инфинитезимальным анализом. Уже в работах [224-226], наряду с использованием методов классического анализа видны попытки нового подхода и ощущение потребности в новых методах. Он чувствовал неудовлетворительность методов доказательств, недостаточность базовых принципов, лежащих в основе анализа, и прежде всего, теории функций действительной переменной. Но эти же годы обогатили математический анализ работами математиков школы Вейерштрасса. В 1872 году появились работы Кантора [50, с. 9-17], Гейне [333] и Дедекинда [222], посвящённые расширению понятия числа и непрерывности. 1875–1885 – это годы создания Кантором теории множеств.

Дини, работая самостоятельно, постепенно приходил к новой концепции непрерывности и к теоремам об ограничениях в теории рядов и дифференцировании, благодаря чему его курс теории функций действительной переменной приобрёл законченный вид, включающий все основные разделы, и имеющий оригинальное изложение. В 1870-х годах Дини благодаря переписке с Г. Шварцем, познакомился с работами Э. Гейне, Г. Шварца, Г. Кантора, П. Дюбуа-Реймона и Г. Ганкеля, включив их результаты в свой курс «Основы теории функций действительного переменного».

На лекциях Дини увлекал студентов не только строгим изложением материала, но и оживлёнными дискуссиями по поводу проблемных вопросов.

Учеником Дини был Вито Вольтерра, который обратился к математическому анализу после лекций Дини.18-летний Вольтерра писал своей матери: «Мой дядя спрашивает, нравятся ли мне лекции Финци[162]. Без сомнения, они прекрасны; он такой лектор, который представляет вещи упорядоченно и ясно, он никогда не смущается, он *безупречно* чёток, правильно говорит, он хорош и добр; лучшего преподавателя алгебры невозможно и пожелать. Но я всё же предпочитаю Дини, который читает лекции чуть сбивчиво, который временами объясняет и объясняет, не делая никаких заключений, а временами бывает немного невразумителен. Я предпочитаю его, потому что он вкладывает всю душу в лекции, потому что вещи, которые он объясняет, это почти всегда его собственные открытия – по крайней мере, метод действительно его собственный. Он говорит просто и немного смущённо, но в конце его идеи бесконечно более ясны, более лаконичны, и, что важнее всего, более точны, чем у Финци. Лекции Дини всегда интересны» [266, с. 39].

«Основания теории функции действительного переменного» 1878 года [228] – это фундаментальная работа, создание которой началось в 1871/1872 годах, дополнялось по мере получения новых результатов самого Дини и его коллег. В 1875 г. были готовы первые девять глав, остальные в январе 1877 г. В том же 1877 г. вышла статья «О функциях, нигде на интервале не имеющих производной» [227], посвящённая специальным вопросам анализа. В ней обобщаются результаты Дюбуа-Реймона и Ганкеля, посвящённые функциям с бесконечной сингулярностью. Дополненное издание «Оснований теории функций действительной переменной» [230] на немецком языке вышло в 1892 г., что расширило влияние методов Дини. Последнее расширенное издание выходило в 1907–1915 годах под названием «Лекции по инфинитезимальному анализу» [231]. Этот трактат в итальянской литературе считается наиболее полным курсом математического анализа в итальянской литературе [378].

Георг Кантор высоко ценил этот курс Дини. 28 декабря 1878 г. в письме к Дедекинду он писал: «Вы должны несомненно располагать книгой «Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali» (Pisa 1878) Улисса Дини. Этот труд, как мне кажется, выполнен человеком,

[162] Чезаре Финци был преподавателем алгебры в университете Пизы и другом семьи Вольтерра.

знающим свой предмет и весьма искусным. При введении чисел он пользуется Вашим методом» [50, с. 350].

Методологическая база Дини, обусловленная опытом дифференциальной геометрии, в анализе бесконечно малых очень сильна и отличает его курс от курсов других аналитиков. При анализе поведения функции в области он работает с окрестностью точки как хирург. Дини рассматривает много примеров функций, подтверждающих или показывающих границы применения утверждений, приводит контрпримеры. Дини – мастер тонкого рассуждения и детального изложения.

В основу курса положены лекции, прочитанные им в университете Пизы в 1871/72 годах. Этот курс создавался, когда уже был разработан анализ Вейерштрасса; дополнялся определением действительного числа, данным в 1872 году Кантором, Гейне и Дедекиндом, и первыми работами Кантора по теории множеств. Дини во многом продвинулся в разработке понятия непрерывности с помощью геометрических представлений и методов дифференциальной геометрии. Его индивидуальный подход отличается от главного направления разработки понятия непрерывности европейских, и прежде всего немецких математиков, что было обусловлено в 1870-е годы скудным и запоздалым снабжением литературой и невозможностью поездки в Германию, о чём пишет Джино Лория [378, с. 137-150].

Дини принадлежит новое определение непрерывности функции в точке с помощью левого и правого предела. Все эти теоремы он сохранил в издании 1907–1915 годов [231]. Непрерывность числовой прямой и понятие числа Дини излагает по Дедекинду, но придаёт большее значение пределам слева и справа. Определение функции даётся по Дирихле. Разрывы функций Дини сначала классифицирует по Риману (разрыв устранимый или нет), затем вводит новую классификацию (конечный или нет, односторонний или нет). Используемые Дини обозначения $f(a-0)$ и $f(a+0)$ принадлежат Дирихле. Теорему Кантора о равномерной непрерывности Дини излагает на основании сообщения Шварца. Доказательство большинства теорем проводится с использованием леммы Гейне. Первичные понятия точечных множеств, предельной точки, верхней и нижней границы и производного множества излагает по Кантору.

В 1879 г. Кантор писал: «В недавно появившемся труде Дини мы находим понятие производного множества, развитым ещё далее тем, что он взял его за исходный пункт ряда замечательных обобщений известных аналитических предложений» [50, с. 40].

В 1877 году Дини приостановил публикацию «Основ теории функций действительного переменного» в 1877 году, чтобы дополнить её новыми результатами П. Дюбуа-Реймона, И. К. Томе[163] и Ж. Дарбу, и добавить свои новые результаты.

В первой главе изложена теория иррациональных чисел Дедекинда, дополненная Шварцем, во второй главе – теория числовых или точечных множеств Кантора[164].

В третьей главе вводится понятие предела, верхнего и нижнего предела[165]. В качестве примера Дини приводит ряд $\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...$, впервые появившийся в 1748 году у Эйлера во «Введении в анализ бесконечных» т. I [142, с. 266], затем в 1822 году в «Аналитической теории тепла» Фурье [258, с. 227], и наконец, упомянутый Абелем в 1826 году в работе [157] в качестве контрпримера к ошибочному утверждению Коши 1821 года [209, с. 120] о сходимости ряда непрерывных функций к непрерывной функции, исправленному Коши в 1853 г. [212]. Этот ряд, при $x=\pi$ равный нулю, а справа и слева от этой точки равный соответственно $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$, является для него наглядной демонстрацией важности введения односторонних пределов. Дини пишет: «Отметим, однако, что нигде раньше у других авторов нет никакого упоминания о пределе y для $x = a$ (справа и слева), когда значение y_a не определено и/или когда они известны, но отличаются в пределе, или когда, наконец, не хотят рассматривать совокупность других значений y слева и справа от a, потому что этот процесс в $x = a$ больше не имеет смысла, и потому то же значение y_a должно на самом деле определять другой процесс. И вообще, когда мы говорим о пределе, идея в том, что это недостижимая величина» [228, с. 26]. Сохраняя все прежние методы анализа, Дини обозначает новые проблемы анализа с помощью односторонних пределов.

В четвёртой главе рассматривается общее понятие функции одной переменной в интервале, в пятой главе даны общие свойства конечных и непрерывных функций с использованием теоремы Кантора о равномерной непрерывности, известной Дини по сообщению Шварца. В шестой главе рассмотрены линейно разрывные функции Ганкеля. Седьмая и восьмая главы посвящены рядам и производным.

В девятой главе изложен принцип сгущения особенностей Ганкеля, в десятой определяется общий класс аналитически простых функций, нигде не имеющих конечную производную. Дини использует пример Дюбуа-Реймона 1875 года из статьи «Попытка

---

[163] Thomae K. J., 1840–1921.

[164] К этому времени ещё не появилось «Учение о многообразиях» Кантора, первая часть которого вышла в 1878 году. Дини знал статьи Кантора 1872 и 1874 года, в которых было изложено понятие действительного числа (числовой величины – использовался этот термин), первые понятия числовых множеств, в том числе понятие предельной точки и производного множества.

[165] Эти понятия были введены П. Дюбуа-Реймоном.

классифицировать произвольные функции действительного аргумента по их изменению на наименьшем интервале» [234][166].

В 10-й главе приведены общие рассуждения о конечных и непрерывных функциях и их производных дополнениями их новыми результатами, появившимися после публикации седьмой главы. Дини отмечает [228, с. VII-VIII], что большинство исследований по функциям носят настолько общий характер, что они не зависят от возможного аналитического вида самих функций, конкретизация возможна только с учётом их некоторых общих свойств. Изучают всегда конечную и непрерывную в промежутке функцию с учётом некоторого набора частных свойств, это позволяет сделать некоторые конкретные выводы, которые было бы трудно сделать в общем случае. В конце главы содержатся некоторые обобщения определённых интегралов. Дини обращает внимание на проблему, обозначившуюся в математическом анализе – различие аналитического и структурного описания и соответственно анализа свойств функции. Как отмечал позже Лузин, это привело к появлению дескриптивного и конструктивного направлений в математическом анализе [71, с. 50-51]. Исследования Дини легли в основу современного анализа.

5.5. История методов сходящихся последовательностей и вложенных отрезков. Эквивалентность концепций непрерывности

Идея принципа вложенных отрезков или эквивалентное ей представление о сходящихся последовательностях берёт своё начало в античности. Архимед вычислял искомое с избытком и недостатком, приближая двумя последовательностями величин – объемлющих и объемлемых. Представление о точке, лежащей в последовательности вложенных отрезков, высказал Ж. Буридан. Поиск искомой величины с помощью приближения с избытком и недостатком использовали П. Ферма, Д. Грегори, И. Ньютон, К. Маклорен, К. Гаусс, Ж.-Б. Фурье. Эта логическая конструкция превращается в метод обоснования анализа в XIX веке в работах Б. Больцано, О.-Л. Коши, П. Дирихле, Ш. Мере, Э. Гейне, Г. Кантора, Г. Дарбу. В семидесятых годах XIX века было построено несколько концепций действительного числа. Построение Кантора было основано на понятии предельной точки и принципе вложенных отрезков. Генезис этой идеи, уходящей корнями в античность, мы и рассмотрим.

Свойство множества действительных чисел быть непрерывным, или полным, было сформулировано в виде нескольких концепций во второй половине XIX века. В основе каждой из этих концепций лежат следующие свойства множества действительных чисел: 1.Каждая

[166] Заметим, что один из таких примеров был дан Дюбуа-Реймоном ранее в том же журнале Крелле-Борхардта в 1872 году [233].

последовательность замкнутых вложенных интервалов имеет непустое пересечение, и верна аксиома Архимеда. 2. Каждое ограниченное подмножество имеет верхнюю грань. 3. Каждая последовательность Коши сходится и верна аксиома Архимеда. 4. Каждое бесконечное ограниченное подмножество имеет предельную точку (свойство Больцано-Вейерштрасса). 5. Каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Эквивалентность этих свойств была доказана на рубеже XIX и XX веков Гильбертом. Истоком всех концепций служили античные методы пропорций и исчерпывания, но потребовалось более 2300 лет для появления концепций числа и непрерывности. История этого процесса богата и интересна, в ней ещё много неисследованного. Здесь мы проследим путь только первой из идей: метода вложенных отрезков, или что равносильно, сходящихся последовательностей.

Первая теория действительного числа была построена Евдоксом, изложена Евклидом в «Началах» и состояла из двух частей: теории отношений и метода исчерпывания, который был разработан для несоизмеримых величин и заключался в построении монотонной последовательности сумм известных величин, приближающейся с недостатком к искомой геометрической величине. Архимед в своём «досифеевском[167]» цикле: «Квадратура параболы», «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах», «О спиралях» и «Об измерении круга» при вычислении искомой величины создаёт две последовательности измеряемых величин, приближающихся к искомой с недостатком и с избытком.

В послании к Эратосфену Архимед отметил, что метод исчерпывания удобен, когда нужно обосновать правильность заранее известного результата. Чтобы найти сам результат, Архимед прибегал к эвристическому механическому методу математического атомизма. Он представлял отрезки линий состоящими из материальных точек, плоские фигуры из отрезков и тела из плоскостей, и определял расстояния между центрами тяжести [5, с. 324].

В период раннего Возрождения в Европе распространились тексты античных авторов. В университетах Парижа XII века и Оксфорда XIII века лекции профессоров заключались в чтении классиков, прежде всего Аристотеля, и их комментировании. Как заметил В.П. Зубов, для XIV века характерны «математизация» Аристотеля и «физикализация» Евклида [42, с. 622]. Учёные пытались отделить понятия точки, линии и поверхности от их физической интерпретации (споры реалистов и номиналистов). Континуум рассматривался как целостный геометрический либо физический объект (понятие числового континуума формируется лишь в XIX веке). В работах Аверроэса и Альберта Великого возникает идея последовательности и бесконечной последовательности[168] как характеристики движения; зарождается различие между

[167] Все эти работы написаны в виде писем к Досифею, ученику Конона.
[168] res successive

кинематическим и динамическим аспектами. В XIV веке эта идея была развита в трудах Вычислителей (Калькуляторов) – группы учёных Мертон-колледжа в Оксфорде. Благодаря им античная традиция оценок с помощью неравенств сменяется новой традицией точного вычисления, равенства. Их заслугой было введение в науку понятий «последовательность», «интенсивность» и «мгновенная скорость», хотя и не определённых строго.

Жан Буридан (ок.1300–1358) учился в Сорбонне у Уильяма Оккама. Интересна его концепция континуума, изложенная в «Вопросах к восьми книгам «Физики» Аристотеля», и в трактате «О точке». Буридан выделяет понятие границы, проявляет значимость геометрического понятия «касание». Буридан создаёт конструкцию, послужившую основой одного важного построения математики XIX века – последовательность интервалов, в каждом из которых содержится точка континуума: «если взять первую крайнюю точку, то можно указать часть линии, ближайшую к ней и более близкую, нежели все прочие части, которые не являются частями этой части и которых она не является частью. Но если мы возьмём несколько таких частей, из которых одна не является частью другой, то нет двух частей, одинаково близких к первой точке. Например: к первой точке непосредственно примыкает первая половина линии, первая четверть, или первая восьмая. Но среди четвертей одна предшествует всем прочим четвертям, и среди восьмых одна предшествует всем прочим восьмым. Следовательно, аналогично можно сказать о точках, а именно: поскольку все находятся совершенно друг вне друга, одна должна предшествовать всем прочим[169]» [10, с. 313].

В эпоху Возрождения растёт интерес к традиции Архимеда, оказавшей влияние на Галилея и Стевина. Метод построения последовательностей объемлющих и объемлемых величин встречается в интерполировании разностями высоких порядков в «Логарифмической арифметике» Г. Бригса, в “Méthodes de quadrature” П. Ферма, о которых он сообщал ученику Галилея Б. Кавальери; в интерполяционных формулах Д. Валлиса.

Математический атомизм возродился в XVI веке. И. Кеплер (1571-1630) использовал неделимые при вычислении объёмов. Б. Кавальери (1589-1647) в 1635 году издал «Основы учения о неделимых[170]». Кавальери высоко ценил эвристический потенциал метода неделимых, но отвергал возможность алгебраического обоснования метода, что порождало противоречия, отмеченные его учителем Галилеем. Дж. Валлис, И. Барроу и И. Ньютон пользовались продуктивным, хотя и противоречивым, методом Кавальери. Маклорен писал: «Кавальери чувствовал в равной мере и трудности и преимущества нового метода. Он так говорит о нём,

[169] Идея покрытий была высказана Больцано в 1817 году, встречается в лекциях Дирихле 1862 года, лемма о покрытиях сформулирована Гейне в 1872 году, теорема о покрытиях доказана Борелем в 1895 и обобщена Лебегом в 1898 году.
[170] Кавальери Б. (1635). Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного с приложением «Опыта IV» о применении метода неделимых к алгебраическим степеням. Том I. Основы учения о неделимых («Геометрия», Кн. I и II и «Опыт IV». Перевод со вступительной статьёй и комментариями С.Я. Лурье. М,-Л.: ГИТТЛ. - 1940.

как если бы он предвидел, что необходимо придать новой науке бесспорную форму, чтобы удовлетворить наиболее придирчивых геометров» [382, с. XLIX-L].

Таким образом, определились две тенденции, намеченные в трудах Архимеда: поиск искомого результата с помощью метода неделимых, развитого в трудах Кеплера и Кавальери, и обоснование найденного результата с помощью сходящихся с избытком и недостатком последовательностей, продолженного Дж. Грегори и К. Маклореном. Заметим, что целью решения задач было нахождение геометрической величины (длины, площади, объёма); в XVII веке этот процесс не давал определения числа как такового.

1668 год, Джеймс Грегори, «*Истинная площадь круга и гиперболы*». Шотландец Джеймс Грегори (1638-1675) был предшественником Ньютона в создании математического анализа. В 1644-1667 годах он жил в Италии, где в Падуе учился у Стефано дельи Анджели (Stefano degli Angeli), ученика Кавальери. Там же он издал два сочинения: «Истинная площадь круга и гиперболы» [277] и «Общие разделы геометрии» [276], где применил метод Архимеда для вычисления криволинейных площадей, но, как отметил он сам, в сочетании с более удобным и кратким методом неделимых, принадлежащим Кавальери. В «Геометрии» Грегори уже содержится отношение, позволяющее вычислить длину дуги с помощью элемента дуги, и многие идеи интегрального исчисления. Грегори впервые использует термин «сходимость». В работе «Истинная площадь круга и гиперболы» Грегори, выражая все соотношения в пропорциях вписанных и описанных фигур, строит последовательности, приближающиеся к истинному значению площади гиперболического сегмента с избытком и недостатком. Таким образом, традиция Архимеда получает новое развитие на базе метода неделимых[171].

На традиции Архимеда основано вычисление квадратур в интерполяционных формулах у Ньютона. В 1669 году Ньютон создал метод приближённого решения алгебраического уравнения с помощью касательных [397, с. 3-20]. В 1740 году его усовершенствовал Т. Симпсон [422], в 1768 Ж. Мюрей (J.-R.-P. Mouraille, 1720-1808) обратил внимание на необходимость условия выпуклости [153, с. 179-183], условия сходимости этого метода описал Ж.Б. Фурье в 1826 году[172] [259]. Этот метод представляет собой процесс стягивания интервала, содержащего корень уравнения. После того, как в 1922 году С. Банах сформулировал принцип сжимающих отображений [169], на его основе в середине XX века метод касательных был обобщён в работах Л.В. Канторовича (например, в [51]).

Ньютон в 1686 г. в «Математических началах натуральной философии» (Книга I, Отдел I, «О методе первых и последних отношений[173]») сформулировал 11 лемм первой теории

---

[171] «Послание к Эратосфену» Архимеда, в котором он признаёт эвристическую роль метода неделимых, было найдено только в 1906 г.
[172] Опубликовано уже после смерти Фурье, в 1831 году.
[173] Ньютон И. (1686). Математические начала натуральной философии. М.-Л.: АН СССР. VII. 1936. С.57-64.

пределов[174], в том числе следствие из IV леммы: «Если вообще две какого угодно рода величины будут разделены на одинаковое число частей и, при бесконечном возрастании числа их и уменьшении каждой из них, отношение их соответственно друг к другу, то есть первой к первой, второй ко второй и т. д., остаётся постоянным, то и самые величины будут находиться в этом же отношении» [там же, с. 59]. Эта лемма использовалась Ньютоном для нахождения площади криволинейной фигуры путём покоординатного сравнения её с известной фигурой. Это алгебраизация метода Кавальери, но неделимые у Ньютона заменены переменными, величина которых стремится к нулю.

Колин Маклорен, «Трактат флюксий», 1742 г. Шотландский математик Колин Маклорен (1698-1746) был другом Ньютона, по рекомендации которого он стал профессором Эдинбургского университета, заняв в 1726 году место Джеймса Грегори-младшего[175]. После смерти Ньютона в 1727 году его концепция анализа подверглась нападкам за недостаточную ясность и обоснованность[176]. Маклорен решил написать обоснование «Трактата флюксий» Ньютона. В 1742 году вышел его собственный «Трактат флюксий» [382], содержащий систематизированное и понятное изложение метода Ньютона. Сочинение должно было служить учебником для юношества. Маклорен стремился показать близость метода Ньютона и античного метода исчерпывания. Опытный педагог, Маклорен нашёл осязаемый образ сходимости, расположив сходящиеся величины, будь то длины, площади или объёмы, на прямой: «мы будем представлять круги и многоугольники с помощью прямых линий, таким же образом, как выражаются все величины в пятой книге Начал» [там же, с. 5]. Все величины: объемлемая, искомая и объемлющая, последовательно расположены на отрезке, то есть соотношение их наглядно. Заметим также, что у Маклорена впервые появляется термин «аксиома Архимеда».

Благодаря метафоре Маклорена, метод сходящихся последовательностей приобрёл инвариантную наглядность, которая в следующем веке позволила этому методу подняться на следующую ступень обобщения. Его конструкция ещё далека от определения числа, она сформулирована для величин.

В XVIII веке сохранялась традиция метода конечных разностных отношений, имевшая начало в работах Б. Тейлора, А. де Муавра, И. Ньютона и продолженная Дж. Стирлингом, Л. Эйлером, Ж. Л. Лагранжем. А.-М. Лежандр в «Элементах геометрии» 1794 г. [367] определял каждую геометрическую величину как число, и обратно, каждому числу ставил в соответствие геометрическую величину. Примечательно также построение Ампера 1806 года при

---

[174] Ньютон сформулировал леммы для «последних отношений» (ultima ratio), но А.Н. Крылов перевёл этот термин как «предел».
[175] Джеймс Грегори (1666-1742), профессор математики и племянник известного математика Джеймса Грегори (1738-1675), брат астронома и математика Давида Грегори (1659-1708).
[176] Венцом этой критики был «Аналист» Дж. Беркли 1734 года.

доказательстве теоремы Лагранжа о среднем значении. Он строил цепочку неравенств, в центре которой находилось оцениваемое отношение (средняя дробь), и, уменьшая шаг, приближался к искомому значению [159]. У Ампера в работе не было ни рисунков, ни геометрических ассоциаций.

Поставленная ещё Галилеем проблема оценки ошибок наблюдения развивалась в работах Лагранжа и Лапласа. В 1775-1776 годах Лагранж рассматривал вероятность погрешности в среднем арифметическом при различных законах распределения погрешностей. В 1774 году П.С. Лаплас, исследуя устойчивость солнечной системы, опубликовал «Мемуар о вероятностях причин по событиям[177]», в котором появился его закон нормального распределения. Создание теории ошибок было продолжено Гауссом. В 1809 году Гаусс в работе «Теория движения небесных тел, движущихся вокруг Солнца по коническим сечениям[178]» изложил каноническую теорию учёта возмущений орбит (§177–182). Анализируя распределение ошибок наблюдений на основе формулы Лапласа, он заключает: «Так как возможные ошибки в любом случае ограничены определёнными пределами, вероятность ошибок за этими пределами всегда должна быть равна нулю, в то время как наша формула всегда даёт некоторое значение» [там же, с. 258–260]. Гаусс обосновал этот результат, минимизируя сумму квадратов ошибок. Таким образом, принцип сходящихся последовательностей обогатился ещё одной метафорой из теории ошибок. В западной справочной литературе этот результат Гаусса называют первой формулировкой теоремы о сжатой переменной[179]. Но нужен был ещё один шаг, чтобы появилась теорема о сжатой переменной. Для этого было необходимо понятие сходящейся последовательности и непрерывной функции.

1817 год, Бернард Больцано. В 1817 году Бернард Больцано в работе «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по крайней мере один действительный корень уравнения» [179] (в русском переводе [9]), в § 6, 7 ввёл критерий сходимости последовательности частичных сумм ряда[180]. Продолжая мысль Архимеда, Больцано показывает, что если разность между частичными суммами (элементами) последовательности может быть сделана сколь угодно малой, то такая последовательность сходится к определённому пределу. Этот же критерий без доказательства повторяет в 1821 году Коши, с тех пор он стал называться критерием Коши, а последовательности, удовлетворяющие этому

[177] Laplace P. Mémoire sur la probabilité des Causes par les Événements // Mémoires l'Academie Royale des Sciences. Paris. 1774. (6). P. 621–656.
[178] Gauss C.F. (1809). Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections. With an appendix. Translated in English by C. H. Davis. Boston. – 1857. – 268 p. India: Pranava Books. Reprint 2013.
[179] Это та самая теорема, которая в учебном фольклоре называется теоремой о двух милиционерах, карабинерах, жандармах, городовых, о пьянице и двух полицейских, о трёх струнах, squeezed theorem, pinched theorem, sandwich theorem. В учебниках математического анализа она выделяется в самостоятельную теорему в XX веке.
[180] Заметим, что в русском переводе Кольмана имеются неточности.

критерию, впоследствии стали называться последовательностями Коши-Кантора. Это был первый вклад Больцано в построение концепции действительного числа. Вторым его вкладом, сделанным в этой же работе, было создание понятия точной верхней грани линейной числовой области.

Больцано интуитивно наметил основные направления дальнейшего развития концепции числа: принцип сходящихся последовательностей, принцип вложенных отрезков и понятие supremum. В 1830-е годы Больцано начал создавать концепцию действительного числа в терминах сечений [104]. Эти рукописи начали публиковать только с 1930 года.

Гениальность предвидений Больцано была оценена лишь после его смерти благодаря Герману Ганкелю, который публиковал и пропагандировал его немногие опубликованные работы. К трудам Больцано обращались К. Вейерштрасс и Г. Кантор.

1821 и 1823 годы, Огюстен Коши. Математика Франции наполеоновского периода была изгнана из университетов в технические школы и милитаризована. Основное внимание уделялось подготовке военных специалистов и инженеров, для чего были созданы Эколь Политехник и другие инженерные школы. Как сказал Риман, математика Франции была вычислительной, а математика Германии концептуальной. Курс анализа, который Коши читал в Эколь Политехник, был краток и ориентирован на приложения. Но в этом курсе содержалось систематическое изложение теории пределов, важнейшие теоремы анализа, посвящённые непрерывным функциям, дифференцирование, интегрирование и теория рядов. В то же время Коши не уделял внимания понятию иррациональных чисел, рассматривая их как пределы последовательностей рациональных чисел без определения операций и упорядочивания. Гениальность Огюстена Коши (1789-1857) заключалась в строгом и ясном обобщении достижений предшественников, на базе которых он создал стройную концепцию математического анализа своего времени, что позволило ему получить новые результаты и сформировать новые разделы математики, например, теорию вычетов.

В Курсе 1821 г., в III прибавлении «О численном решении уравнений» Коши рассматривает (без ссылки) теорему, которой была посвящена работа Больцано 1817 года. У Коши она сформулирована так: «Пусть $f(x)$ – вещественная функция переменной *x*, непрерывная в пределах между $x=x_0$, $x=X$. Если величины $f(x_0)$, $f(X)$ имеют разные знаки, то уравнение $f(x)=0$ имеет решение хотя бы при одном значении *x* между x_0 и *X*» [209, с. 378]. Коши доказывает её, разделив отрезок на m равных частей и выделяя в нём такой субинтервал, на краях которого функция имеет разные знаки. Продолжая алгоритм, Коши получает последовательность стягивающихся интервалов с длинами $\frac{X-x_0}{m^n}$, где последовательность граничных точек слева возрастает, а справа убывает. Значения функции в граничных точках, имея разные знаки, приближаются к нулю. Так как функция непрерывна, то общий предел последовательностей аргумента является корнем уравнения. Эту теорему доказывал Больцано в 1817 году, используя деление отрезка пополам и с помощью этого построения показывая непротиворечивость существования точной верхней границы. Как и во многих других случаях, Коши гениально упростил идею его доказательства и фактически формализовал теорему о сжатой переменной. Сейчас теорема о существовании корня непрерывной функции носит имя Больцано-Коши, впервые для многочленов её сформулировал Мишель Ролль в 1690 году.

В 1875 году Гастон Дарбу в «Мемуаре о разрывных функциях»[181], строит последовательности интегральных сумм, которые сходятся к интегралу справа и слева.

С 1860-х годов в математическом анализе происходят большие перемены. Новые потребности математики, связанные с появлением рядов Фурье, разрывных функций, необходимостью классифицировать множество точек разрыва, вызвали к жизни новую реформу анализа второй половины XIX века. Инициатива перешла к немецким математикам во главе с Вейерштрассом. Появляются новые концепции числа, непрерывности, равномерной непрерывности; как следствие теоремы о стягивающихся интервалах появляется лемма о покрытиях. Вейерштрасс развивает понятие непрерывности на языке эпсилон-дельта, вводя новую концепцию числа через понятия верхней грани и равномерной сходимости рядов; в 1869–1872 годах Ш. Мере создаёт концепцию числа, основанную на понятии сходящихся последовательностей Коши в 1872 году Э. Гейне формулирует концепцию, основанную на фундаментальных (сходящихся) последовательностях Кантора; в 1872 году Р. Дедекинд выдвигает свою концепцию, основанную на понятии сечения.

В 1872 году Кантор пишет первую работу по теории множеств [203; 50, с. 9-17], в которой вводит понятие предельной точки. В этой работе Кантор определяет свои фундаментальные последовательности: «Когда я говорю о числовой величине в обобщённом смысле, то это происходит прежде всего в том случае, когда предложена бесконечная последовательность рациональных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, заданная при помощи некоторого закона и обладающая тем свойством, что разность $a_{n+m} - a_n$ становится бесконечно малой при возрастании n, каково бы ни было целое положительное число m, или, другими словами, что для произвольно выбранного (положительного рационального) ε существует такое целое число n_1, что $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, если $n \geq n_1$ и m – любое положительное целое число» [там же, с. 9–10]. «Упомяну десятую книгу «Начал» Евклида, которая остаётся образцом для рассмотренного в

[181] Darboux G. Mémoire sur les fonctions discontinues //Annales de l'École Normale. 1875. 2-e Série. Tome IV. p. 57–112.

этих параграфах предмета» [там же, с. 13]. На базе понятия фундаментальной последовательности Кантор строит начала теории множеств.

Появление неевклидовой геометрии привело к необходимости анализа аксиом геометрии, понятия непрерывности и полноты. В работах Дедекинда и Пеано появилась аксиоматическая система арифметики. Системы аксиом арифметики и геометрии требовали обобщения на едином основании. В 1899 году Гильберт ввёл новую систему аксиом, в которую ввёл аксиому Архимеда и аксиому полноты:

«Аксиома измерения или аксиома Архимеда. Пусть A_1 есть произвольная точка на прямой между произвольно данными точками A и B; строим затем точки A_2, A_3, A_4,… так, что точка A_1 лежит между точками A и A_2, A_2 между A_1 и A_3, A_3 между A_2 и A_4, и сверх того, отрезки AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,… равны между собою: тогда в ряду точек A_2, A_3, A_4,… всегда существует такая точка A_n, что точка B лежит между A и A_n.

Аксиома полноты. Элементы (точки, прямые, плоскости) геометрии образуют систему вещей, которая, при условии сохранения всех указанных выше аксиом, не допускает расширения, то есть к системе точек, прямых, плоскостей невозможно присоединить другую систему так, чтоб в новой расширенной системе были по-прежнему удовлетворены вместе все аксиомы» [24, с. 20].

В XIX веке было много попыток построить геометрию без аксиомы Архимеда[182]. Этот вопрос обсуждал Д. Гильберт. Как он писал, «Выполнимость аксиомы полноты существенно обусловливается предварительным установлением аксиомы Архимеда; это значит – аксиома полноты привела бы к противоречию, если бы к аксиомам I–IV не была ещё присоединена аксиома Архимеда» [там же, с. 20].

В XX веке исследования Колмогорова показали, что аксиома полноты может быть заменена принципом вложенных отрезков (фундаментальных последовательностей Коши-Кантора) вместе с аксиомой Архимеда. В сороковые годы Колмогоров создал построение действительных чисел как функций натурального числа [55].

Уже в конце XIX века новые концепции числа, непрерывности и теория множеств вошли в курсы теории функций действительной переменной. В XX веке в России такой курс читали С.О. Шатуновский в Одессе, его ученик Г.М. Фихтенгольц в Петербурге, Н.Н. Лузин, П.С. Александров, А.Н. Колмогоров в Москве. Первое издание книги Александрова и Колмогорова «Введение в теорию функций действительного переменного» было в 1933 году, но в нём, как и в двух последующих изданиях, ещё не содержится аксиоматическое построение.

[182] Дж. Веронезе (1854–1917) в 1890 году в «Основаниях геометрии» предложил концепцию линейного неархимедова континуума [443], см. также работы О. Штольца, особенно [432].

Как пишет В.М. Тихомиров: «Осенью 1954 года третьему курсу мехмата, на котором учился автор этих строк, А.Н. Колмогоров начал читать курс «Анализ III». Это был первый синтетический (т.е. вбиравший в себя многие разделы математики) курс в истории мехмата МГУ. Программа курса была разработана А.Н. Колмогоровым в сороковые и пятидесятые годы прошлого века…

Колмогоров вводил аксиоматическое определение действительных чисел как совокупности, являющейся полным линейным упорядоченным полем. Определив алгебраические отношения и отношение порядка, перешёл к последней аксиоме – аксиоме полноты. Колмогоров называл её аксиомой непрерывности. Он привёл ряд аксиом непрерывности и доказал их эквивалентность. Эти аксиомы связаны с именами тех выдающихся математиков XIX века, кому математический анализ обязан своей логической стройностью – Дедекинда, Больцано, Вейерштрасса, Кантора и Коши.

Вот эти аксиомы:

Аксиома о сечении. (*A*) Аксиома Дедекинда о сечении. *Если множество R представлено как объединение двух непустых непересекающихся множеств X и Y, причём каждый элемент из X меньше любого элемента из Y, то существует элемент z такой, что* $x \le z \le y$ *для любых* $x \in X$ *и* $y \in Y$ (*или, что то же: либо в X существует максимальный элемент, либо в Y существует минимальный элемент*).

Аксиома о верхней грани. (*B*) Аксиома Больцано о существовании точной верхней (нижней) грани. *Любое множество* $S \subset R$*, ограниченное сверху (снизу), имеет точную верхнюю (нижнюю) грань (т.е. элемент M (m) такой, что* $x \le M \, \forall x \in S \, (x \ge m \, \forall x \in S)$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует элемент* $\bar{\xi}(\varepsilon) \in S$ ($\underline{\xi}(\varepsilon) \in S$) *такой, что* $\bar{\xi}(\varepsilon) > M - \varepsilon$ $\left(\underline{\xi}(\varepsilon) < m + \varepsilon\right)$.

Аксиома о предельной точке. (*C*) Аксиома Вейерштрасса о предельной точке. *Любая ограниченная последовательность* $\{x_k\}_{k \in N}$ *элементов из R имеет предельную точку (т.е. элемент* $\xi \in R$*, в любой ε-окрестности которого содержится элемент последовательности, отличный от* ξ).

Аксиома о сходящейся подпоследовательности. (*D*) Аксиома Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности. *Из каждой ограниченной последовательности элементов из R можно выбрать сходящуюся подпоследовательность*.

Аксиома о монотонной последовательности. (*E*) Аксиома Больцано о монотонно-возрастающей (монотонно убывающей) последовательности. *Ограниченная монотонно возрастающая (убывающая) последовательность элементов из R имеет предел*.

Аксиома о вложенных отрезках. В качестве следствия получается аксиома Кантора о вложенных отрезках: последовательность вложенных отрезков $\Delta_n = [a_n, b_n] \subset R$, $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ с длинами, стремящимися к нулю (т.е. $b_n - a_n \to 0$), имеет единственную общую точку ξ (т.е. $\xi \in \Delta_n \ \forall n$) » [125, с. 151-152].

Аксиома Дедекинда была сформулирована им в 1872 году [222], хотя предвосхищение понятия сечения высказано в работах Больцано в 1830-е годы [182]. Аксиома Больцано о существовании точной верхней грани была высказана им в 1817 году [179]; отсутствие теории действительного числа позволило Больцано доказать лишь непротиворечивость предположения о существовании верхней грани. Понятие предельной точки было использовано Кантором в 1872 году [203], и развито в лекциях Вейерштрасса [450]. Понятие сходящейся подпоследовательности впервые изложил Э. Гейне в 1872 году на основании идеи Кантора и бесед с Вейерштрассом [333].

Как говорил Дедекинд, человечество постепенно совершает восхождение по лестнице смыслов, тщательно расчленяя ряд мыслей, на которых покоятся законы чисел [223, 29, с. 5]. Рассматривая историю метода вложенных отрезков, мы видим восхождение по лестнице смыслов от античности до нашего времени. Метод неделимых существовал для поиска, метод исчерпывания для обоснования у Архимеда; понятие последовательности зародилось у Вычислителей Мертон-колледжа, обрело логическую форму у схоластов. Эпоха Возрождения вновь пробудила интерес к неделимым у Кеплера и Кавальери, способствовала синтезу методов и возникновению понятия сходимости у Грегори. Ньютон и Лейбниц создали математику переменных величин – дифференциальное исчисление. Маклорен впервые выделил роль аксиомы Архимеда. Он же создал метафору, наглядный образ сходящихся друг к другу последовательностей как последовательности вложенных отрезков. Теория ошибок измерения, основанная Галилеем, продолженная в работах Лапласа и завершённая Гауссом, дала другую метафору: распределение погрешностей по нормальному закону. Развитие понятия функции, и прежде всего непрерывной функции в работах Больцано, определило направления развития концепции непрерывности с помощью понятий верхней грани, сходящихся последовательностей и сечения. Математический анализ начала XIX века имел фундаментом достаточную для своего времени теорию пределов Коши и его теоремы о непрерывных функциях. На его основе во второй половине XIX века возникают несколько концепций числа и непрерывности: Мере, Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда. Различия этих концепций примирил Гильберт, доказав их эквивалентность, а в XX веке Колмогоров построил единую концепцию действительного числа.

5.5. Развитие понятия числовой прямой

Числовая прямая – абстрактное понятие, сформировавшееся в начале XX века, её следует отличать от телесной прямой и геометрической прямой. Телесная прямая, или отрезок – образ, возникший в античности. Геометрическая прямая, или ось, как понятие формируется в период с XVI по XVIII век в математическом анализе. Понятие прямой или кривой как геометрического места точек возникает в XVII веке в первых работах по математическому анализу [342].

Числовая прямая как концепт сформировалась в работах Кантора и Дедекинда, но сам термин, сначала «числовая шкала», затем «числовая прямая», употребляется с 1912 года: «Thus, the positive and negative numbers together form a complete scale extending in both direction from zero» [255].

Предвосхищением понятия числовой кривой можно считать континуум – философское понятие непрерывного или длительного. История его начинается в античности (Зенон, Аристотель), Средние века (Боэций), начало Нового времени (Ж. Буридан, Т. Брадвардин), затем Лейбниц.

В античности числа представлялись как совокупность натуральных и рациональных положительных чисел, образующих шкалу. Иррациональные числа π и $\sqrt{2}$ определялись приближениями. В основе рассуждения лежал метод исчерпывания Евдокса, оценки делались с избытком и с недостатком. Техника приближений достигла высот в работах Архимеда, позже в работах математиков стран Востока. В состав чисел очень долго не входил ноль. Отрицательные числа, хоть и получались иногда при решении задач (например у Диофанта), не считались полноправными числами, в редких случаях им давалась коммерческая интерпретация долга. При решении уравнений до начала Нового времени разыскивались лишь положительные корни. Иррациональные числа традиционно от Евклида понимались как неизвлекаемые корни.

Иррациональные числа назывались surdi (глухие) – например, у Ньютона; или ложные. Мнимые числа, появившиеся впервые в 1545 году у Кардано, назывались софистическими.

Впервые отрицательные числа как числа, меньшие нуля, и положительные числа, как числа, большие нуля, определил Михаэль Штифель (1487–1567). У него же ноль, а также дробные и иррациональные величины названы числами. Штифель пишет, как целые, рациональные и иррациональные числа распределены относительно друг друга.

Обратимся к книге Штифеля 1544 года «Обобщённая арифметика» [429]. Штифель устанавливает, что между двумя ближайшими целыми числами находится бесконечно много как дробей, так и иррациональных чисел. Он рассматривает единичный отрезок (2,3) и располагает в нём бесконечные последовательности

$$2\frac{1}{2},2\frac{1}{3},2\frac{2}{3},\ 2\frac{1}{4},2\frac{3}{4},2\frac{1}{5},2\frac{2}{5},2\frac{3}{5},2\frac{4}{5},2\frac{1}{6},2\frac{5}{6},2\frac{1}{7},2\frac{3}{7},\ldots$$ и

$$\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8},\sqrt[3]{9},\sqrt[3]{10},\sqrt[3]{11},\sqrt[3]{12},\sqrt[3]{13},\sqrt[3]{14},\sqrt[3]{15},\sqrt[3]{16},\sqrt[3]{17},\sqrt[3]{18},\sqrt[3]{19},\sqrt[3]{20},$$

$$\sqrt[3]{21},\sqrt[3]{22},\sqrt[3]{23},\sqrt[3]{24},\sqrt[3]{25},\sqrt[3]{26},\sqrt[4]{17},\sqrt[4]{18},\sqrt[4]{19},\sqrt[4]{20},\sqrt[4]{21},\sqrt[4]{22},\sqrt[4]{23},\sqrt[4]{24},\sqrt[4]{26},\ldots$$ [там же, с.104].

В 1596 г. Людольф ван Цейлен (Лудольф ван Кёлен, Ludolph van Ceulen, 1539–1610), в традициях немецкого расчётолюбия и следуя Архимеду, сочинения которого стали известны в Европе в середине XVI века, вычислил число π с 35 десятичными знаками, и до конца XIX века число π имело название «число Людольфа».

В отличие от Штифеля, Г. Галилей (1564 – 1642) обладал чувством связи между математикой и физикой, все его рассуждения сопровождаются примерами из оптики, механики и т.п. Линия понимается как результат движения.

В1633 году, в книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук», Галилей рассуждает о распределении чисел: «Если я теперь спрошу вас, сколько квадратов, то можно по справедливости ответить, что их столько же, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень и каждый корень имеет свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня и ни один корень более одного квадрата.

Поскольку бесконечно много чисел вообще, бесконечно много квадратов, бесконечно много корней, то ни множество квадратов не меньше множества всех чисел, ни последнее не больше первого; в конечном выводе – свойства равенства, а также большей и меньшей величины, не имеет места там, где дело идёт о бесконечности, и применимы только к конечным количествам» [19, с. 141].

Числа, которые рассматривались до XVIII века, были натуральными, рациональными и иррациональными (как неизвлекаемые корни – Кёстнер [347, с. 198]), то есть алгебраические иррациональные. Предположение том, что число π иррационально, высказывали арабские учёные, начиная с XI века [148, с. 176].

В 1748 году во «Введении в анализ бесконечно малых» Эйлер, говоря о тангенсах углов, меньших $30°$, употребляет термин «слишком иррациональный» (nimis sunt irrationals) [140, с. 120]. Там же он высказывает предположение, что кроме иррациональных алгебраических чисел (то есть получаемых в результате решения алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами) существуют ещё и трансцендентные иррациональные числа, получаемые в результате трансцендентных вычислений, например, логарифмирования. Заметим, что обозначения π и e закрепились после выхода в свет «Введения анализа бесконечно малых» Эйлера, хотя π встречалось у разных математиков с начала XVIII века. Символ π восходит к греческому περι- – вокруг, около; либо περι-μετρον – периметр, окружность; либо περι-φέρεια – окружность, дуга.

Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777) в работе 1766 года, опубликованной в 1770 году [361], в русском переводе [102, с. 121-143], доказал иррациональность чисел π и e. Его рассуждение дополнил Лежандр в 1794 году (лемма Лежандра) [там же, с. 145–155]; или[367]. Этим вопросом занимался и Фурье (1815 г.).

В 1769 году Лагранж в «Мемуаре о решении числовых уравнений» определил иррациональные числа как определяемые бесконечной непрерывной дробью.

В 1821 г. О. Коши определил иррациональные числа как пределы сходящихся последовательностей, но не определил порядок и операции над ними [208].

В 1830-е годы Бернард Больцано делает попытку построить теорию действительного числа в рукописи «Учение о величинах» (Größenlehre). Больцано использует метод исчерпывания, а также понятия, сформулированные им в 1817 г. о точной верхней и нижней границах и критерий сходимости последовательности[183]. Он вводит понятие измеримого числа, отношения «равно», «больше», «меньше», утверждает плотность (pantachisch) множества вещественных чисел. Больцано вводит бесконечно большие и бесконечно малые числа. Если бы его рукопись была опубликована и получила признание современников, возможно, мы имели бы дело с другим, нестандартным математическим анализом. Вспомним, что говорил Патнем о возникновении языка эпсилон – дельта: «Если бы Вейерштрасс не обосновал метод эпсилон–дельта, пришлось бы актуализировать бесконечно малые, как это случилось с мнимыми числами. Мы же постепенно расширяем систему вещественных чисел, всем известны работы Абрахама Робинсона» [408]. Возможно, что отношение к числам, как к изменяющимся величинам, началось с утверждения Лейбница, что $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$. У Больцано наравне с постоянными числами существуют и переменные числа, как измеримые, так и неизмеримые. Предел, или граница таких чисел, тоже может быть переменной величиной. «Если переменное, но измеримое число Y остаётся постоянно больше переменного, но измеримого X, и кроме того, у Y нет наименьшего значения, а у X наибольшего, то существует по меньшей мере одно измеримое число A, которое постоянно лежит между границами X и Y.

Если, далее, разность $Y-X$ не может бесконечно убывать, то таких чисел, лежащих между X и Y, бесконечно много.

Если же эта разность бесконечно убывает, то существует только одно-единственное такое число. Если, наконец, разность $Y-X$ бесконечно убывает и либо X имеет наибольшее,

---

[183] Этот критерий носит имя Коши, хотя у Больцано он сформулирован в 1817, а у Коши в 1821 году.

либо *Y* наименьшее значение, то не существует никакого измеримого числа, лежащего постоянно между *X* и *Y*» [104, с. 525]. Здесь уже есть предвосхищение понятия сечения, которое появится у Дедекинда в 1872 году. Но в 1830 году ещё не было известно о существовании трансцендентных чисел. Больцано был в большей степени философом, его гениальная математическая прозорливость не опиралась на профессиональную деятельность, хотя его философский подход к пониманию непрерывности сформировал направление развития концепции числа и непрерывности. Вынужденное отстранение от преподавания, отсутствие научного общения и научной литературы не позволило его идеям воплотиться в самостоятельную теорию, но его идеи вошли в теорию функций и теорию множеств.

Понятие и теорию трансцендентных чисел с 1840 г. начинает строить Ж. Лиувилль. В 1844 году он опубликовал небольшую заметку в Comptes Rendus о том, что алгебраическое число невозможно приблизить рациональной дробью [375]. Его дальнейшие исследования составили теорию трансцендентных чисел. Трансцендентность числа e в 1873 году доказал Эрмит [339], трансцендентность числа π в 1882 году доказал Линдеман [374], его доказательство в 1885 году упростил Вейерштрасс [451].

Но теория действительного числа ещё не была создана. Нельзя было строго определить ноль, больше, меньше или равно нулю. Поэтому Вейерштрасс в своих лекциях по дифференциальному исчислению 1861 года, доказывает теорему «Непрерывная функция, у которой производная внутри определённых интервалов аргументов всюду равна нулю, сводится к константе» [447, с. 118].

В 1869 году теорию действительного числа построил французский математик Шарль Мере (1835-1911) [384]. На основании сходящихся последовательностей и введя отношение эквивалентности между ними, Мере вводит понятие неизмеримого числа как фиктивного предела: «Инварианта сходится к некоему фиктивному неизмеримому пределу, если она сходится к точке, не допускающей точное определение. Если несоизмеримые пределы двух сходящихся вариант равны, то эти варианты будут эквивалентны» [385, с. 2]. Мере определяет отношение сравнения и операции над неизмеримыми числами. Но его сложный язык, неудобные термины, его удалённость от математической жизни Парижа (Мере много лет жил в деревне и занимался виноградарством, потом преподавал в университете Дижона), категорическое неприятие или незнание достижений математики после Лагранжа ограничили его теорию. Он считал, что «разрывные функции, не имеющие производных, не интегрируемые никогда не встретятся, так что о них можно не беспокоиться. Не стоит обращаться к уравнению Лапласа, принципу Дирихле, потому что производные определяются, рассчитываются, перемешиваются в дифференциальные выражения так, как этого хотел Лагранж, то есть с помощью простых операций» [106]. Поэтому его теорию не приняли современники, хотя сейчас французы называют концепцию действительного числа концепцией Мере–Кантора.

Инициатива построения концепции действительного числа переходит к немецким математикам. В 1872 году выходят работы Э. Гейне «Лекции по теории функций» [333], Г. Кантора «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов» [50, с. 9-17] и Р. Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа» [222].

Э. Гейне как профессиональный математик и преподаватель, изложил теорию числа на языке фундаментальных последовательностей, введя отношение эквивалентности и порядка. Его изложение имеет много общего с теорией Кантора, в совместных беседах с которым она и создавалась. Методически он опережает своих коллег, до сих пор в матанализе понятие предела часто даётся на языке счётных последовательностей.

Р. Дедекинд подошёл к определению числа как алгебраист, дав арифметическое определение числа. Дедекинд рассматривает свойства равенства, упорядоченности, плотности множества рациональных чисел R, (числового корпуса – термин, который ввёл Дедекинд в дополнениях к изданным им лекциям Дирихле). При этом он старается избегать геометрических представлений. Определив отношение «больше» и «меньше», Дедекинд утверждает его транзитивность; существование между двумя различными числами бесконечного множества других чисел; а также для любого числа разбиение множества рациональных чисел на два бесконечных класса, таких, что числа одного из них меньше данного, и другого, числа которого больше данного числа; причём само число, производящее это разбиение, может быть отнесено как к одному, так и к другому классу, и тогда оно будет либо наибольшим для первого, либо наименьшим для второго класса.

После этого Дедекинд рассматривает точки на прямой линии и устанавливает для них те же свойства, что и только что установленные для рациональных чисел, постулируя, что каждому рациональному числу соответствует точка на прямой линии. «Каждая точка *p* прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, т.е. в следующем: «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, – это рассечение прямой на два фрагмента. Если система всех действительных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то существует одно и только одно число, производящее это разложение» [27, с. 17-18].

Это свойство прямой Дедекинд называет аксиомой, принимая которую, мы придаём прямой непрерывность. Причём Дедекинд утверждает, что это наш мысленный акт, который производится независимо от того, является ли реальное пространство непрерывным или разрывным, это мысленное заполнение новыми точками не влияет на реальное бытие пространства.

Определение числа, данное Дедекиндом, до сих пор используется в курсах анализа как логически и категориально безупречное. Но, как заметил Кантор, в анализе невозможно пользоваться понятием числа как сечения. Как только рассматривается неупорядоченное множество, это определение бессильно.

Г. Кантор, как и Гейне, введя понятие числа на основании счётных фундаментальных последовательностей, идёт дальше Гейне: определяет понятие предельной точки, вводит иерархию предельных множеств. В работе 1874 года он доказывает счётность множества алгебраических иррациональных чисел, и несчётность множества действительных, а следовательно, и трансцендентных чисел в статье «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» [50, с. 18-21]. Теоретико-множественная терминология ещё не сложилась, понятие счётности появится у него позже, он говорит об взаимно однозначном соответствии, а вместо множества употребляет термин «совокупность». Кантор постулирует взаимно однозначное соответствие между числами и точками на прямой, он утверждает, что доказать это невозможно.

К 1878 году Кантор переходит от анализа точечных областей к понятию мощности, формулирует гипотезу континуума, рассматривает непрерывные отображения между множествами различной размерности. Тем острее он ощущает недостаточность определения непрерывности через сечение. Его третья статья 1878 года «К учению о многообразиях» [там же, с. 22–35] уже содержит понятия мощности и взаимно однозначного соответствия между многообразиями различной размерности. В этой же статье появляется понятие «второй мощности», то есть начинает формироваться гипотеза континуума. Числовой континуум по Кантору – это совершенное связное множество.

Выводы к пятой главе

На материале исследования источников, рассмотренных в пятой главе воссоздаётся история расширения понятий числа, в.т.ч. понятия иррационального числа, непрерывной и равномерно непрерывной функции в теории функций XIX в., обусловленное требованиями анализа числового интервала и совокупностей точек разрыва. Рассмотрены работы Б. Больцано, О. Коши, Ж. Фурье, П. Дирихле, Р. Дедекинда, К. Вейерштрасса, Э. Гейне, Г. Кантора.

Показано дидактическое совершенствование изложения понятий в их лекционных курсах. Показано формирование нового приёма – метода покрытий, воплотившегося в теорему Гейне-Бореля, история теоремы Гейне-Кантора о равномерно непрерывной функции.

Показано, что Кантор принял как аксиому взаимнооднозначное соответствие точек оси и чисел, всякой точке оси соответствует некоторое число, которое он назвал действительным, оценил алгебраические иррациональные числа как счётное множество, а все иррациональные числа как несчётное множество и пришёл понятию мощности множеств, что позволило ему создать первую часть теории множеств - теорию точечных множеств.

Рассмотрены концепции числа Гейне-Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса. Основополагающим для определения числа Кантор сделал понятие взаимно-однозначного соответствия между множествами. Концепция Кантора основана на фундаментальной последовательности и числе как пределе последовательности рациональных чисел, а затем последующей иерархии числовых последовательностей иррациональных чисел, отношении порядка, предельной точке, производных множествах и их иерархии, а впоследствии сравнении их по мощности. Кантор определил окрестность как любой интервал, содержащий точку внутри себя. Гейне придерживался концепции Кантора, методически изложил её в курсе лекций, впервые сформулирован принцип пренебрежения некоторым множеством точек, то есть степень общности утверждения.

Концепция Вейерштрасса основана на понятии функции как ряда, а числа как агрегата (конечной или «обозримой» числовой совокупности), каждая неизмеримая числовая величина по Вейерштрассу есть граница ранее определённых измеримых величин. Вейерштрасс определяет действительное число как предел частичных сумм абсолютно сходящегося ряда, обращая внимание на необходимость арифметизации понятия предела. Вводит упорядоченность, замкнутость относительно арифметических операций. В отличие от Кантора, отвергающего прикладные аспекты, и Дедекинда, направленного на арифметическую сторону понятия числа, Вейерштрасс предназначал свою концепцию для обоснования теории аналитических функций. Те понятия, которые он вводит, не носят глобального характера, но необходимы лишь для его построений. Он вводит собственные понятия континуума и связности, которые отличаются от таковых же понятий у Кантора; для аналитического продолжения по пути строит цепочку открытых дисков, что эквивалентно лемме Гейне о покрытиях. При этом, если функция представлена в виде ряда, то это не сужает, а расширяет возможности исследования этой функции, но ряд должен обладать равномерной сходимостью. Он вводит собственные понятия континуума и связности, которые отличаются от таковых же понятий у Кантора; для аналитического продолжения по пути строит цепочку открытых дисков, что эквивалентно лемме Гейне о покрытиях.

Дедекинд основал свою концепцию действительного числа на понятии сечения как для чисел, так и для точек на прямой. Особенностью определения Дедекинда был алгебраический подход к числу. Он стремился дать арифметическое определение понятие непрерывности, свободное от геометрической интерпретации. Причём Дедекинд утверждает, что это наш мысленный акт, который производится независимо от того, является ли реальное пространство непрерывным или разрывным, это мысленное заполнение новыми точками не влияет на реальное бытие пространства. Он определяет вычисления с вещественными числами. При этом он доказывает теорему о непрерывности арифметических операций. Дедекинд устанавливает зависимость введённых им понятий с основными положениями анализа бесконечных, доказывает теорему о пределе ограниченной монотонной величины. Работы Дедекинда легли в основу фундамента общей алгебры, его определение числа формально безупречно. Определение понятий непрерывности и действительного числа у Дедекинда безупречно с логической точки зрения, но представление об объёме и структуре понятия из него не следует. В создающихся на основе этих работ учебных курсах математического анализа и теории функций число определялось по Дедекинду, а затем в построениях переходили к более практичному определению числа Кантора, используя понятие фундаментальной последовательности и предельной точки.

Приведено обсуждение Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса определения числа, а также взгляд Кантора на их и свой способ введения понятий числа и непрерывности, в частности относительно существования и единственности.

Теория действительного числа и понятие непрерывности числового континуума получили дальнейшее развитие в работах французской школы теории функций (Бэр, Борель, Лебег и другие), московской школы теории функций (Егоров, Лузин и его ученики), польской школы теории множеств и теории меры (Серпинский и его ученики), и других математиков XX века. В XX веке исследования А.Н. Колмогорова показали, что все эти концепции эквивалентны.

Влиянию идей Кантора и судьбе его переводов в России посвящён третий параграф главы. Рассмотрены интерпретации и переводы И.Ю. Тимченко (1892), С.О. Шатуновского (1896), Б.К. Млодзеевского (1900), П.А. Флоренского (1904), А.В. Васильева (1904-1908), В.Л. Некрасова (1907), И.И. Жегалкина (1907), П.С. Юшкевича (1914), А.И. Фета (1968), Ф.А. Медведева (1985).

Включению идей немецких математиков в учебные курсы и дальнейшему развитию понятия непрерывности и классификации точек разрыва в курсе Улисса Дини 1878 г. посвящён четвёртый параграф. Курс математического анализа, который Дини читал почти 50 лет, был основан на исследованиях П. Дирихле, Н. Абеля, П. Дюбуа-Реймона, К. Вейерштрасса и Г.

Миттаг-Леффлера, и с годами обогащался результатами Г. Кантора, Э. Гейне, Р. Дедекинда, Г. Ганкеля и Г. Шварца. Во многих случаях Дини вводил более общие формулы и методы. Так, например, в области непрерывности и равномерной непрерывности функций он показал получение результатов Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера с помощью метода Э. Бетти, и подобным же образом обогатил новыми методами теорию степенных и тригонометрических рядов и теорию функций комплексной переменной. Методологическая база Дини, обусловленная опытом дифференциальной геометрии, в анализе бесконечно малых очень сильна и отличает его курс от курсов других аналитиков. Дини принадлежит определение непрерывности функции через односторонние пределы, а также собственная классификация разрывов. Как отмечал позже Лузин, это привело к появлению дескриптивного и конструктивного направлений в математическом анализе. Исследования Дини легли в основу современного анализа.

Пятый параграф посвящён истории методов сходящихся последовательностей и вложенных отрезков, берущих своё начало в работах Архимеда. Представление о точке, лежащей в последовательности вложенных отрезков, высказал Ж. Буридан. Поиск искомой величины с помощью приближения с избытком и недостатком использовали П. Ферма, Д. Грегори, И. Ньютон, К. Маклорен, К. Гаусс, Ж.-Б. Фурье. Эта логическая конструкция превращается в метод обоснования анализа в XIX веке в работах Б. Больцано, О.-Л. Коши, П. Дирихле, Ш. Мере, Э. Гейне, Г. Кантора, Г. Дарбу. Таким образом, определились две тенденции, намеченные в трудах Архимеда: поиск искомого результата с помощью метода неделимых, развитого в трудах Кеплера и Кавальери, и обоснование найденного результата с помощью сходящихся с избытком и недостатком последовательностей, продолженного Дж. Грегори и К. Маклореном. Свойство множества действительных чисел быть непрерывным, или полным, было сформулировано в виде нескольких концепций во второй половине XIX века. В основе каждой из этих концепций лежат пять свойств множества действительных чисел[184]. Эквивалентность этих свойств была доказана на рубеже XIX и XX веков Гильбертом. Появление неевклидовой геометрии привело к необходимости анализа аксиом геометрии, понятия непрерывности и полноты. В работах Дедекинда и Пеано появилась аксиоматическая система арифметики. Системы аксиом арифметики и геометрии требовали обобщения на едином основании. В 1899 году Гильберт ввёл новую систему аксиом, в которую ввёл аксиому Архимеда и аксиому полноты. В XIX веке было много попыток построить геометрию без аксиомы Архимеда. Этот вопрос обсуждал Д. Гильберт. Как он писал, «Выполнимость

[184] 1.Каждая последовательность замкнутых вложенных интервалов имеет непустое пересечение, и верна аксиома Архимеда. 2. Каждое ограниченное подмножество имеет верхнюю грань. 3. Каждая последовательность Коши сходится и верна аксиома Архимеда. 4. Каждое бесконечное ограниченное подмножество имеет предельную точку (свойство Больцано-Вейерштрасса). 5. Каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

аксиомы полноты существенно обусловливается предварительным установлением аксиомы Архимеда; это значит – аксиома полноты привела бы к противоречию, если бы к аксиомам I–IV не была ещё присоединена аксиома Архимеда». В XX веке исследования Колмогорова показали, что аксиома полноты может быть заменена принципом вложенных отрезков (фундаментальных последовательностей Коши-Кантора) вместе с аксиомой Архимеда. В сороковые годы Колмогоров создал построение действительных чисел как функций натурального числа. Он вводил аксиоматическое определение действительных чисел как совокупности, являющейся полным линейным упорядоченным полем. Определив алгебраические отношения и отношение порядка, перешёл к последней аксиоме – аксиоме полноты. Колмогоров называл её аксиомой непрерывности. Он привёл ряд аксиом непрерывности а именно: аксиома Дедекинда о сечении, аксиома Больцано о существовании точной верхней (нижней) грани, аксиома Вейерштрасса о предельной точке, аксиома Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности, аксиома Больцано о монотонно-возрастающей (монотонно убывающей) последовательности, аксиома Кантора о вложенных отрезках, и доказал их эквивалентность.

Шестой параграф посвящён истории обобщения числовой шкалы – истории числовой прямой, понятие о которой сформировалось к началу XX в. Показан генезис понятия от телесной прямой, или отрезка, фрагмента физического материала, как образа, возникшего в античности. В античности числа представлялись как совокупность натуральных и рациональных положительных чисел, образующих шкалу. Иррациональные величины традиционно от Евклида понимались как неизвлекаемые корни. Геометрическая прямая, или ось, как понятие формируется в период с XVI по XVIII век в математическом анализе. Понятие прямой или кривой как геометрического места точек обобщается в XVII веке в первых работах по математическому анализу. В состав чисел очень долго не входил ноль. Впервые отрицательные числа как числа, меньшие нуля, и положительные числа, как числа, большие нуля, определил Штифель (1544). У него же ноль, а также дробные и иррациональные величины названы числами. Штифель пишет, как целые, рациональные и иррациональные числа относительно друг друга. Рассмотрены работы Людольфа ван Цейлена (1596), вычислившего число π с 35 десятичными знаками; Галилея (1630), понимавшему линию как результат движения; Л. Эйлера (1748), высказавшего предположение и существовании кроме иррациональных алгебраических чисел ещё и трансцендентных иррациональных чисел, получаемые в результате трансцендентных вычислений, например, логарифмирования, и давших тогда же обозначения π и e; И. Ламберта (1766), доказавшего иррациональность чисел π и e; А.М. Лежандра (1794), Ж.Б. Фурье (1815), Ж.Л. Лагранжа, определившего иррациональные числа как определяемые бесконечной непрерывной дробью; О. Коши (1821), определившего иррациональные числа как пределы сходящихся последовательностей, но не определившего отношение порядка и операции над ними; Б. Больцано (1830), сделавшего попытку построить теорию действительного числа (его передовая работа была опубликована лишь столетие спустя); Ж. Лиувилля (1840-е гг.), начавшего строить теорию трансцендентных чисел; Ш. Эрмита (1873), доказавшего трансцендентность числа e; Ф. Линдемана (1882), доказавшего трансцендентность числа π; К. Вейерштрасса (1885), упростившего его доказательство. Но теория действительного числа ещё не была создана. Нельзя было строго определить ноль, больше, меньше или равно нулю. Поэтому Вейерштрасс в своих лекциях по дифференциальному исчислению 1861 года, доказывает теорему «Непрерывная функция, у которой производная внутри определённых интервалов аргументов всюду равна нулю, сводится к константе». В 1869 году теорию действительного числа построил французский математик Шарль Мере. Мере ввёл понятие неизмеримого числа как фиктивного предела, его теория эквивалентна теории Кантора, но её не поняли современники. Числовая прямая как концепт сформировалась в работах Кантора и Дедекинда 1872 г. Дедекинд рассмотрел точки на прямой линии и установил для них те же свойства, что и для рациональных чисел, постулируя, что каждому рациональному числу соответствует точка на прямой линии. Это свойство прямой Дедекинд называет аксиомой, принимая которую, мы придаём прямой непрерывность. Кантор постулировал взаимно однозначное соответствие между числами и точками на прямой, он утверждает, что доказать это невозможно. Вейерштрасс полагал, что каждому числу соответствует точка на геометрической прямой, но неизвестно, каждой ли точке соответствует число.

Таким образом, привычный нам образ числовой прямой формировался в течение более чем двух тысячелетий от телесного отрезка до шкалы положительных целых, затем рациональных чисел; только в XVII в. на шкале появился ноль и отрицательные числа (появились шкалы термометров с отрицательной температурой и отсчёт времени до и после Рождества Христова); были добавлены иррациональные числа; но только концепция Кантора завершила представление о числовой прямой как о совершенном связном множестве.

Глава 6. ИСТОРИОГРАФИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

6.1 Историография XVIII в.

Литература по истории математического анализа богата и начинается с XVIII века. Здесь мы рассмотрим основные книги и статьи, которые мне удалось прочитать, и которые были значимы для моей работы. Разумеется, перечень не претендует на полноту. Главным образом выделены работы, связанные с историей концепции непрерывности.

1758 год. Многие авторы предваряли свои математические сочинения историческим экскурсом, но первое полное сочинение, специально посвящённое истории математики, написал Жан Этьен Монтюкла (1725–1799). Это была «История математики», два тома которой вышли в 1758 году. Первый том был посвящён истории математики от античности до начала XVII века, второй том – достижениям математики XVII и начала XVIII века. В нём много внимания уделено развитию анализа, исследованиям Ферма, Паскаля, Барроу, Ньютона, Лейбница, И. Бернулли [393].

1768, 1794 годы. Профессор университетов в Лейпциге и Геттингене Авраам Готтфельд Кёстнер (A.G. Kaestner, 1719–1800), в «Основах математики» [346] и во «Введении в анализ бесконечно малых» [347] делает хороший исторический обзор методов анализа. Его курс издавался на русском языке в 1792–1803 годах. В 1796–1800 годах выходила его незаконченная, но хорошо систематизированная четырёхтомная «История математики от возрождения наук до конца восемнадцатого столетия» (Geschichte der Mathematik). Кёстнер даёт широкий историографический обзор большого количества источников. Третий том посвящён истории возникновения анализа в XVII веке.

6.2. Историография XIX в.

В 1802 году вышел «Опыт общей истории математики» [189] аббата Ш. Боссю (Charles Bossut, 1730 – 1814). Том I содержит историю математики от античности до XV века, и обзор развития математики и механики в XVI веке. Том II начинается с истории создания анализа бесконечно малых в трудах Ньютона и Лейбница. Подробно рассказано об их работах, а также работах Я.Бернулли, Гюйгенса, Лопиталя. Сам Боссю, математик, механик, внёс большой вклад в теорию корабля и гидродинамику. Поэтому его в его изложении большое внимание уделено прикладным вопросам. В 1810 году вышла его «Общая история математики» (Histoire générale des mathématiques) в двух томах.

1817 год. Об истории теоремы Ролля писал Бернард Больцано (B. Bolzano, 1781– 1848), в работе 1817 года «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» [9]. Больцано анализирует доказательства Кёстнера, Клеро, Лакруа, Меттерниха, Реслинга и других математиков. Правда, некоторые из книг он упоминает без близкого знакомства с текстами. Это относится к работам Рёслинга и Клеро. Больцано близко подошёл к анализу основных противоречий в доказательствах и первым признал необходимость арифметизации анализа, его освобождение от механических и геометрических интерпретаций в основных концепциях, прежде всего в концепции непрерывности.

1821 год. Огюстен Луи Коши (A. L.Cauchy, 1789– 1857) сравнивает методы Декарта, Ньютона и Лагранжа в своём «Курсе анализа» 1821 года [208].

В 1834 году профессор университета в Лейпциге М.В. Дробиш (M. W. Drobisch,1802–1896) выпустил «Лекции по уравнениям высших порядков» [232], где в §107 (с. 161) рассказывает о методе каскадов Ролля.

В 1874 году в Лейпциге вышел сборник статей Германа Ганкеля (Hermann Hankel, 1839–1873) «История математики в Древности и в Средние века» [291]. Этот курс содержит много глубоких историко-математических идей, но заслуживает некоторых упрёков в строгости изложения, что отмечал Кеджори. Недолгая жизнь не позволила Ганкелю продолжить изложение истории далее, но он написал две интересные статьи по развитию анализа. Первая из них – это его лекция 1869 году «Развитие математики в последние столетия» [289]. Главным предметом этой лекции является именно история анализа. Ганкель кратко рассматривает развитие основных понятий от Евклида и Архимеда, развитие анализа и теории функций, включая кормплексные, касается работ Кеплера и Кавальери, Ньютона, Лейбница, братьев Бернулли, Лопиталя, Лагранжа, Эйлера, Коши, Римана, Понселе, Мёбиуса, Шаля, фон Штауда. Его обзор заканчивается творчеством Гаусса.

Ганкель придаёт большое значение характеру математики, развивавшейся в языковой среде латинизированных языков, и её отличию от немецкоязычной математики. Проводит он и отличия в философских основах различных языковых культур. Обращает особое внимание на геометрический смысл понятий анализа, называя геометрию «царской дорогой» математики. В этой лекции, в частности, он говорит: «Княжество математики теперь бесспорно приходится на Германию; такие математики Франции, как Шаль, Лиувилль и ещё несколько энергичных ветеранов не имеют достаточного количества учеников, которые могли бы успешно конкурировать с немцами, а учиться у немцев французы не любят» [там же, с. 29].

В 1871 году Ганкель написал для Энциклопедии интереснейшую статью о понятии границы, т.е. предела [290]. Эта статья замечательна тем, что в ней дано систематическое изложение основных понятий – функции, предела функции в точке, непрерывности – за год до появления первых работ Кантора по теории множеств.

В начале Ганкель приводит определение предела, данное Коши в его курсе 1821 года. Далее он начинает историю понятия предела с апорий Зенона, обсуждаемых Аристотелем; рассматривает X книгу Евклида, посвящённую классификации неизмеримых величин, и анализирует её подробнейшим образом. Потом Ганкель переходит к понятию границы (предела) в методах Архимеда. Рассматривает понимание бесконечности в различных культурах. Ганкель внимателен к работам Михаэля Штифеля, Ферма, Роберваля, Паскаля и Валлиса. Указывает на развитие понятий предела и бесконечности в работах Лейбница, отмечая сопутствующее ему развитие понятия функции. Но самую главную роль в истории понятия предела Ганкель отводит Бернарду Больцано, назвав его работы 1817 и 1851 года. Ганкель цитирует его понятие предела функции в точке, после чего обращается к понятиям интегрируемости по Риману, дифференцируемости, непрерывности (по Вейерштрассу, без упоминания) и разрывности функций. Ганкель рассматривает тригонометрические ряды и понятие предела функции в точке на языке «ε– δ». Рассматривает Ганкель также предел функции комплексного переменного и функции нескольких аргументов; затем понятие функции, непрерывной на отрезке, и далее переходит к своему принципу сгущения особенностей. Излагает он также разложение в степенные ряды, и их сходимость, рассматривает знаменитый пример Абеля, опровергающий ошибочное утверждение Коши о том, что сходящийся всюду ряд непрерывных функций имеет суммой непрерывную же функцию. Приводит основные теоремы о непрерывных функциях. Характеризует работы Дирихле, Якоби и Гаусса в теории рядов. Рассматривает понятие предела и непрерывности для определения определённого интеграла через предел интегральных сумм. Рассматривает сходимость и понятие предела суммы ряда в историческом развитии, начиная с работ Кеплера, Кавальери, Гвидо Гранди, Лейбница, Иоганна и Якоба Бернулли, Ньютона, Мак Лорена, Эйлера, Раабе, Клюгеля, Лагранжа. Особо отмечает работы Прусского аналитического института (Лейпциг) начиная с 1813 года. Ганкель отмечает значение метода Ролля для развития понятия предела в теории рядов и, в частности, в работе Лагранжа «Теория аналитических функций». Ганкель отмечает изложение идей Лагранжа в учебниках Лакруа, «Курс алгебраического анализа» Коши 1821 года. Но Ганкель признаёт приоритет перед ним Бернарда Больцано в теории рядов, указывая на его ранние работы 1816 года.

Началом критического периода теории рядов по отношению к французским результатам Ганкель называет 1826 год, обращение к традициям Гаусса, работу Абеля 1826 года, публикации в журнале Крелле. На этом заканчивается исторический обзор Ганкеля, намеренно не коснувшегося имён современников и соотечественников.

В 1873 году Карл Вейерштрасс в «Речи, произнесённой при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 года» [14] говорит о необходимости обращаться к истории математики: «В страницах мало читаемых сборниках научных учреждений, а также в обширной научной переписке учёных прежних времён заключается громадное количество материала, из которого всякий, кто сумеет, может вычитать многое побуждающее к собственной работе, попутно может и научиться многому полезному» [там же, с. 1327]. Сам Вейерштрасс следовал этому правилу и обращался к классикам математического анализа, что мы видим в его лекциях 1886 года по основаниям теории функций [450], где он рассматривает историю возникновения понятия функции, сравнивает определения Якоба Бернулли, Лейбница, Эйлера, Лагранжа, даёт сравнительный анализ понятия функции у Лейбница и Иоганна Бернулли, характеризует подходы к понятию функции Карно, Коши, Дирихле.

В 1897 году на смерть Вейерштрасса откликнулся М.А. Тихомандрицкий, произнеся на заседании Харьковского математического общества памятную речь с обзором творчества Вейерштрасса [124].

6.3. Историография XX в.

В 1906 году в Казани в первом выпуске «Начала анализа в элементарном изложении» был опубликован «Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых» А.В. Васильева [12].

В период с 1892 по 1898 годы в «Записках Новороссийского общества естествоиспытателей» выходили «Основания теории аналитических функций» И.Ю. Тимченко – текст его магистерской диссертации. Часть первая «Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории функций» [121] была первым трудом по истории аналитических функций, что признают и зарубежные историки. В первой части содержался обзор и анализ исторических сведений от античности до XVIII века. Вторая часть «Исторических сведений», в которой Тимченко обещал продолжить исследования по теории функций XIX века и рассказать об открытии теории множеств, так и не была написана. В своё время эта работа Тимченко оказала влияние на А.П. Юшкевича.

В 1907 году в «Известиях Томского технологического института» была опубликована магистерская диссертация В.Л. Некрасова «Строение и мера линейных точечных областей» [85]. Защищал диссертацию Некрасов в Московском университете одновременно с И.И. Жегалкиным. Первая глава его диссертации содержит исторический обзор теории точечных областей. Наряду с развитием теории функций он выделяет появление теории аргумента, понятия области начиная с работ Больцано, далее очень тщательно фиксирует появление работ по теории множеств, теории меры, появление понятий внутренней и внешней точки множества в работах математиков конца XIX – начала XX веков.

В 1908 году вышел IV том Лекций по истории математики Морица Кантора [206], посвящённый периоду 1758–1799 годов.

1910 год. Феликс Клейн (Felix Christian Klein, 1849–1925) преподавал в Эрлангене, Мюнхене, Лейпциге и Геттингене. Основные работы в области геометрии. Ещё в 1893 году Клейн читал лекции по истории математики для участников Математического Конгресса в Чикаго, эти лекции были переведены на польский язык в С. Дикштейном и изданы в Варшаве в 1899 году.

С 1910 года Клейн работал над историей математики XIX века. Во всех его исследованиях Клейна отличал поиск внутренних связей между различными областями математики. Историю математики он излагает во взаимосвязи её разделов и в тесной связи с запросами техники, физики, астрономии, геодезии. В 1926 году вышла его книга «Лекции о развитии математики в XIX столетии» [350, 53, 54]. Он даёт историю развития математики в немецкой, французской и английской математических школах, уделяя внимание проблемам обоснования анализа. Клейн высоко оценивает обоснование анализа Коши, заметив, что понятие непрерывности функции в точке было до него сформулировано и проанализировано Больцано, которого Коши не цитирует. Говоря о немецкой школе математического анализа, Клейн высоко ставит Гаусса и в то же время признаёт за Дирихле роль тонкого интерпретатора таких основных понятий анализа, используемых Гауссом, как условная сходимость рядов. Клейн выделяет основание в 1826 году журнала Крелле как важный фактор развития математики. Особенно высоко Клейн характеризует достижения и школу Вейерштрасса, в семинаре которого он участвовал, что не мешало ему ярко и часто субъективно критиковать некоторые научные методы Вейерштрасса. Клейн выделяет источники творческих поисков Вейерштрасса: «историческое наследство в виде проблемы абелевых функций, сформулированных Якоби, и систематичность его мышления, заставившая его довести начатое изучение до степени законченного исследования» [53, с. 330]. Но Клейн замечает, что в отличие от Римана, Вейерштрасс не черпал проблемы из приложений математики и в отличие от Кронекера не пользовался никаким философским логическим постулатом.

В 1924 году вышел 6 том «Истории элементарной математики» Иоганна Тропфке [439], посвящённый истории математического анализа и аналитической геометрии.

Интересны историко-математические работы Лузина: Доклад 1927 года с дополнениями 1933 года «Современное состояние теории функций действительной переменной» [72, т. 2, с. 494-536], где он подробно анализирует все противоречия развития теории функций конца XIX –

начала XX веков; а также его статья в Большой Советской Энциклопедии 1935 года «Функция» [72, т. 3, с. 319-341], где он рассматривает историю понятия функции от И. Бернулли (1727 г.) до С.Н. Бернштейна (1925 г.).

В 1928 году вышла очень удобная справочная книга американского историка математики Флориана Кеджори (1859–1930) [202].

В 1935 году вышел перевод на русский язык «Анализа бесконечно малых» Лопиталя [69] под редакцией, со вступительной статьёй «Первый печатный курс дифференциального исчисления» и примечаниями А.П. Юшкевича [69]. Укажем также важные работы А.П. Юшкевича по истории понятия предела «Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке» [147], Хрестоматия по истории математики. Математический анализ [131], «Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса» [151].

В 1972 году вышел Второй том «Истории математики» под редакцией А.П. Юшкевича «Математика XVIII столетия» с главой «Дифференциальное и интегральное исчисление», написанной Юшкевичем [149].

В 1951 году вышли «Очерки по истории теории аналитических функций» [73], где выделена роль российских математиков Эйлера, Лобачевского и Чебышёва в развитии теории функций комплексной переменной. Его же переработанная и дополненная «Теория аналитических функций» вышла в 1981 году в книге «Математика XIX века» [74].

В 1958 году на русском языке появилась статья К. Рыхлика «Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано» [104], посвящённая исследовании написанной около 1830 года неопубликованной рукописи Больцано «Учение о величинах».

В 1963 году вышла «История математики» К.А. Рыбникова, в которой он внимательно исследует роли О.Коши, Б.Больцано и К.Вейерштрасса в развитии понятия непрерывности [103].

1965, 1975, 1976, 1982 годы. Ф.А. Медведев. Истории теории функций и теории множеств посвящены работы моего учителя, московского историка математики Ф.А. Медведева (1923–1993). Помимо статей в историко-математических изданиях, он написал книги «Развитие теории множеств в XIX веке» [76], «Очерки истории теории функций действительной переменной» [78], «Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX– XX вв.» [80], «Ранняя история аксиомы выбора» [81]. В его работах дан подробный разбор математических идей XIX века. Отметим важную для нас статью Ф.А. Медведева «Об определении понятия функции у Лобачевского и Дирихле» [79].

В 1965 году вышла статья С.С. Петровой «Принцип Дирихле в работах Римана» [93].

1966 год. Роли тригонометрических рядов во взаимосвязи с разделами анализа посвящено глубокое исследование А.Б. Паплаускаса «Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега» [92], изданное в 1966 г.

В 1970 году вышла статья английского историка математики Айвара Граттан-Гиннесса «Больцано, Коши и «Новый Анализ» начала XIX века» [273]. Эта статья подробно рассмотрена нами в пятой главе.

В 1971 году вышла статья А.В. Дорофеевой «Формирование понятия непрерывной функции» [35], в которой рассматривается история вопроса от античности до работ Коши.

1973–1978 гг. П. Дюгак. Большой вклад в историографию анализа сделал французский исследователь боснийского происхождения Пьер Дюгак (Pierre Dugac, 1926–2000). Ему принадлежат находки ценных математических документов, в их числе первые лекции Вейерштрасса, и исследования по истории XIX века. Назовём среди них статьи о Шарле Мере [235], Карле Вейерштрассе [236], Рихарде Дедекинде [237], по истории полных пространств [239], и «Основания анализа» [238], а также его с соавторами большая «История анализа: о концепции предела и сопутствующих понятиях» [241]. На русском языке есть небольшая статья Дюгака «Понятие предела и иррационального числа. Концепции Шарля Мерэ и Карла Вейерштрасса» [36].

1978 год. Истории понятия связности в топологии посвящена наиболее уважаемая топологами статья Уайлдера «Развитие топологического понятия «связано» [456], хотя он рассматривает развитие понятия, начиная только с Фреше и Хаусдорфа.

С 1979 года выходят работы Йозефа Даубена по истории теории множеств. Назовём его книгу «Георг Кантор. Его математика и философия бесконечности» [221].

В 1981 году вышла статья Э. Ноеншвандера по истории теории функций комплексной переменной и связях французской математической школы с Риманом и Вейерштрассом, о трёх направлениях обоснования теории функций комплексной переменной, исходящих от Коши, Римана и Вейерштрасса [395].

В 1981 году вышла книга американской исследовательницы Юдит Грабинер «Происхождение строгого исчисления Коши» [267], её статья «Смена концепции изменения: производная от Ферма до Вейерштрасса» [268], а также очень полемичная статья «Кто дал вам Эпсилон? Коши и происхождение строгого исчисления» [269].

В 1985 году появилась очень хорошая статья датской исследовательницы истории математики Кирсти Андерсен «Метод неделимых Кавальери» [163].

В 1985 году вышла книга П.Я. Кочиной «Карл Вейерштрасс» [60]. В книге содержится анализ развития концепций числа и функции в лекциях Вейерштрасса (там же, с. 92–101), а в приложении приводится её перевод статьи А.Пуанкаре «Математическое творчество Вейерштрасса» [там же, с. 246–253].

В 1986 году вышла книга итальянского историка математики Умберто Боттаццини «Высшее исчисление: История действительного и комплексного анализа от Эйлера до Вейерштрасса» [191], в которой подробно рассматривается процесс арифметизации анализа [191, с. 257–294], споры по поводу строгости доказательств и определений. Много внимания уделено Больцано [там же, с. 91–97], Коши, определению функции Дирихле и её интерпретации Ганкелем [там же, с. 197–201], чью строгость высоко оценил Улисс Дини. Автор обогащает картину развития анализа XIX века материалами итальянской математики – результатами и комментариями Казорати, Бетти, Дини и других.

В 1990 году появилась интересная статья С.С. Демидова о законе непрерывности у Лейбница и о понятии непрерывной функции у Эйлера [32].

В 1993 году вышли две статьи польского историка математики Витольда Венслава «Немецкие аналитики на рубеже XIX и XX века» [453], посвящённая творчеству Римана, Вейерштрасса, Неймана, Клебша, Ганкеля, Рунге, Бирмана, Гурвица, Кёбе и Бибербаха; а также «Развитие теории алгебраических и абелевых функций» [454].

Математикам Петербурга Буняковскому, Остроградскому, Сомову, Чебышёву, Коркину, Золотарёву, Сохоцкому, Поссе, А. Маркову, Сонину, Ляпунову, Стеклову, работавшим в области аналитических функций, посвящена статья Н.С. Ермолаевой «Петербургские математики и теория аналитичеких функций» [40].

В 1995 году вышла статья Э. Жиспе по истории теории множеств во Франции до 1905 года о Бэре, Бореле, Лебеге и других французских математичках [264].

В 1996 году вышла книга польского тополога и исследователя истории и философии математики, профессора Силезского университета в Катовице Ежи Медушевского «Непрерывность» [388, 389]. Он рассматривает историю понятия непрерывности от античности до начала XX века, уделяя особое внимание топологическому аспекту этого понятия, рассмотрев концепции основных творцов математического анализа и внутреннюю связь различных исторических тенденций.

В 1997 году вышел историко-математический курс видного историка математики, преподавателя Вроцлавского университета В.Венслава «Математика и её история» [455], содержащий подробный экскурс в историю анализа.

В 1998 году выходит большая статья «История теории континуума» Я. Харатоника [214]. Он рассматривает топологическую линию истории от Кантора и Жордана до работ польских математиков первой половины XX века.

В 1999 году вышла книга Д. Анаполитаноса «Лейбниц: представление, непрерывность и феномен пространства – времени» [162], содержащая анализ принципа непрерывности Лейбница.

В 1999 году голландский историк и философ математики и логики Теон Кетсиер в соавторстве с Яном ван Миллом написал работу «По плодам их узнаете их». Он рассматривает историю концепции непрерывности от Больцано и Коши до Вейерштрасса, Дирихле, Гейне, Кантора до работ Бореля, Арцела и Асколи, Фреше, Хаусдорфа, Брауэра с позиции истории топологии. Далее он описывает «золотой век топологии» с 1920 по 1960, и последующее развитие функционального анализа [199].

6.4. Историография XXI в.

В 2002 году вышла статья об истории теоремы о симметрической производной Шварца польского исследователя Леха Грушецкого «История теоремы Шварца о равенстве смешанных производных» [282].

В 2003 году вышла «История математического анализа» от античности до первой трети XX века, написанная блестящим коллективом авторов под редакцией Г.Н. Янке [154].

В 2003 году в шведском Технологическом университете города Лилеа, где работает польский математик и историк математики Лех Малигранда, под его руководством была защищена магистерская диссертация Иоганна Тима по истории математики «Непрерывные нигде недифференцируемые функции» [436], содержащая исторический обзор темы с 1830 по 2002 год.

В 2006 году вышла книга Герта Шубринга «Конфликты между обобщением, строгостью и интуицией: концепции числа, лежащие в основании математического анализа 17 – 19 веков: Франция и Германия» [418].

В 2007 году вышла книга Хосе Феррейроса «Лабиринты мысли: история теории множеств и её роль в современной математике» [253]. В ней обсуждается зарождение и роль теоретико-множественного подхода в математике 1850 – 1940 годов, различие во взглядах Кантора и Дедекинда, формирование аксиоматической теории и роль Гёделя.

В 2008 году в Индианском университете была представлена докторская диссертация Лизы Киэл «Теории непрерывности и бесконечно малых: четыре философа девятнадцатого века» [348]. Автор рассматривает историю понятия непрерывности от античности, и даёт сравнительный анализ концепций Кантора, Дедекинда, Дюбуа-Реймона и Пирса. Заметим, что исследования Пирса мало изучены в русскоязычной литературе, хотя у зарубежных историков математики заметен возрастающий интерес к его концепции, например, статья Даубена

«Система взглядов Пирса на конечные множества: исследование интересов Пирса о бесконечном в связи с зарождением американской математики времён Кантора и Дедекинда» [220], а также работа бразильской исследовательницы Бачо Марии де Лурдес «Пирс и Кантор: о континууме и бесконечно малых» [379].

В 2008 году вышла книга Хейре и Уаннера «Математический анализ сквозь его историю» – популярная история математического анализа от античности до начала XX века. Книга содержит много фотографий историко-математических документов [161].

В 2008 году в журнале «История математики» вышла статья Грегори Мура «Появление открытых множеств, замкнутых множеств и предельных точек в математическом анализе и топологии» [394].

В 2009 году вышла очень подробная статья Марии Терезы Боргато о развитии понятия непрерывности у итальянских математиков от Бриоши до Пеано, и об их связях с немецкими математиками, о влиянии школы Вейерштрасса [186].

В 2009 году появилась статья Паоло Манкосу «Математический стиль», в которой он определяет различия национальных стилей в математике, в частности, характеризует стиль Вейерштрасса и его влияние [380].

В 2009 году вышла книга Давида Перкинса «Исчисление и его происхождение» [402].

В 2009 году вышла работа Джун Барроу-Грин «От каскадов к исчислению: Теорема Ролля» [170], но в ней приведён преимущественно алгебраический аспект.

Отметим интересную статью Джереми Грея «Берлин 19 века» о Вейерштрассе, Римане и Кронекере [275].

Упомянем популярную брошюру Американскго математического общества из серии «Кто дал вам эпсилон и другие сказки из истории математики»: А. Боровика и М. Каца «Кто дал вам сказку Коши – Вейерштрасса?» [187].

В 2010 году вышла историко-математическая статья Атанаса Атанасова «Топология и непрерывность» [166].

В 2010 вышла статья К. Чесельского и М. Мослийяна по истории функционального анализа, посвящённая истории некоторых теорем Банаха и его школы [427].

В октябре 2011 года канадская исследовательница Лаура Турнер защитила докторскую диссертацию о роли Гёсты Миттаг-Леффлёра в развитии математики и международных связей в Швеции и за её пределами в 1880 – 1920 гг.» [441]. Турнер подробнейшим образом исследовала все документы, связанные с деятельностью Миттаг-Леффлёра, уделив значительное внимание его учителю Вейерштрассу и его другу и коллеге Кантору. Миттаг-Леффлёр оценивал различное понимание континуума Вейерштрассом и Кантором, придавая большое значение связи между их определениями в трёхмерном пространстве, что позволило Миттаг-Леффлёру в

1883 – 1885 годах поставить задачи своему ученику Фрагмену. Она же обращает внимание на преемственность проблематики Кантора в тех задачах об изолированных множествах, которые Миттаг-Леффлёр ставил перед другим своим учеником, Бендиксоном, и важность результатов последнего для теории функций [там же, с. 114–117].

В 2012 году вышла интересная статья Петра Блащика, Михаила Каца и Давида Шерри «Десять недоразумений из истории анализа и их разоблачение» [435]. Они критически рассматривают гипотезу об устранении бесконечно малых в работах Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса, а также реформы строгости анализа в работах Коши. Каждый из этих авторов имеет немало работ в области истории основ анализа.

В 2012 появилось краткое наглядное пособие для преподавателей Адама Бешенеи «Краткая история теоремы о среднем значении» [173].

Итальянский исследователь Умберто Боттаццини, профессор университета в Милане, с 1981 по 2013 годы написал многое по истории математического анализа, и особенно комплексного анализа [190-196].

Английский исследователь Джереми Грей, профессор Open University в Великобритании, с 1986 года пишет по истории математики XIX века [278-281].

В 2013 году вышла совместная книга Боттаццини и Грея «Скрытая гармония: геометрические фантазии» [197], посвящённая истории теории функций комплексного переменного в XIX веке. Подробнейшим образом рассмотрены работы Коши, Римана и Вейерштрасса, генезис их идей в историческом, социальном и национальном контексте. На примере семидесяти учебников на девяти языках показано, как складывалась традиция обучения. Описано развитие понятия непрерывности у Коши, Римана, Вейерштрасса, Миттаг-Леффлёра, Кантора, Гарнака, Вольтерра, Арцела, Асколи, Клейна, Пуанкаре, Брауэра, Кёбе, Шварца, Бореля, Гурса, Томе, Адамара. В отношении школы Вейерштрасса дана не только историко-математическая, но и глубокая историко-социальная характеристика, причины меняющихся требований к строгости и допустимому уровню абстракции. К сожалению, не проявлен генезис понятий непрерывности и связности, хотя уделено внимание работам Фреше и формированию функционального анализа.

В 2013 году в американском издании для учителей «Convergence» вышла работа преподавателей Виттенбергского университета (Огайо) Н. Андре, С. Энгдай, А. Паркера «Анализ первых доказательств теоремы Гейне-Бореля» [160].

Литература по исследованию истории основных понятий анализа продолжает появляться, многие работы радуют глубиной и тонкостью анализа, проявлением новых внутренних связей математики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации представлены результаты исследования источников формирования понятия числа и непрерывности в математическом анализе до конца XIX века. Среди этих источников были проанализированы как главные работы основных авторов, создавших четыре концепции числа и непрерывности – Ш. Мере, К. Вейерштрасса, Г. Кантора и Р. Дедекинда, так и их предшественников – Архимеда, Ж. Буридана, М. Штифеля, Галилео Галилея, К. Маклорена, Дж. Грегори, Дж. Валлиса, М. Ролля, Б. Больцано, О.Л. Коши, Г. Ганкеля, П. Дирихле, Э. Гейне, а также их современников и последователей. Рассмотрена история теорем Ролля, Лагранжа, Больцано-Коши, Больцано-Вейерштрасса, теоремы о сжатой переменной, и история некоторых других теорем о непрерывных функциях. Рассмотрена история правил дифференцирования, метода касательных. Рассмотрена история понятий непрерывной и равномерно непрерывной функции, окрестности точки, метода покрытий, языка эпсилонтики. Выделены основные этапы развития понятий числа и непрерывности, определены главные результаты, послужившие основой дальнейшего развития понятий. Выявлены факторы возникновения идей; выведена взаимосвязь соответствия новых концепций потребностям науки и преподавания XIX века; благодаря сформулированной концепции новых типов определений дополнен инструментарий исследования. Указано дальнейшее направление развития понятий XIX в. в таких теориях XX века, как дескриптивная теория множеств, теория функций, топология и функциональный анализ.Таким образом, показана полная картина развития взглядов на число, непрерывность числовой области и понятие непрерывной функции, с которыми учёные подошли к возникновению концепций числа и непрерывности.

Исследование истории понятий числа и непрерывности является частью более полного исследования истории становления математического наука как теоретического раздела математики и как учебного курса.

Проведённое исследование позволяет сделать следующие выводы:

Основными источниками, которые привели к возникновению в XIX в. концепций числа и непрерывности, были следующие: метод исчерпывания Евдокса, вычислительные методы Архимеда, понятие интенсивности и скорости изменения, понятие бесконечной последовательности и логический аппарат схоластов; понятие плотности рациональных и иррациональных величин, понимание отрицательных чисел как чисел, меньших нуля у М. Штифеля; идея сравнения бесконечных числовых множеств у Галилея; возникновение понятие сходимости у Д. Грегори; развитие геометрических и физических интерпретаций отрицательных и мнимых чисел в XVII и XVIII вв., начатое Дж. Валлисом и продолженное И.

Ньютоном, Г.В. Лейбницем и Л. Эйлером; развитие понятия предела, начиная с работ И. Ньютона, продолженное О. Коши; развитие в XVII в. приближённых методов решения алгебраических уравнений, что привело к возникновению в XIX в. понятия непрерывной функции, равномерно непрерывной функции и формированию группы теорем о непрерывных функциях. Возникновение дифференциального и интегрального исчисления в работах И. Ньютона и Г. Лейбница. Возникновение теории последних отношений у Ньютона и развитиие её как теории пределов у Коши. Расширение числовой области в работах Л. Эйлера. Критерий сходимости числовой последовательности, сформулированыый Б. Больцано и развитый в работах О.Л. Коши. Возникновение и развитие понятия окрестности в работах О.Л. Коши, Р. Липшица и К. Вейерштрасса; возникновение языка «ε-δ» у Вейерштрасса; возникновение понятия предельной точки и развитие этого понятия в теории множеств Кантора; определение понятий бесконечного множества и точной границы у Б. Больцано.

Главным моментом появления концепций числа и непрерывности был 1872 г., когда появились работы Ш. Мере, Г. Кантора, Э. Гейне и Р. Дедекинда с изложением указанных концепций, при этом концепция К. Вейерштрасса изложена в этот же период в его лекциях, а статья Гейне излагала концепцию фундаментальных последовательностей Кантора. Диссертация содержит сравнительный анализ и показывает эквивалентность этих концепций.

Главными причинами появления четырёх концепций были запросы практики. Развитие таких разделов теоретической физики, как теория теплоты, теория потенциала, электростатика, магнетизм, электродинамика требовали нового математического аппарата описания пространства, нового понимания непрерывности числовой области и непрерывной функции. Это повлекло за собой появление новых видов сходимости, непрерывности, интегрируемости; в связи с этим появление новых классификаций функций, что привело к созданию внутри математического анализа таких разделов, как теория тригонометрических рядов, теория функций, функциональный анализ и теория меры.

Крупные достижения математического анализа второй половины XIX в. были обусловлены как развитием математического образования и повышением общей математической культуры, так и обращением математиков к историко-математическому материалу, изучением работ предшественников, появлением специализированных математических журналов, ускоряющих и облегчающих коммуникацию исследователей; запросами механики, физики и техники, требующими описания пространства с чётко определённым понятием непрерывности числовой области, непрерывной функции и её свойств, разноообразия видов непрерывности и сходимости, классификации точек разрыва. В работах К. Вейерштрасса возникли понятия связности, метрического и топологического пространства, которые привели к появлению в XX в. функционального анализа, а в нём – понятия компактности. Развитие понятия комплексного числа привело к появлению понятия кватерниона и затем в конце XIX в. векторного анализа, потребность в котором была продиктована теоретической механикой, классической электродинамикой и ядерной физикой.

Возможности, возникшие благодаря новым концепциям. Развитие новых типов определений, новых способов доказательств привело к обновлению языка математического анализа, что позволило Г. Кантору создать теорию множеств, ставшую основанием математического анализа. В начале XX века на базе теории множеств появилось понятие числовой прямой. Возникли новые аксиоматики арифметики, геометрии, метрического и топологического пространства. Как утверждал Дедекинд, развитие понятия числа и непрерывности за более чем две тысячи лет было постепенным восхождением по лестнице смыслов; каждый очередной этап обогащал и расширял объём понятий, возникших в древности.

Две основных концепции – числа и непрерывности – пройдя долгий исторический путь и будучи связанными, послужили основой современному математическому анализу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. – Москва: Высшая школа, 1978. – 190 с.
2. Александрова Н.В. Формирование основных понятий векторного исчисления // Историко-математические исследования. – М.,1982. - 26. - С. 205 - 235.
3. Аристотель. Собрание сочинений в 4 томах. Т. III. – М.: Мысль. 1981. – 613 с.
4. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – Москва: Издательство МЦНМО, 2002. - 40 с.
5. Архимед. Сочинения / Перевод И.Н. Веселовского. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 640 с.
6. Башмакова И.Г. О роли интерпретации в истории математики // Историко-математические исследования. – М., 1986. - Вып. XXX. - С. 182 – 194.
7. Белхост Б. Огюстен Коши. – М.: Наука, Физматгиз, 1997. – 176 с.
8. Больцано Б. Парадоксы бесконечного / Перевод под ред. И.В. Слешинского. – Одесса: Mathesis, 1911. – 140 с.
9. Больцано Б. Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения / Перевод Э. Кольмана // В кн. Кольман Э. Бернард Больцано. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. - С. 170 – 204.
10. Буридан Ж. Трактат «О точке» // В.П. Зубов. Из истории мировой науки. Избранные труды 1921–1963. – СПб: Алетейя, 2006. - С. 311 – 347.
11. Буторина М. Г. Из истории многоугольника Ньютона: Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук. – Москва: АН СССР, 1992. – 13 с.
12. Васильев А.В. Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых // Papilier G. Начала анализа бесконечно малых в элементарном изложении. – Казань, 1906. - С. 1 – 70.
13. Васильев В.А. Целое число. – Петроград: Научное книгоиздательство. 1922. – 268 с.
14. [Вейерштрасс К.] Речь Вейерштрасса, произнесённая при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 года / Перевод А.Н. Крылова // УФН. - 1999. - 169. - 12. - С. 1325 – 1328. (Впервые опубликована УФН 1918 г. 1(2) 85).
15. [Вейерштрасс К.] Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской. 1871–1891 / Под. ред. П.Я. Кочиной. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
16. Габричевский А. Автографы Гёте в СССР // Литературное наследство. Т. 4-6. – М.: Жур.-газ. объединение, 1932. - С. 817 – 854.

17. Гайденко П.П. Понятие времени и проблема континуума. - 1999. - 22 с. – Электронный ресурс: http://filosof.historic.ru/books/item/f00/s00/z0000026/index.shtml

18. Гайденко П.П. Становление новоевропейского естествознания: преодоление парадоксов актуально бесконечного // Метафизика. – М., 2011. - No.1. - С. 65 - 87.

19. Галилей Г. Избранные труды в двух томах. Т. 2. М.: Наука, 1964. – 574 с.

20. Гамильтон У.Р. Избранные труды / Под ред. Л. С. Полака. – Москва: Наука, 1994. - 560 с.

21. Ганкель Г. Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием Д-ра Германа Ганкеля. Перевод с немецкого студентов математического кружка при Императорском Казанском университете. Под редакцией и с добавлениями профессора Императорского Казанского университета Н.Н. Парфентьева. – Казань: Типо-литография Императорского Университета, 1912. - 16+245 с.

22. Гаусс К.Ф. Теория биквадратических вычетов, сочинение второе // Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел / Перевод Б.Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова, комментарии Б. Н. Делоне. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. - С. 694 – 754.

23. Гейне Э. Г. Лекции по теории функций / Перевод и примечания Г.И.Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. - СПб: СПбГАСУ, 2012. – Вып.18. - С. 26 – 46.

24. Гильберт Д. Основания геометрии // Перевод А.В. Васильева. – Петроград: Сеятель, 1923. – 152 с.

25. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. - Москва: МЦНМО, НМУ, 2001. – 448 с.

26. Гончаров В.Л. О научных работах Римана // Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. - С. 7 - 46.

27. Дедекинд, Р. Непрерывность и иррациональные числа. Перевёл с немецкого профессор С.О. Шатуновский. 4-е исправленное издание со статьёй переводчика: Доказательство существования трансцендентных чисел. – Одесса: Mathesis, 1923. – 46 с.

28. Дедекинд Р. Что такое числа и для чего они служат? / Пер. с нем. приват-доцента Н. Парфентьева. – Казань: Типо-литография Императорского Университета, 1905. – 80 с.

29. Дедекинд Р. Что такое числа и для чего они служат? / Общая редакция и предисловие Г.И. Синкевич. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2015. – 98 с.

30. Действительные числа как последовательности обыкновенных дробей (Теория действительных чисел по Колмогорову) / А.В. Гладкий, Ю.Н. Козиоров // Математика в высшем образовании. – Нижний Новгород, 2009. - № 7. - С. 21 - 38.
31. Декарт Р. Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Перевод, примечания и статья А.П. Юшкевича. – М.-Л.: ОНТИ, 1938. – 302 с.
32. Демидов С.С. «Закон непрерывности» Г.-В. Лейбница и понятие непрерывности функции у Эйлера // Историко-математические исследования. – М., 1990. - XXXII-XXXIII. - С.34 – 39.
33. Демидов С.С. Русские математики в Берлине во второй половине XIX – начале XX века // Историко-математические исследования. – М., 2000. - 5(40). - С. 71 – 83.
34. Джироламо Кардано / Р.С. Гутер, Ю.Л. Полунов. – М.: Знание, 1980. - 192 с.
35. Дорофеева А.В. Формирование понятия непрерывной функции // История и методология естественных наук. Вып. XI – математика и механика. – М.: МГУ, 1971. - С. 37 – 50.
36. Дюгак П. Понятие предела и иррационального числа, концепции Шарля Мере и Карла Вейерштрасса // Историко-математические исследования. – М., 1973. - XVIII. - С.176 – 180.
37. Евклид. Начала / Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.-Л.: ОГИЗ ТТЛ, 1948. - Т.1. – 447 с.
38. Евклид. Начала / Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.-Л.: ОГИЗ ТТЛ, 1949. - Т.2. – 511 с.
39. Ермолаева Н.С. Аналитические исследования Ю.В Сохоцкого // Историко-математические исследования. – М., 1993. - XXXIV. - С. 60 – 103.
40. Ермолаева Н.С. Петербургские математики и теория аналитических функций // Историко-математические исследования. – М., 1994. - XXXV. - С. 23 – 55.
41. Жегалкин, И. Трансфинитныя числа. – Москва: Университетская типография, 1907 г. на внешней обложке и 1908 г. на титульном листе. – 346 с.
42. Зубов В.П. Трактат Николая Орема «О конфигурации качеств» // Историко-математические исследования. – М., 1958. - XI. - С. 601 – 635.
43. Зубов В.П. Трактат Брадвардина «О континууме» // Историко-математические исследования. – М., 1960. - XIII. - С. 385 – 440.
44. Зубов В.П. Жан Буридан и концепции точки в XIV веке // В.П. Зубов. Из истории мировой науки. Избранные труды 1921–1963. – СПб: Алетейя, 2006. - С. 295 –311.
45. Из истории метода многоугольника Ньютона / С.С. Петрова, М.Г. Булычёва // Историко-математические исследования. – Москва: Наука, 1989. - XXXI. - С. 38 – 51.

46. История Европы. Т. 3. От Средневековья к Новому времени. – М.: Наука, 1993. – 654 с.
47. История математики. Т. I. С древнейших времён до начала Нового времени / Под редакцией А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 351 с.
48. История математики / Под редакцией А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1972. - Т. 3. – 496 с.
49. Кантор Г. Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов // Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. - С. 9 – 17.
50. Кантор Г. Труды по теории множеств / Перевод Ф.А. Медведева и П.С. Юшкевича. – Москва: Наука, 1885 г. – 430 с.
51. Канторович Л.В. О методе Ньютона // Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения института. Труды МИАН СССР. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949. - 28. - С. 104 – 144.
52. Клайн М. Математика. Утрата определённости. – М.: Мир. - 1984. – 448 с.
53. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. Ч.I. – 432 с.
54. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 2. – Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 239 с.
55. Колмогоров А.Н. К обоснованию теории вещественных чисел // УМН. - 1946. - 1. - С. 217 - 219.
56. Кольман Э. Бернард Больцано. – М.: Издательство АН СССР, 1955. – 223 с.
57. Коренцова М.М. Кинематико-геометрическая модель анализа в «Трактате о флюксиях» К. Маклорена // Историко-математические исследования. – М., 1977. - XXII. - С. 9 - 33.
58. Коссакъ Э. Основы ариѳметики. Историческій очеркъ введенія въ ариѳметику различнаго рода чиселъ (дробныхъ, несоизмѣримыхъ, отрицательныхъ и мнимыхъ) и современно-научная на этотъ предметъ точка зрѣнія / Пер. съ нѣмецк. И. Н. Красовскаго. – Кіевъ:Унив. тип., 1885. – 47 с.
59. Кочина П.Я. Софья Васильевна Ковалевская (1850–1891). – М.: Наука, 1981. - 312 с.
60. Кочина П.Я. Карл Вейерштрасс: 1815–1897. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
61. Коши О. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении / Перевод В.Я. Буняковского. – СПб.: Императорская Академия Наук, 1831. – 254 с.
62. Коши О. Алгебрический анализ: переведён с французского Ф. Эвальдом, В. Григорьевым, А. Ильиным. – Leipzig : Druck von Bär & Hermann,1864. – 252 с.
63. Круликовский Н.Н. Из истории развития математики в Томске. – Томск: ТГУ, 2006. – 174 с.
64. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. – М.–Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 324 с.

65. Лейбниц Г. Рассуждение о различии между обыкновенным анализом и новым исчислением трансцендентных // Хрестоматия по истории математики. – М.: Просвещение, 1977. - С. 74 - 75.
66. Лейбниц Г.-В. Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница / перевод и редакция А.П. Юшкевича // УМН. – 1948. - 3 (23). - С. 165 – 204.
67. Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х тт. Т. 3. – М.: Наука, 1984. – 734 с.
68. Листинг И. Предварительные исследования по топологии. – М.: Гостехиздат, 1932. – 119 с.
69. Лопиталь Г.Ф. Анализ бесконечно малых / Пер. с французского Леви под ред. А.П. Юшкевича, а также включая статьи А.П. Юшкевич. Первый печатный курс дифференциального исчисления. - С. 9 – 46 и А.П. Юшкевич. Примечания редактора. - С. 368–376. – М.-Л.: ГТТИ, 1935. – 431 с.
70. Лузин Н.Н. Дифференциальное исчисление. – М.: Советская наука, 1946. – 451 с.
71. Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1951. – 550 с.
72. Лузин Н.Н. Собрание сочинений в трёх томах. – Москва: АН СССР. Т.1. - 1953. - 400 с., Т.2. - 1958. – 744 с., Т.3. - 1959. – 508 с.
73. Маркушевич А.И. Очерки по истории теории аналитических функций. – М.–Л.: ГТТИ, 1951. – 128 с.
74. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций // Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. – М.: Наука, 1981. – С. 115 – 255.
75. Матвиевская Г.П. Развитие учения о числе в Европе до XVII века. – Ташкент: Фан, 1971. – 231 с.
76. Медведев Ф.А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1965. – 232 с.
77. Медведев Ф.А. К истории понятия равномерной сходимости рядов // Историко-математические исследования. – М., 1974. - XIX. - С. 75 – 93.
78. Медведев Ф.А. Очерки истории теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1975. – 248 с.
79. Медведев Ф.А. Об определении понятия функции у Лобачевского и Дирихле // Историко-математические исследования. – М., 1975. - XX. - С. 232 – 245.
80. Медведев Ф.А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX – XX вв. – М.: Наука, 1976. – 232 с.
81. Медведев Ф.А. Ранняя история аксиомы выбора. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
82. Медведев, Ф.А. О курсе лекций Б.К. Млодзеевского по теории функций действительного переменного, прочитанных осенью 1902 г. в Московском университете // Историко-математические исследования. – М., 1986. - XXX. - С. 130 – 148.

83. Минковский Г. Пространство и время // УФН, 1959. - Т. LXIX. - Вып. 2 (октябрь). - С. 303 - 314.
84. Мордухай-Болтовской Д. Д. Из прошлого аналитической геометрии // Труды института истории естествознания. – М.: АН СССР, 1952. - Т. 4. - С. 217 - 235.
85. Некрасов, В.Л. Строение и мера линейных точечных областей // Известия Томского технологического института. – Томск: Известия ТТИ, 1907. - Т. 5. - №2. - С. 1 – 102; Т. 6. - №3. С.103 – 254.
86. Ньютон И. Рассуждения о квадратуре кривых // И. Ньютон. Математические работы / Перевод с латыни Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: Гостехиздат, 1937. - С. 167 – 194.
87. Ньютон И. Математические работы / Пер. Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 478 с.
88. Ньютон И. Всеобщая арифметика или книга об арифметическом синтезе и анализе / Перевод, статья и комментарии А.П. Юшкевича. – М.: Наука. 1948. – 446 с.
89. О двух подходах к обоснованию вещественных чисел / А.А. Русаков, В.Н. Чубариков // Математика в высшем образовании. – Нижний Новгород, 2006. - №4. - С. 37 - 44.
90. Орем Н. Трактат о конфигурации качеств // Историко-математические исследования. – М., 1958. - XI. - С. 636 – 719.
91. Официальный сайт истории Эдинбургского университета http://ourhistory.is.ed.ac.uk/index.php/Main_Page
92. Паплаускас А.Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. – М.: Наука, 1966. – 276 с.
93. Петрова С.С. Принцип Дирихле в работах Римана // Историко-математические исследования. – М., 1965. - XVI. - С. 295 – 310.
94. Полищук Е. М. Вито Вольтерра (1860 – 1940). – Л.: Наука, 1977. – 114 с.
95. Понтрягин Л. С. Жизнеописание Л. С. Понтрягина, математика, составленное им самим. Рождения 1908 г., Москва. – М.: Прима В, 1998. – 340 с.
96. Прокл. Комментарии к «Началам» Евклида. Часть II. Глава 8 / Перевод А. И. Щетникова. – М.: Русский фонд содействия образованию и науке. – 2013. - Электронный ресурс: http://centant.spbu.ru/plat/proklos/works/euklid/2_08.htm
97. Пуанкаре А. Математическое творчество Вейерштрасса // Кочина П.Я. Карл Вейерштрасс: 1815-1897. – М.: Наука, 1985. - С. 246 - 258.
98. Пуанкаре А. Математика и логика (1905–1906) // Новые идеи в математике. – Петроград: Образование, 1915. - № 10. - С. 1 – 52, 116 – 148.
99. Пуанкаре А. Наука и метод // Анри Пуанкаре о науке. – М.: Наука, 1983. - С. 367 - 521.

100. Разложение функций в тригонометрические ряды (Дирихле, Риман, Липшиц) / Пер. Г.А. Грузинцева и С.Н. Бернштейна. – Харьков: Харьковское математическое общество // Харьковская математическая библиотека. Серия В. № 2, 1914. - VIII. – 116 с.

101. Риман Б. Сочинения / Пер. В.Л. Гончарова. – М.-Л. ОГИЗ ГТТИ, 1948. – 543 с.

102. Рудио Ф. О квадратуре круга (Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр). С приложением истории вопроса, составлен Ф. Рудио / Перевод с немецкого под редакцией и с примечаниями академика С.Н. Бернштейна. 1-е издание. – Одесса: Mathesis, 1911. - 176 с. 2-е издание - М.- Л.: Гостехиздат, 1934. – 239 с.

103. Рыбников К.А. История математики. Т.2. – М.: МГУ, 1963. – 336 с.

104. Рыхлик К. Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано // Историко-математические исследования. – М., 1958. - XI. - С. 515 – 532.

105. Савенко Е.Н. Автор предпочёл остаться неизвестным // Гуманитарные науки в Сибири. – Новосибирск, 2011. - № 3. - С. 89 - 92.

106. Синкевич Г.И. Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере // Труды X Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ, 2012. - С. 180 – 185.

107. Синкевич Г.И. Генрих Эдуард Гейне. Теория функций // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. СПб.: СПбГАСУ, 2012. - Выпуск 18. - С. 6 – 26.

108. Синкевич Г.И. К истории эпсилонтики // Математика в высшем образовании. – Нижний Новгород, 2012. - №10. - С. 149 – 166.

109. Синкевич Г.И. Улисс Дини и понятие непрерывности // История науки и техники. – М., 2012. - № 10. - С. 3 – 11.

110. Синкевич, Г.И. Георг Кантор & Польская школа теории множеств. – СПб: СПбГАСУ, 2012. – 356 с.

111. Синкевич, Г.И. Московские математики и философы первой трети XX века: дескриптивная теория множеств и проблема именования // Генеалогия ценностей в русской философии Серебряного века: сборник научных трудов. – СПб: СПбГЭУ, 2013. - С. 444 – 456.

112. Синкевич Г.И. Понятие непрерывности у Дедекинда и Кантора // Труды XI Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: ЯГПУ, 2013. - С. 336 – 347.

113. Синкевич Г.И. Формирование топологических понятий в лекциях Вейерштрасса 1886 года // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. – СПб: СПбГАСУ, 2013. - 19. - С. 4 – 23.

114. Синкевич Г.И. Михаэль Штифель (1487-1567) и теоретико-множественные представления XVI века // История науки и техники. – М., 2013. - № 10. - С. 11 – 16.

115. Синкевич Г.И. Понятие непрерывности у Дедекинда и Кантора // Труды XI Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: ЯГПУ, 2013. - С. 336 – 347.

116. Синкевич Г.И. Эволюция понятия числовой прямой //Труды Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство» 24–29 марта, Цахкадзор, 2014. Т. I. – Цахкадзор, 2014. - С. 450 – 455.

117. Синкевич Г.И. Возникновение финансовой математики как науки и формирование категории риска на материале торговых книг эпохи позднего Средневековья и Возрождения // История, современное состояние математики и астрономии и взгляд в будущее. Материалы конференции, посвящённой памяти Насираддина Туси. Баку: Национальная академия наук Азербайджана, Институт математики и механики. 10-12 сентября 2014 года. – Баку, 2014. - С. 338 – 351.

118. Синкевич Г.И. Отделение корней алгебраического уравнения в XVII и XVIII веке. Метод каскадов Мишеля Ролля и метод многоугольника Исаака Ньютона // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. – СПб.: СПбГАСУ, 2014. - Вып. 20. - С. 22 – 38.

119. Синкевич Г.И. Распространение и влияние идей Больцано на развитие анализа XIX века // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 года. – Москва: РУДН, 2014. - С. 436 – 438.

120. Синцов Д.М. Об «аналитическом параллелограмме» Лагранжа-Ньютона // Известия Казанского ФМО. – Казань, 1902. - 2. - Т. 9. - С. 44 - 46.

121. Тимченко, И. Основания теории аналитических функций // Записки математического отделения Новороссийского общества Естествоиспытателей. Часть I: исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. – Одесса: Типография А. Шульце, 1892. - Т. XII. - С. 1 – 256.

122. Тимченко, И. Основания теории аналитических функций // Записки математического отделения Новороссийского общества Естествоиспытателей. Продолжение I части. – Одесса: Типография А. Шульце, 1899. - Т. XVI. - С. 257 – 472.

123. Тимченко И.Ю. Основания теории аналитических функций. Ч.1: исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. – Одесса: типография А. Шульце, 1899. – XV+655 с.

124. Тихомандрицкий М.А. Карл Вейерштрасс. Речь, произнесённая на заседании математического общества 28 февраля 1897 года // Сообщения и протоколы заседаний Математического общества при Императорском Харьковском университете. – Харьков: Университетская типография, 1899. - Вторая серия. - Том VI. - С. 35 – 56.

125. Тихомиров В.М. Аксиоматический метод и теория действительных чисел в лекциях А.Н. Колмогорова // Математика в высшем образовании. – Нижний Новгород, 2014. - № 12. - С. 149 – 154.

126. Фет А.И. Положение с переводами в России. Доклад А.И. Фета на конференции фонда Сороса, посвященной проблемам перевода. – Новосибирск, 1997. Электронный ресурс: http://modernproblems.org.ru/press/259-2014-07-21-07-25-37.html

127. Флоренский П.А. Введение к диссертации «Идея прерывности как элемент миросозерцания» // Историко-математические исследования. – М., 1986. - XXX. - С. 159 – 177.

128. Флоренский П. А. Сочинения в четырёх томах. – М.: Мысль, 1994. - Т. I. - С.79 – 128.

129. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. М.: Наука, 1968. - 6 изд. - Т. I. – 440 с.

130. Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.–Л.: ОНТИ, 1937. – 304 с.

131. Хрестоматия по истории математики. Математический анализ / Под ред. А.П. Юшкевича. – Москва: Просвещение, 1977. – 224 с.

132. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII веках. – М.-Л.: ГТТИ, 1933. – 430 с.

133. Циммерман Г. Фридерик Великий при смерти / Пер с фр. Москва: В университетской типографии, 1802. – 164 с.

134. Чеботарёв, Н. Г. Самуил Осипович Шатуновский // УМН, 1940. - VII. - С. 315 – 321.

135. Чеботарев Н.Г. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики // Исаак Ньютон. – М.–Л.: АН СССР, 1943. - С. 99 – 126.

136. Шатуновский, О.С. Доказательство существования трансцендентных чисел (по Кантору) // Вестник опытной физики и элементарной математики. – Одесса: Центральная типо-литография, 1896. - № 233 (5). - С. 113–122.

137. Шатуновский О.С. Введение в анализ. – Одесса: Матезис, 1923. – VIII + 244 с.

138. Широков В.С. О «Книге вычислений» Ричарда Суисета // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1976. - XXI. - С. 129 – 142.

139. Широков В.С. Инфинитезимальная концепция Буридана // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1978. - XXIII. - С. 250 – 269.

140. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. – М.: Физматгиз, 1961. - Т. 1. – 315 с.

141. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных (1748) / Перевод с латинского В.С. Гохмана. Редакция перевода, вступительная статья и примечания И.Б. Погребысского. – М.: ГИФМЛ, 1961. - Т. II. – 392 с.

142. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. – М.-Л.: ГИТТЛ. - 1949. - Т. I – 580 с.

143. Эйлер, Л. Универсальная арифметика г. Леонгарда Эйлера. Переведенная с немецкого подлинника студентами Петром Иноходцовым и Иваном Юдиным. Том 1, содержащий в себе все образы алгебраического вычисления. – СПб: Императорская Академия наук, 1768. - 376 с.

144. Эйлер Л. Письма к ученым. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1963. - С. 336 – 340.

145. Эрмит Ш. Письма к С.В. Ковалевской / Публ. П. Я. Полубариновой-Кочиной // Труды Института ИИЕТ, М., 1957. - Т. 19. - С 650 - 689.

146. Юшкевич А.П. Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке // Л. Карно. Размышления о метафизике исчисления бесконечно-малых. – М.: Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1936. – 327 с.

147. Юшкевич А.П. Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке // Л. Карно. Размышления о метафизике исчисления бесконечно-малых. – М., 1936. - С. 9 – 94.

148. Юшкевич А.П. Леонард Эйлер о квадратуре круга // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1957. - Х. - С. 159 – 210.

149. Юшкевич А.П. Дифференциальное и интегральное исчисление // История математики. Т. 2. Математика XVIII столетия. – М.: Наука, 1972. - С. 241 – 369.

150. Юшкевич А.П. Л. Карно и конкурс Берлинской академии наук 1786 на тему о математической теории бесконечного // Историко-математические исследования. – М., 1973. - XVIII. - С. 132 – 156.

151. Юшкевич А.П. Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса // Историко-математические исследования. – М., 1986. - XXX. - С. 1 – 81.

152. Яновская С.А. Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых // Труды института истории естествознания. – М.-Л.: Изд. АН СССР, 1947. - I. - С. 327–346.

153. A History of Algorithms From the Pebble to the Micro-chip / J.-C. Martzloff J.-C., M. Guillemot, E. Barbin, A. Michel-Pajus, A. Djebbar, J. Borowczyk / Traduction anglaise. – Springer. 1999. – 524 p.

154. A History of Analysis /H. N. Jahnke – ed. – USA: MAA, 2003. – 422 p. (авторский перевод с немецкого издания 1999 года).

155. Abel N. Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance // Correspondance d`Abel. – Christiana: Dybwad, 1902. - P. 111–135.

156. Abel N. Oeuvres complètes de N. H. Abel, par S. Lie et L. Sylow eds. Vols I&II (in 1). – Christiania: Christiania Imprimerie De Grondahl & Son, 1881. – 992 p.

157. Abel N. Untersuchungen über die Reihe // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1826. - N 1. - P. 311 – 339.

158. Abel N. Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcedentales // Abel N. Oeuvres completés. – Christiania : Grøndahl, 1881. Vols I&II (in 1). – P. 43- 46.

159. Ampére A. Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrete cette série à un terme quelconque / Mémoir par M. Ampére, Répétiteur à l'Ecole Politechnique // Journal de l'Ecole Politechnique. 1806. Cahier 13. P. 148–181.

160. An Analysis of the First Proofs of the Heine–Borel Theorem / N.R. Andre, S.M. Engdahl, A.E. Parker. – USA: MAA. Loci Convergense, 2013. - August. Электронный ресурс: http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/an-analysis-of-the-first-proofs-of-the-heine-borel-theorem-conclusion .

161. Analysis by Its History / E. Hairer, G. Wanner. – Springer, 2008. – 377 p.

162. Anapolitanos D.A. Leibniz: Representation, Continuity and the Spatiotemporal. – Springer, 1999. – 195 p.

163. Andersen K. Cavalieri`s Method of Indivisibles // Archive for Histiry of Exact Sciences. – Springer, 1985. - 31(4). - P. 291 – 367.

164. Argand R. Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques (1806). 2 éd. – Paris : Gauthier Villars, BNF, 1874. - c.1 - 60.

165. Argand J.R. Imaginary quantities; their geometrical interpretation. – New York: D. Van Nostrand, 1881. - 154 p.

166. Atanasov A. Topology and Continuity // Columbia Science Review. – Columbia University, 2010. - 6(2). - P. 33 – 35.

167. Baire R. Sur la summation des series divergentes // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. – Paris, 1895. - 121. - P. 1125 – 1127.

168. Baire R., Borel E., Hadamard J., Lebesgue H. Cinq lettres sur la théorie des ensembles / R. Baire, E. Borel, J. Hadamard, H. Lebesgue // Bull. Soc. Math. France. – Paris, 1905. - 33. - P. 261 – 273.

169. Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales // Fundamenta Mathematicae. – Warsaw, 1922. - 3. - P. 133 – 182.

170. Barrow-Green J. From cascades to calculus: Rolle's Theorem // The Oxford Handbook of the History of Mathematics /eds. E. Robson, J.Stedall. – Oxford University Press, 2009. - P.737 - 754.

171. Belhoste B. Cauchy. 1789–1857. – Paris: Belin, 1985. – 224 P.

172. Bellavitis G. Sul piu facile modo di trovare le radici reali delle equazioni algebraiche e sopra un nuovo metodo per la determinazione delle radici immaginarie memoria. – Venezia: Presso la segreteria dell'Instituto nel palazzo ducale, 1846. – 111 p.

173. Besenyei A. A brief History of the Mean Value Theorem. – Sarospatak, Hungary, 2012. Электронный ресурс: http://abesenyei.web.elte.hu/publications/meanvalue.pdf

174. Bianchi L. Commemorazione del socio Ulisse Dini //Atti della Reale Accademia dei Lincei. – Roma, 1919. - 28. P.154 – 163.

175. Biermann K.-R. Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm // Complete Dictionary of Scientific Biography. – Detroit, Mich.: Charles Scribner's Sons, 2008. – 700 p. Электронный ресурс: http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904588.html

176. Biermann K.-R. Die Berufung von Weierstrass nach Berlin // Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass. – Köln; Opladen: Westd. Verl. - 1966. S. 41 – 52.

177. Biermann K.-R. Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität, 1810-1920. – Univ. Bibl., 1968. - 265 s.

178. Bolzano and uniform continuity / P. Rusnock, A. Kerr-Lawson // Historia Mathematica. – Elselvier, 2005. - 32. – P. 303 – 311.

179. Bolzano B. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. – Prag: Gottlieb Haase, 1817. - 60 s.

180. Bolzano B. Rein analytisches Beweis des Lehrsatszes, das zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. – Prag, 1817// Bernard Bolzano (1781–1848). Bicentenary. Early mathematical works. Prague: Institute of Czechoslovak and General History CSAS, 1981. - P. 417 – 476.

181. Bolzano B. Functionenlehre // Schriften. Vol.1. / Edited by K. Rychlik. – Prague: Královská Ceská Spolecnost Nauk, 1930. - P. 80–184.

182. Bolzano B. Zahlentheorie // Bernard Bolzano's Schriften. Vol. 2 / Edited and with notes by K Rychlik. – Prague: Královská Ceská Spolecnost Nauk, 1931. - 64 P.

183. Bolzano B. Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik, Erste Lieferung. Unveränderter reprografischer Nachdruck der Ausgabe von 1810 / Mit einer Einleitung zum Neudruck von Hans Wussing Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1974. – 152 p.

184. Bombelli R. L'Algebra opera. Divisa in tre libri. – Bologna: Nella stamperia do Guovanni Rossi, 1572. – 648 p.

185. Borel É. Oeuvres. Tomes I - IV. – Paris: Edition du Centre National de la Recherche Scientifique, 1972.

186. Borgato M.T. Continuity and discontinuity in Italian Mathematics after the unification: from Brioschi to Peano // Organon. – Warsaw, 2009. - 41. – P. 219 – 232.

187. Borovik A., Katz M. Who gave you the Cauchy–Weierstrass tale? The Dual History of Rigorous Calculus // Foundations of Science. – Springer, 2012. - V. – 17. - Issue 3. – P. 245 – 276.

188. Bortolotti, E. La storia della matematica nella Università di Bologna by Ettore Bortolotti. – Bologna: N. Zanichelli, 1947. - 226 p.

189. Bossut Ch. Essai sur l'histoire générale des mathématiques. T. I–II. – Paris: F. Louis. - 1802.

190. Bottazzini U. Mathematics in a Unified Italy// Social History of Nineteenth Century Mathematics / ed. Mehrtens, H., Bos, H., & Schneider. – Basel: Birkhäuser. - 1981. - P. 165 – 178.

191. Bottazzini U. The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. – New York: Springer, 1986. – 332 P.

192. Bottazzini U. The Influence of Weierstrass's Analytical Methods in Italy // Amphora: Festschrift führ Hans Wussing zu seinem 65 / ed. Demidov, S.S., Folkerts, M., Rowe, D.E., & Scriba, C.J. – Basel: Birkhäuser, 1992. – P. 67 – 90.

193. Bottazzini U. Va' Pensiero: Immagini della matematica nell'Italia dell'Ottocento. – Bologna:Il Mulino, 1994. – 328 p.

194. Bottazzini U. Italy. Chap. 3. // Writing the History of Mathematics: Its Historical Development /ed. Dauben, J.W., & Scriba, C.J. – Basel: Birkhäuser. 2002. – P. 61 – 95.

195. Bottazzini U. Complex Function Theory, 1780–1900. // A History of Analysis / ed. Jahnke, H. N. – Providence, R. I.: American Mathematical Society. - 2003. – P. 213 – 259.

196. Bottazzini U. (eds). Changing Images in Mathematics: From the French Revolution to the New Millennium. – New York: Routeledge, 2001. – 320 p.

197. Bottazzini U., Gray G. Hidden Harmony – Geometric Fantasies: The Rise of Complex Function Theory. – Springer, 2013. – 848 p.

198. Briefwechsel Cantor – Dedekind / Hrsg. Von E. Noether, J. Cavaillès. – Paris: Hermann, 1937. – 60 s.

199. By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of Mathematics / T. Koetsier, J. van Mill. - 43 p. Электронный ресурс: https://staff.fnwi.uva.nl/j.vanmill/papers/papers1999/teun.pdf

200. Campbell G. A Method for Determining the Number of Impossible Roots in Adfected Aequations // Philisorhical Transactions of Royal Society. – London, 1727/28. - 35. – P. 515 – 531.

201. Cajory F. A history of the conception of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse. – Chicago, London: Open Court Publishing, 1919. – 322 p.

202. Cajory F. A History of Mathematical Notations. – London: Open Court Publishing. 1928. - V. I. – 451 p., V. 2. – 392 p.

203. Cantor G. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reichen // Mathematische Annalen von Clebsch und Neumann. – Leipzig, 1872, Bd. 5. – S. 123 – 132.

204. Cantor, G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen inhalts, mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind / Hrsg. Von Ernst Zermelo; Nebst einen Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1932. – 402 s.

205. Cantor M. Hermann Hankel // Allgemeinen deutsche Biographie. X. – Leipzig: Verlag Duncker & Humblot, 1879. – S. 516 – 519.

206. Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Viertel Band. Von 1759–1799. – Leipzig: Teubner, 1908. – 1113 p.

207. Cardani H. Artis magnae, sive de regulisalgebraicis, liber unus. – Papiae: A.Osiandro, 1545. 82 P.

208. Cauchy A.-L. Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique. Analyse Algébrique. – Paris: Éditions Jacques Gabay, 1821. - 602 p.

209. Cauchy A. Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique // Œeuvres complètes. Série 2, tome III. – Paris: Gauthier-Villars, 1882–1974. – P.1 – 471.

210. Cauchy A.-L. Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal (1823) // Œeuvres complètes. Ser. 2. Tome IV. – Paris: Gauthier-Villars, 1882–1974. - P. 9 – 261.

211. Cauchy A. Rapport sur un mémoire de M. Laurent qui a pour titre: Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable x (30 Octobre 1843) // Oeuvres complètes, 1-st ser., Tome VIII. – Paris: Gauthier-Villars, 1893. – P. 115 – 117.

212. Cauchy A. Note sur les sèries convergentes don't les divers membres sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imagnaire, entre des limites données (1853) // Comptes rendus de l'Academie. – Paris, 1853. - XXXVI. - P. 30 – 36. Oeuvres (I). – 12. - Paris, 1900. – P. 30 - 36.

213. Cayley A. The Newton-Fourier Imaginary Problem // American Journal of Mathematics. – Baltimore, 1879. - V. 2. - No. 1. – P. 97.

214. Charatonik J. History of Continuum Theory // Handbook of the History of General topology, Vol. 2. – Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1998. - P. 703 – 786.

215. Christensen Ch. Newton`s method for Resolving Affected Equations // College Mathematical journal Northern Kentucky University. – Lexington, 1996. - V. 25. - No. 5. – P. 330 – 340.

216. Chronik der Königlichen Vereinigten Friedrich–Universitäz Halle-Wittenberg für das J. 1881. – Halle. – S. 6 f.

217. Clairaut A. C. Élémens d`Algèbre. – Paris: Les frères Guérin, David l'aîné, Durand, 1746. – 349 p.

218. Cousin P. Sur les fonctions de n variables complexes // Acta mathematica. – Stockholm, 1895. - 19. – P. 1 – 61.

219. Dantscher V. Vorlesungen über die Weierstraß`sche Theorie der irrationalen Zahlen. – Leipzig: Teubner, 1908. – 79 S.

220. Dauben. J.W. C. S. Peirce's Philosophy of Infinite Sets: a study of Peirce's interest in the infinite related to the birth of American mathematics and contemporary work of Cantor and Dedekind // Mathematics Magazine. – MAA, 1977. - 50. - No. 3. – P. 123 – 135.

221. Dauben J.W. Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite. – Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1979. – 406 p.

222. Dedekind R. Stetigkeit und irrationale Zahlen. – Braunschweig: Vieweg , 1872. – 35 S.

223. Dedekind R. Was sind und was sollen die Zahlen? – Braunschweig, 1888. – 79 s.

224. Dini U. Memoria sulla serie a termini positivi // Annali delle università Toscane. – Pisa, 1867. IX ii. – P. 41 – 76.

225. Dini U. Sulla serie a termini positivi // Giornale di Matematiche. – Napoli, 1868. - VI. P. 166 – 174.

226. Dini U. Sui prodotti infiniti // Annali di matematica pura ed applicata : organo della Fondazione Annali di Matematica Pura ed Appliecata. – Bologna, 1868/69. [2]. II. – P. 28–38.

227. Dini U. Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata // Annali di matematica pura ed applicata : organo della Fondazione Annali di Matematica Pura ed Appliecata. Vili. – Bologna, 1877. - [2]. – P. 121 – 137.

228. Dini U. Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali. – Pisa: tip. Nistri, 1878. – VIII+407 p.

229. Dini U. Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale. – Pisa: tip. Nistri, 1880. – IV + 328 P.

230. Dini U. Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen relleen Grösse / Mit. Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp. – Leipzig: Teubner, 1892. – XVIII + 554 P.

231. Dini, U. Lezioni di analisi infinitesimale, due voi. – Pisa: Succ. Nistri, 1907 – 1915. – CI +720+483 P.

232. Drobisch M.W. Grundzüge der Lehre von den höheren Gleichungen. – Leipzig: Leopold Voss, 1834. – 386 s.

233. Du Bois-Reimond P. Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leur dérivées // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin. – 1872. - 74. – P. 294 – 304.

234. Du Bois-Reimond, P. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den Kleisten Intervallen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1875. - 79. – P. 21 – 37.

235. Dugac P. Charles Méray (1835–1911) et la notion de limite // Revue d`histoire des sciences et de leur applications. – Paris, 1970. - T. 23. - No 4. – P. 333 – 350.

236. Dugac, P. Eléments d’analyse de Karl Weierstrass //Archive for History of Exact Sciences. – Paris, 1973. - V. 10. - No. 1– 2. P. 41 – 176.

237. Dugac P. Richard Dedekind et les fondements de la mathématique // Travaux de l’Académie internationale d’histoire des sciences. – Paris, 1976. - No 24. – 334 p.

238. Dugac P. Fondements de l’analyse // J. Dieudonné. Abrégé d’histoire des mathématiques (1700–1900). Vol. 1. – Paris: Hermann, 1978. - P. 335 – 392.

239. Dugac P. Histoire des espaces complets // Revue d`histoire des sciences. – Paris, 1984. - T. 37. – No. 1. – P. 3 – 28.

240. Dugac P. Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet–Heine–Weierstrass–Borel–Schoenflies–Lebesgue // Archive International Histoire Sciences. – Paris, 1989. - 39. - P. 69 – 110.

241. Dugac P. Histoire de l`Analyse: Autour de la notion de limite et de ses voisinage. – Paris: Ed. Vuibert, 2003. – 419 p.

242. Dühring E. Natürliche Dialektik: Neue logische Grundlegungen der Wissenschaft und Philosophie. – Berlin: Witter, 1865. – 227 s.

243. Edwards H. M. Dedekind’s invention of ideals // Bulletin of the London Mathematical Society. – London, 1983. - 15. P. 8 – 17.

244. Edwards H.M. Newton`s Polygon // Essays in Constructive Mathematics. – Springer, 2005. P.132-141.

245. Elstrodt J. Karl Weierstrass (1815–1897). Lecture on the occasion of the unveiling of the memorial tablet in honor of the famous mathematicians Karl Weierstrass and Wilhelm Killing in Braniewo, July 24, 2008. – P. 11. Электронный ресурс: http://www.docstoc.com/docs/153909916/kw#top

246. Eminger S. Moritz Abraham Stern. Электронный ресурс: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stern.html

247. Euler L. De integratione aequationum differentialium altiorum graduum // Miscellanea Berolinensis. T. VII. – Berlin, 1743. S. 193 - 242.

248. Euler L. Cap.VIII. De quantitatibus transcendentibus ex Circulo ortis // Introductio in analysin infinitorum. – Lausanna,1748. Vol. 1. – P. 104.

249. Euler, L. (1755) Institutiones calculi differentialis. Vol. I. – Petropolis: Academia Imperialis Scientiarum Petropolitanae. 1787. – 224 p.

250. Euler L. Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis // Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae. 10 (1792). – Saint-Petersburg, 1797. Раздельная пагинация: Математика. С. 3-19.

251. Euler L. De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrale licet. M.S. Academiae exbibit. Die 5 Maii 1777 // Euler L. Institutiones calculi integralis. Vol. 4. – Petropoli: Impensis Academiae Imperialis Scientarum, 1794. - P. 183 - 194.

252. Euler L. Opera omnia, series I. Opera mathematica. T.6. – Leipzig-Berlin, 1921.

253. Ferreirós J. Labirynth of Thought: a History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics. – Springer, 2007. – 466 p.

254. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass, 1815–1965 / Hrsg. Von H. Behnke, K. Kopfermann. – Köln; Opladen: Westdt. Verl., 1966. - 612 S.

255. First year algebra / W. Wells, W. W. Yart. – New York, Boston: Heath, 1912. – 325 p.

256. Fontenelle B. Eloge de M. Rolle // Histoire de l`Académie Rouale des Sciences. – Paris, 1719. – P. 94 – 100.

257. Ford, W. D. A Brief Account of the Life and Work of the Late Professor Ulisse Dini // Bulletin of the American Mathematical Society. – New York, 1920. - V. XXVI. – P. 178 – 177.

258. Fourier J.B. Théorie analytique de la chaleur (1822) // Oeuvres. Paris: Gauthier-Villard et fils, 1888. - V. 1. – 1199 p. (1-ed. Paris: Chez Firmin Didot, père et fils, 1822. – 638 p.)

259. Fourier J.B.J. Analyse des équations determinées. Première partie. – Paris: Chez Firmin Didot frères, 1831. – 258 p.

260. Fréchet M. Sur quelques points du calcul fonctionnel // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. . – Palermo, 1906. - 22. – P. 1–74.

261. Galileo Galilei. Dialogue Concerning Two new Sciences. Translated by Henry Crew and Alfonso de Salvo. – New York: Macmillan, 1914. – 753 p.

262. Gauss K.F. Grundbegriffe der Lehre von der Reihen // Werke. – Leipzig : B. Bd. X/1. 1917. – S. 390 – 394.

263. Gibbs J.W., Wilson E.B. Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs, by E. B. Wilson. – New York : C. Scribner's Sons, 1901. - 470 p.

264. Gispert H. La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue… et tous les autres // Revue d`histoire des mathématiques. – Paris, 1995. - I. – P. 39 – 81.

265. Goebel, M. Heinrich Eduard Heine (1821 – 1881). Virtuelles Museum des Instituts fur Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg zur Geschichte der Mathematik in Wittenberg und Halle // M. Goebel, K. Richter, H. Schlosser http://www.mathematik.uni-halle.de/history/heine/index.html – Halle: Leopoldina, 1881. - 17. – S. 210.

266. Goodstein, J. R. The Volterra Chronicles: The life and Times of an Extraordinary Mathematician 1860–1940. – New York-London: AMS, 2007. – 310 p.

267. Grabiner J.V. The Origin of Cauchy`s Rigorous Calculus. – Cambrige: MIT Press. – 1981. – 252 p.

268. Grabiner J.V. The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass // Mathematical Magazine. – New York, 1983. - Vol. 56. - 4. – P. 195 – 206.

269. Grabiner J.V. Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origin of Rigorous Calculus // American Mathematical Mounthly. – New York, 1983. - V. 90. - No 3. – P.185 – 194.

270. Grassman H. Der Ausdehnungslehre von 1844 oder Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik. – Leipzig: Verlag von Otto Wigand, 1878. - 347 s.

271. Grassmann H. G. Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Teil 1: Arithmetik. – Berlin: Verlag von T. C. F . Enslin (Adolph Enslin), 1861. – 232 S.

272. Grattan-Guinness, I. An unpublished paper of Georg Cantor "Prinzipien einer Theorie der Ordnunstypen. Erste Mitteilung" // Acta mathematica. – Stockholm, 1970. - V. - 124. – P. 81 – 101.

273. Grattan-Guinness I. Bolzano, Cauchy and the "New Analysis" of the Early Nineteenth Century // Archive for History of Exact Sciences. – Berlin–Heidelberg–New York, 1970. Vol. 6. No 3–5. – P. 372 – 400.

274. Grattan-Guinness I. The mathematics of the past: distinguish its history from our heritage // Historia mathematica. – Elsevier, 2004. - 31. - P. 163 – 185.

275. Gray J. Berlin in the 19-th Century // Newsletters of the European Mathematical Society. – Zürich, 2009. - 72. – P.29 – 33.

276. Gregorie J. The Universal Part of Geometry devoted to the transmutation and measurement of curved quantities / Translated by Andrew Leahy. - Электронный ресурс: http://math.knox.edu/aleahy/gregory/WORKING/gpu.htm

277. Gregorio, J. Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura // Geometria pars universalis. – Padoua: Ex Typographia Iacobi de Cadorinis, 1668. - P. 2 – 82.

278. Gray J. Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré. – Basel: Birkhäuser, 1986. – XX + 338 P.

279. Gray J. Languages for Mathematics and the Language of Mathematics in a World of Nations // Mathematics Unbound: the Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800–1945. / Parshall, K. H., & Rice, A. (eds). – Providence R.I.: American Mathematical Society, 2002. – P. 201 – 228.

280. Gray J. Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics. - Princeton: Princeton University Press, 2008. – 528 p.

281. Gray J. Henri Poincaré: a scientific biography. – Princeton, 2012. – 608 p.

282. Gruszecki L. Historia twerdzenia Schwarza o równości pochonzch mieszanych // Matematyka czasów Weierstrassa. Materialy XV Ogólnopolskiej Szkoly Historii Matematyki. Kołobrzeg, 28 maja – 2 czerwca 2001 / pod redakcją Stanisława Fudalego. – Szczecin: Druk El Toro, 2002. – P.155 – 161.

283. Hamilton W.R. Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time // Transactions of the Royal Irish Academy. – Dublin, 1837. - V. 17. – Part 1. - P. 293 – 422.

284. Hankel H. Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes Habilitations-Dissertation. – Leipzig: Leopold Voss, 1863. – 44 S.

285. Hankel H. Theorie der complexen Zahlensysteme // Vorlesungen über die komplexen Zahlen und ihre Functionen, 1 Teil. – Leipzig: Leopold Voss, 1867. – 212 S.

286. Hankel H. Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Functionen. – Tübingen, 1870. – 51 S.

287. Hankel H. Die Zylinderfunktionen erster und zweiter Art // Mathematische Annalen. – Leipzig, 1869. - S.467 – 501.

288. Hankel H. Die Elemente der Projectivische Geometrie in synthetische Behandlung // Axel Harnack (Hrsg): Vorlesungen. – Leipzig: B. G. Teubner, 1875. – 256 S.

289. Hankel H. Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderte / Ein vortrag beim eintritt in den akademischen senat der universität Tübingen ein 29 April 1869. – Tübingen: Tübingen Fues, 1869. – 36 S.

290. Hankel H. Grenze //Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste. – Leipzig: Brockhaus-Verlag, 1870/71. - Vol. 90. – P. 185 – 211.

291. Hankel H. Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. – Leipzig: B.G. Teubner, 1874/1875. – 420 s.

292. Hausdorff F. Manuscript 1912, Archiv der Universität Bonn // Ketsier, van Mill. By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of Mathematics. – 43 s. Электронный ресурс: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.511.1402&rep=rep1&type=pdf

293. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. – Leipzig: von Veit. 1914. – 476 s.

294. Heine E. Über einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1843. - 26. – S. 185 – 216.

295. Heine E. Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1845. - 29. – S.185 – 208.

296. Heine E. Summation der Reihe (1). siehe unten // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin. 1846. 31. – S. 133 – 135;

297. Heine E. Über die Reihe (2). Aus einem Schreiben des Herrn Dr. Heine an Herrn Prof. Lejeune Dirichlet // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1846. - 32. – S. 210 – 212.

298. Heine E. Verwandlung von Reihen in Kettenbrüchen (Auszug eines Schreibens des Dr. E.Heine, Privatdozenten in Bonn, an den Prof. C.G.J. Jacobi in Berlin) // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin. 1846. - 32. – S. 205 – 209.

299. Heine E. Untersuchungen über die Reihe (2) // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1847. - 34. – S. 285 – 328.

300. Heine E. Abriss einer Theorie der elliptischen Functionen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin. 1850. 39. – S.122–137.

301. Heine E. Über die in der Gausschen "Summatio quarumdam serierum singularium" vorkommenden Reihen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1850. - 39. – S. 288 – 289.

302. Heine E. Theorie der Anziehung eines Ellipsoids // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1851. - 42. – S. 70 – 82.

303. Heine E. Der Eisensteinsche Satz über Reihen-Entwickelung algebraischer Functionen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1853. - 45. – S. 285 – 302.

304. Heine E. Untersuchungen über ganze Functionen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1854. - 48. – S. 237 –242.

305. Heine E. Fernere Untersuchungen über ganze Functionen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1854. – 48. – S. 243 – 266.

306. Heine E. Ueber die Entwickelung von Wurzeln algebraischer Gleichungen in Potenzreihen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1854. - 48. – S. 267 – 275.

307. Heine E. Potentiale einer Kreisscheibe // Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen d. Königl. Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. – Berlin, 1854. – S. 564 – 572.

308. Heine E. Nachtrag zu Potentiale einer Kreisscheibe // Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen d. Königl. Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. – Berlin, 1855. – S. 306 – 308.

309. Heine E. Directer Beweis der Gleichheit zweier bestimmter Integrale // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1855. - 50. – S. 323 – 324.

310. Heine E. Der Übergang von den unbestimmten zu bestimmtem Integralen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1856. - 51. – S. 383 – 401.

311. Heine E. Die Reduction der elliptischen Integrale in ihre kanonische Form // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1857. - 53. – S. 199 – 230.

312. Heine E. Auszug eines Schreibens über Kettenbrüche von Herrn E. Heine an den Herausgeber // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1857. - 53. – S. 284 – 285.

313. Heine E. Bemerkungen zu Jacobi's Abhandlung über Variationsrechnung // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1857. - 54. – S. 68 – 71.

314. Heine E. Lagrange's Umkehrungsformel // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1857. - 54. – S. 388.

315. Heine E. Über die binomische Reihe // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1858. - 55. – S. 279 – 280.

316. Heine E. Auszug eines Schreibens über die Lame'schen Functionen an den Herausgeber // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1859. - 56. – S. 79 – 86.

317. Heine E. Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1860. - 57. – S. 231 – 247.

318. Heine E. Handbuch der Kugelfunctionen. – Berlin: G. Reimer, 1861. – 382 s.

319. Heine E. Die Lame'schen Functionen verschiedener Ordnungen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1863. - 60. – S. 252 – 303.

320. Heine E. Der Abelsche Satz // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1863. - 61. – S. 276 – 282.

321. Heine E. Über einige bestimmte Integrale // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1863. - 61. – S. 356 – 366.

322. Heine E. Die speciellen Lame'schen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1863. - 62. – S. 110 – 141.

323. Heine E. Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, sowie über die Existenz und Anzahl der Lame'schen Function erster Art // Monatsberichte der Königlichen Preussische Akademie des Wissenschaften zu Berlin. – Berlin, 1864. – S. 13 – 22.

324. Heine E. Das Newton'sche Gesetz. Rektorratsrede vom 12 Juli 1864. – Halle: Verl.d. Buchhandlung Waisenhaus, 1864.

325. Heine E. Über Kettenbrüche // Monatsberichte der Königlichen Preussische Akademie des Wissenschaften zu Berlin. – Berlin, 1866. – S. 436 – 451.

326. Heine E. Mittheilung über Kettenbrüche (Auszug aus den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin) // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1867. - 67. – S. 315 – 326.

327. Heine E. Geometrische Bedeutung der Kugelfunctionen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1868. - 68. – S. 386 – 389.

328. Heine E. Die Fourier–Besselsche Function // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1869. - 69. – S. 128 – 141.

329. Heine E. Ueber trigonometrische Reihen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1870. - 71. – S. 353 – 365.

330. Heine E. Aus brieflichen Mittheilungen. Zur Variationsrechnung // Mathematische Annalen. – Leipzig, 1870. - 2. – S. 187 – 191.

331. Heine E. Über einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichelt'schen Principes // Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.A. Universität zu Göttingen. – Göttingen, 1871. - Nr. 16. – S. 375 – 383.

332. Heine E. Ueber einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet'schen Principes // Mathematische Annalen. – Leipzig, 1871. - 4. – S. 626 – 632.

333. Heine E. Die Elemente der Functionenlehre // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1872. - 74. – S. 172 – 188.

334. Heine E. Das Potential eines homogenen Kreises // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1873. - 76. – S. 271 – 272.

335. Heine E. Ueber die constante elektrische Strömung in ebenen Platten // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1875. - 79. – S. 1 – 16.

336. Heine E. Lettre a M. Re'sal // Journal de mathématiques pures et appliquées. – Berlin, 1876. - 3. – II. - S. 155 – 158.

337. Heine E. Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1880. - 89. – S. 19 – 39.

338. Heine E. Ueber die Kugelfunction $P_n(\cos y)$ für ein unendliches n // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1881. - 90. - S. 329–331

339. Hermit Ch. Sur les fonctions exponentielle // Comptes Rendus de l`Academie des Sciences. – Paris, 1873. - 77. – P. 18 – 24, 74 – 79, 226 – 233, 285 – 293.

340. Hilbert D. Zum Gedächtnis an Karl Weierstrass // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. – Göttingen: Vandenboeck und Ruprecht, 1897. – S. 60 - 69.

341. Hilbert D. Grundlagen der geometrie. – Leipzig: Teubner, 1899 (1 ed.), 1903 (2ed.) – 175 s.

342. De l'Hôpital, G.F. Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. – Paris: L'Imprimerie royale, 1696. – 181 p.

343. L`Huilier S.-A.-J. Exposition élémentaire des principles des calcul suprieurs (1786) // Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs [et] De relatione mutua capacitatis

et terminorum figurarum, geometrice considerata ; seu de maximis et minimis, pars prior, elementaris. - Berlin: Georges Jacques Decker, 1787; Varsovie: Gröle. 1782, 1787. – 216 p.

344. James I. From Euler to von Neumann. – London: Cambridge University Press, 2002. – P. 195 – 198.

345. Joyce D.E. Notes on Richard Dedekind's Was sind und was sollen die Zahlen? – Worcester: Clark University, 2005. – 37 p. Электронный ресурс: https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/numbers/dedekind.pdf

346. Kästner, A. G. Die mathematischen Anfangsgründe. 4 Th. 7 Bd. – Göttingen: Witwe Vandenhoeck, 1768–1769.

347. Kaestner A.G. Angfangsgründe der Analysis endlicher grössen. – Göttingen: Witwe Vandenhoeck, 1794. – 590 s.

348. Keele L. Theories of continuity and infinitesimals: four philosophers of the nineteenth century: Dissertation. Submitted to the faculty of the University Graduate School in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor of Philosophy in the Department of Philosophy, Indiana University. – Bloomington, 2008. – 350 p.

349. Kertész A. Georg Cantor. Schöpfer der Mengenlehre / Bearbeitet von Manfred Stern. – Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft, 1983. – 118 s.

350. Klein F. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. – Berlin: Julius Springer Verlag. Teil I, 1926. – 385 s. Teil II, 1927. – 208 s.

351. Koetsier T. Lakatos, Lakoff and Núňez: Towards a Satisfactory Definition of Continuity // Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives / Edited by G. Hanna, H. Jahnke, and H. Pulte. – Springer, 2009. – P. 33 - 46.

352. Kossak E. Die Elemente der Arithmetik, Programm Fried. – Berlin: Gedruckt in der Nauckschen Buchdruckerei, 1872. – 29 s.

353. Lacroix S.F. Anfangsgründe der Algebra / Über. M. Metternich. – Mainz: Kupferberg, 1811. – 596 s.

354. Lacroix S. F. Élémens d'algèbre, à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations. 15-ed. – Bruxelles: H. Remy, 1830. – 360 p.

355. Lacroix S. F. Traité du calcul differentiel et du calcul intégral. 2 vol. – Paris: J.B.M. Duprat, 1797-1798. – 519, 732 p.

356. Lacroix S. F. Traité élementaire de calcul différentiel et de calcul intégral. 2 ed. – Paris: Courcier, 1806, 1828. – 646 P.

357. Lagrange J. L.Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries // Oeuvres complètes / Ed. L.-A.Serret, G. Darboux. – Paris: Gauthier-Villars, 1867. Vol. III. – P. 5 – 76.

358. Lagrange J. L. Sur une nouvelle espece de calcul relatif a la différentiation et a l'integration des quantités variables // Nouveaux Memoires de l'Academie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. – Berlin, 1772. = Lagrange J.-L. Oeuvres complètes. Vol. III. – Paris: Gauthier-Villars, 1867. – P. 441 – 478.

359. Lagrange J.-L. (1879) Traité de la resolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques // Oeuvres complètes. Vol. VIII. – Paris: Gauthier-Villars, 1867. – P. 11–367.

360. Lagrange J. L. Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies // Oeuvres complètes. Vol. IX. – Paris: Gauthier-Villars, 1881. – P. 13– 413.

361. Lambert I.H. Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rektifikation des Cirkuls suchen // Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung II (in zwei Theilen). – Berlin: Verlag der Buchhandlung der Realschule, 1770. – P. 140 – 169.

362. Landau E. Richard Dedekind. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. – Göttingen, 1917. – S. 50 – 70.

363. Laurent H. Ch. Méray. Nouveau précis d'analyse infinitésimale // Bulletin des Sciences Mathématiques Et Astronomiques. – Paris, 1873. - 4. – P. 24 – 28.

364. Lebesgue H. À propos de quelques travaux mathématiques récents (1905) // L'Enseignement Mathématique. – Paris, 1971. Sér.2. - 17. - P. 1 – 48 (In Oeuvres, vol. 2).

365. Lebesgue H. Sur les fonctions représentables analytiquement // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Sér 6. - 1. – Paris, 1905. – P. 139 – 216.

366. Leathem J.G. Volume and Surface Integrals Used in Physics. – Cambridge: University press, 1905. - 47 p.

367. Legendre A.-M. Eléments de géométrie. Note IV. Où l'on demontre que le rapport de la circonférence au diametre et son quarré sont des nombres irrationnels. – Paris: Didot, 1794. – 335 p.

368. Leibniz G. Specimen novum analyseos pro scientia infini, circa Summas & Quadraturas // Acta eruditorum. – Leipzig, 1702. - May. - P. 210 – 219.

369. Lejeune-Dirichlet, P.G. Vorlesungen ueber die lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen / Hrsg. J. Arendt. – Braunschweig: Friedrich Vieweg. 1904. – 476 p.

370. Lejeune-Dirichlet. Démonstration d'un théorème d'Abel // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. II Série. – Paris, 1856. - T. VII. - P. 253 – 255.
371. Lejeune Dirichlet P. Vorlesungen über Zachlentheorie / Heraugegeben von R. Dedekind. – Braunschweig: Friedrich Vieweg, 1863, 1871, 1879, 1894. – 414 s.
372. Lejeune Dirichlet P. Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen mit vorzüglicher Berücksichtigung der von P. Gustav Lejeune-Dirichlet im Sommer 1858 gehaltenen Vortrüge über bestimmte Integrale / Hrsg. Meyer, G.F. – Leipzig: Teubner, 1871. – 349 s.
373. Lindelöf, E. Sur quelques points de la thèorie des ensembles // Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris. – Paris, 1903. – 137. – P. 697-700.
374. Von Lindemann F. Über die Ludolph´sche Zahl // Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. – Berlin: Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften, 1882. – P. 679 – 682.
375. Liouville J. Sur les nombres transcendants // Comptes Rendus de l`Academie des Sciences. – Paris, 1844. – XVIII. – P. 883 – 885.
376. Lipschitz, R. De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et praecipue earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infintum disquisitio // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1864. - 63. - P. 296 – 308.
377. Listing J.B. Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyeder // Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. – Göttingen, 1862. - 10. – P. 97 – 182.
378. Loria G. Uliss Dini // Gli scienziati italliani dall’inizio del Medio evo al nostril giorni. Repertorio bibliographico / Diretto da Aldo Mieli. –- Roma: Dott Attilio Nardechia, 1921. - V. I. - Parte 1. – P. 137–150.
379. Lourdes B. M. de. Pierce and Cantor: about the Continuum and infinitesimals // 24-th International Congress of History of Sciense, Technology and Medicine. – Manchester, 2013. – P. 337.
380. Mancosu P. Mathematical Style // Stanford Encyclopedia of Philosophy. Электронный ресурс: http://plato.stanford.edu/entries/mathematical-style/ - 2017.
381. [MacLaurin] A second letter from Mr. Colin Mac Laurin, concerning the Roots of Equations, with the Demonstration of other Rules in Algebra // Phylosophical Transactions of Royal Society. – London, 1729. - 36. – P. 59 – 96.

382. MacLaurin C. A Treatise of Fluxions in two books by Colin MacLaurin, A.M., Professor of Mathematics in the Univesity of Edinburg and Fellow of the Royal Society. – Edinburg: Printed by T.W. and T. Ruddmans, 1742. – 479 p.

383. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. – Oxford: Clarendon Press, 1873. - 504 p.

384. Méray Ch. Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données // Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. phys. nat. – Paris, 1869. – (2). - 4. - P. 280 – 289.

385. Méray Ch. Nouveau précis d'analyse infinitésimale. XXIII – Paris: Publication: F. Savy, 1872. – 310 p.

386. Méray Ch. Considérations sur l'enseignement des mathématiques. – Dijon: Darantière, 1892. – 52 p.

387. Méray Ch. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques. Principes généraux. IV vol. – Paris: Gauthier-Villars et fils, 1894 – 1898.

388. Mioduszewski J. Ciągłość. – Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogichne, 1996. – 182 s.

389. Mioduszewski E. Connectedness // Encyclopedia of General Topology. – Amsterdam: Elsevier, 2003. – P. 223 – 226.

390. Mittag-Leffler G. Die ersten 40 Jahre des Lebens von Weierstrass //Acta Mathematica. – Stockholm, 1923. - 39. – P. 1 – 57.

391. Moivre Ab. Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicus quae vocantur Cardani resolution analvtica // Philos. Trans. – London, 1706/1707. - P. 2368-2371.

392. Moivre Ab. De Sectione Anguli//Philisophical Transactions. – London, 1722. – 374. - V. 32. - P. 228 - 230.

393. Montucla J.-E. Histoire des mathématiques. 2 vol. – Paris: A. Jombert, 1758. – 680 p.

394. Moore H.G. The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology // Historia Mathematica. – Elsevier, 2008. - 35. – P. 220 – 241.

395. Neuenschwander E. Studies in the History of Complex Function Theory II: Interactions among the French school, Riemann and Weierstrass // Bulletin (New series) of the American Mathematical Society. – New York, 1981. - V. 5. - No. 2. - September. – P. 87 – 107.

396. Newton I. Arithmetica universalis; sive De compositione et resolutione arithmetica liber. – Cambridge: Typis Academicus; London: Impensis Benj. Tooke. Bibliopolae, 1707. – 343 p.

397. Newton, I. (1669, 1711) De analysi per aequationes numero terminorum infinitas // Newton, I. Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis. – Londinium: Ex officina Pearsoniana, 1711. – 101 p.

398. Newton, I. The Method of Fluxions and Infinite Series; with Its Application to the Geometry of Curve-Lines. – London: Henry Woodfall, 1736. – 378 p.

399. Niccolò Tartaglia. Quesiti et inventioni diverse. – Venetia: Ruffinelli, 1546. – 148 p.

400. Peacock G. A treatise on algebra. – London, Cambridge: J. & J.J. Deighton, 1830. - 726 p.

401. Peano G. Arithmetices principia, nova method exposita. – Romae: Fratres Bocca, 1889. – 49 p.

402. Perkins D. Calculus and its origin. – USA MAA: Spectrum, 2012. – 180 p.

403. Phragmén E. En ny sats inom teorien för punktmängder (A new theorem in the theory of point sets, Swedish) // Öfversigt of Kungliga Vetenskapsakademien Förhandlingar. – Stockholm, 1884. - XLI. - No. 1. – P. 121 - 124.

404. Pincherle S. Saggio di una introduzione alla teoria delli funzioni analitiche secondo i principi del prof. C. Weierstrass compilato dal Dott // Giornale di Matematiche di Battaglini. – Napoli, 1880. - № 18. – 124 p.

405. Pincherle S. Opere scelte. – Roma : Edizioni Cremonese, 1954. Volume I. – VI+396 p. Vol. II. – 494 p.

406. Pionchon J. Notice sur la vie et les travaux de Charles Méray // Revue bourguignone d'Enseignement Supérieur. – Dijon, 1912. - 22. – P. 1 – 158.

407. Poggendorff J. C. Biographisch-Literarisches Handworterbuch zur Geschichte der Exacten Wissenschaften. IV vol. – Leipzig: Verlagg von Johann Ambrosius Barth., 1863-1904.

408. Putnam, H. What is mathematical truth? // Proceedings of the American Academy Workshop on the Evolution of Modern Mathematics. – Boston, Mass., 1974 // Historia Mathematica. Elselvier, 1975. - 2. - No. 4. – P. 529 – 533.

409. Raphson J. (1690) Analysis Aequationum universalis. 2 ed. – London: Typis TB. for A. & I. Churchill et al., 1702. – 95 p.

410. Reynaud Ch.-R. Analyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les problèmes de mathématiques. 2 vols. – Paris: J. Quillau, 1708. (2-е издание с примечаниями Вариньона. – 1736 г.).

411. Riesz F. Stetigkeit und Abstrakte Mengenlehre // Atti del IV Congresso Internationale dei Matematici. Vol. 2. – Rome, 1908. – P. 18 – 24.

412. Rolle M. Traité d'algèbre, ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique. – Paris: Estienne Michallet, 1690. – 272 p.

413. Rolle M. Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés. – Paris: Jean Cusson, 1691. – 128 p.

414. Roque T. Les définitions les plus rigoureuses sont-elles plus faciles à comprendre ? Charles Méray et la proposition d'une définition « naturelle » des nombres irrationnels. Universidade Federal do Rio de Janeiro. – Электронный ресурс: https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:M_XHOIq-lT0J:www.edc.uoc.gr/~tzanakis/ESU6/PdfFiles/6-04-Roque.pdf+LES+D%C3%89FINITIONS+LES+PLUS+RIGOUREUSES+SONT-ELLES+PLUS+FACILES+%C3%80+COMPRENDRE+?+Charles+M%C3%A9ray+et+la+proposition+d%E2%80%99une+d%C3%A9finition+%C2%AB+naturelle+%C2%BB+des+nombres+irrationnels+Tatiana+ROQUE+Universidade+Federal+do+Rio+de+Janeiro&hl=ru&gl=ru&pid=bl&srcid=ADGEESibLOQS4DwTFRO8LZ2pT-RURu5s2O6fOQ2XAzxeveCB7PIrC9lfdiz02Ee4rl9SXU_csvvIIaIHIXrOhxQq1F5PEMDof99jumFI0b2oQZf--V_ELTh2wxYNHq_6SPmluy_c36hQ&sig=AHIEtbSVhM-sJquEPe48C1HY_8OUxb0kCg

415. Rösling Ch. L. Grundlehren von den Formen, Differenzen, Differentialien und Integralien der Functionen. – Erlangen: J. J. Palm, 1805. – 456 s.

416. Schlapp R. Colin Maclaurin: A Biographical Note // Edinburgh Mathematical Notes. – Edinburg, 1946. - No 37. – P.1 – 6.

417. Schoenflies A. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. – Leipzig, 1900. - V. 8. - Zweiten Heft. – P. 1- 250; 2 ed. Leipzig: B.G. Teubner. – 2. Teil. - 1908. – 360 p.

418. Schubring G. Conflicts Between Generalization, Rigor and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-th – 19-th Century: France and Germany. – Springer, 2006. – 692 p.

419. Seidel Ph.L. Note über eine Eigenschaft der Reihen welche discontinuirliche Functionen darstellen // Abhandlungen der königlichen Akademie der Wissenschaften München Math.-Phys. Kl. - München, 1848. – P. 381 – 394; Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. №116. – Leipzig, 1900. - S. 35 - 45.

420. Seiderlová I. Bemerkung zu den Umgängen zwischen B. Bolzano und A. Cauchy // Časopis pro pěstování matematiky a fysiky. – Praha, 1962. - 87. - No 2. – C. 225 – 226.

421. Shain, J. 1937. The method of cascades // The American Mathematical Monthly. MAA, 1937. - 44. – P.24 – 29.

422. Simpson T. Essays on Several Curious and Useful Subjects, in Speculative and Mix'd Mathematics. – London: Henry Woodfall, 1740. – 144 p.

423. Sinkevich G. Concepts of a Numbers of C. Méray, E.Heine, G. Cantor, R. Dedekind and K. Weierstrass //Technical Transactions. – Kraków, 2014. - 1. – P. 211 – 223.

424. Sinkiewich G. I. Historia dwóch twierdzeń analizy matematycznei: M. Rolle, B. Bolzano, A. Cauchy // Dzieje matematyki polskiei II / Praca zbiorowa pod redakcją W. Więsława. Institut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego. – Wrocław: Sowa, 2013. – P. 165 – 181.

425. Smith, H. J. S. On the integration of discontinuous functions // Proceedings of the London Mathematical Society. – London, 1875. - S.1. - V. 6. – P. 140 – 153.

426. Smith D.E. A source book in Mathematics. Vol. 3. – New York: Dover publications, 1959. - P. 55-66.

427. Some remarks on the history of Functional Analysis / K. Ciesielski, M.S. Moslehian // Annals of Functional Analysis. – Durham, 2010. - 1. – P. 1 – 12.

428. Sonar Th. Brunswick`s Second Mathematical Star: Richard Dedekind (1831-1916. – Springer Science+Busness Media: LLC, 2012. - Vol. 34. - No. 2. – P. 63 – 67.

429. Stifelio M. Arithmetica Integra. – Norimbergae: apud Johan. Petreum, 1544. – 327 p.

430. Stockes G.G. On the critical values of the sums of periodic series (presented: 1847; published: 1849) // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge, 1849. - 8. – P. 533 – 583.

431. Stolz O. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung // Mathematische Annalen. – Leipzig, 1881. - Bd. 18. – S. 255 – 279.

432. Stolz O. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: Nach den neueren Ansichten. 2 v. in 1. - Leipzig: B.G. Teubner, 1885. – 670 s.

433. Stuloff N. H.E.Heine//Deutsche-biographie. Электронный ресурс: http://www.deutsche-biographie.de/sfz28898.html + Stuloff, Nikolai, Heine, Heinrich Eduard Simon“, in: Neue Deutsche Biographie. 1969. - 8. – S. 292. Электронный ресурс: http://www.deutsche-biographie.de/pnd116659122.html

434. Tannery, J. Méray Ch. « Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques, Première partie : Principes généraux » // Bulletin des Sciences Mathématiques. – Paris, 1894. - (2) - 18. – P. 80 – 90.

435. Ten misconceptions from the history of analyses and their debunking / P. Błaszczyk, M. Katz, D. Sherry // Foundation of Science. – Springer, 2012. - V. I. - P. 1– 46.

436. Thim J. Continuous Nowhere differentiable Functions: Master's Thesis. - Luleå: University of Technology, 2003. – 98 p.

437. Thomae J. Elementare Theorie der analytischen Functionen einer Veränderlichen. – Halle: L. Nebert, 1880. – 132 s.

438. Thomé W.L. Ueber die Kettenbruchentwicklung der Gaußschen Function F (α, 1, γ, x) // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1866. - 66. – S. 322 – 336.

439. Tropfke J. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. mit bes. Berücks. d. Fachwörter. Bd. 6. Analysis. – Berlin: de Gruyter, 1924. – 169 s.

440. Turnbull H.W. A lecture in Aberdeen on 4 February 1947 to celebrate the bi-centenary of the death of Colin Maclaurin / Электронный ресурс: Часть I http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Turnbull_Maclaurin_1.html Часть II http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Turnbull_Maclaurin_2.html

441. Turner L. Cultivating Mathematics in an International Space: Roles of Gösta Mittag-Leffler in the Development and Internationalization of Mathematics in Sweden and Beyond, 1880 – 1920. Электронный ресурс: http://css.au.dk/fileadmin/www.ivs.au.dk/css.au.dk/Turner_PhD_Thesis_2012.pdf – 291p.

442. Veblen O. The Heine-Borel theorem // Bulletin of the American Mathematical Society. – New York, 1904. - 10. – P. 436 - 439.

443. Veronese G. Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. – Padova: Tipografia del Seminario, 1891. – 629 p.

444. Wallis J. A Treatise of Algebra, Both Historical and Practical: Shewing the Original, Progress, and Advancement Thereof, from Time to Time, and by What Steps It Hath Attained to the Heighth at Which Now It Is; With Some Additional Treatises. – London; Oxford: John Playford, 1685. – 633 p.

445. Wangerin A. Mitteldeutsche Lebensbilder. Bd 1-5. – Magdeburg, 1926-1930. - III, 1928, S. 429-36.

446. Washington Ch. Michel Rolle and his Method of Cascades. Электронный ресурс: http://mathdl.maa.org/images/upload_library/46/Washington_Rolle_ed.pdf

447. Weierstrass K. Differentialrechnung 1861. Ausarbeitung der Vorlesung an dem König. Gewerbeinstitut zu Berlin im Sommersem. 1861 von H.A. Schwarz (Institut Mittag-Leffler). Extraits // in: Pierre Dugac. Eléments d’analyse de Karl Weierstrass // Archive for history of exact sciences. – Paris, 1973. - Vol. 10. – N. 1– 2. – P. 41 – 176. Appendice II.

448. Weierstrass K. Über die allgemeinsten Eindeutigen und 2*n*-fach periodischen Functionen von n Veränderlichen // Monatsberichte der Königlichen Preussische Akademie des Wissenschaften zu Berlin. – Leipzig, 1869. – S. 853 – 857.

449. Weierstrass K. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen // Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. – Berlin, 1876. – S. 11 – 60.

450. Weierstrass K. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner-Archiv für mathematic. Band 9, 272 s. – Springer-Verlag Reprint, 1989. – 272 s.

451. Weierstrass K. Zu Hrn. Lindemanns Abhandlung: 'Über die Ludolph'sche Zahl' // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. – Berlin, 1885. - 2. - S. 1067 – 1086.

452. Wessel C. On the analytical Representation on Direction; an Attempt, applied Chiefly to the Solution of Plane and Spherical Polygons // Smith D.E. A source book in Mathematics. Vol. 3. – New York: Dover publications, 1959. - P. 55 - 66.

453. Więsław W. Analitycy niemieccy przełomu XIX I XX wieku // Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-hutniczej im. S. Staszica. – Kraków, 1993. - Nr. 1522. – P.75 – 90.

454. Więsław W. Rozwój teorii funkcji algebraicznych i abelowych // Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-hutniczej im. S. Staszica. Kraków. 1993. Nr. 1522. – P. 91 – 107.

455. Więsław W. Matematyka I jej historia. – Opole: Nowik, 1997. – 416 p.

456. Wilder R.L. Evolution of the topological concept of "connected" // The American Mathematical Monthly. – New York, 1978. - 85. – P. 720 – 726.

457. Winter E. Der böhmische Vormärz in Briefen B. B. an F. Příhonský (1824–1848) // Beiträge zur deutsch-slawischen Wechselseitigkeit. – Berlin: Veröffentlichungen des Instituts für Slavistik, 1956. - 11 – 306 p.

458. Young, W.H. Overlapping Intervals // Proceedings of the London Mathematical Society. – London, 1902. - 35. – P. 384 – 388.

459. Zermelo E. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann // Mathematische Annalen. - Leipzig, 1904. - 59. – P. 514 – 516.

ПРИЛОЖЕНИЯ. ПЕРЕВОД ПЕРВОИСТОЧНИКОВ

ПРИЛОЖЕНИЕ *А*.

Фрагмент лекций Ш. Мере и структура его курса

Méray Ch. Nouveau précis d'analyse infinitésimale. Paris: F. Savy. XXIII. 1872. P.16–277, [385].

1. Функции и независимые переменные

19. Операции над величинами (действительными или мнимыми) определяются обычным образом. Через *независимые* переменные, которые так можно определить, выражаются другие, которые зависят от первых, и которые мы называем *функциями* первых.

По отношению к функциям, эти первые величины принято называть независимыми переменными, мы обозначаем их $x, y, \ldots$, а функции соответственно $f(x, y, \ldots)$.

Параметры, *константы* и *коэффициенты* функций, величины которых часто употребляются в общем исчислении, но они изменяются в меньшей степени и рассматриваются обычным образом.

Уравнение между действительными или мнимыми величинами – это равенство двух функций друг другу, обычно проводят вычисления однозначно (более единообразно) таким способом, чтобы преобразовать первый член равенства и второй к виду $f(x, y, \ldots) = 0$. Мы будем называть первым элементом уравнения функцию f, которая осуществляет это преобразование.

20. Рациональные функции – это такие, вычисления которых производятся с помощью элементарных операций над независимыми переменными: сложения, вычитания, умножения (возведения в степень), деления, повторённые некое количество раз в произвольном порядке [там же, с. 16]…

21. Утверждения, сделанные в n^0 3 (IV) и 5 сохраняются в следующем виде:

Рациональная функция от сходящейся варианты (знаменатель которой не является бесконечно малым) будет также сходящейся вариантой, которая эквивалентна такой, какая получится при замене представленной варианты на эквивалентную ей.

Или же, говоря другими словами, (фигурально выражаясь, если пределы неизмеримы):

Рациональная функция от варианты, имеющей предел, в пределе есть результат подстановки предела независимой переменной в допущении, что она сходится. При этом мы всегда полагаем, что знаменатель не стремится к нулю.

22. Нерациональные функции всегда представляются как пределы рациональных функций, содержащих в себе обобщение множества целых бесконечно больших. Они сводятся

ко всем однозначным более значительным типам, а именно к *целым* рядам (рядам по целым степеням), о которых мы говорим почти исключительно как о последовательностях (с. 17–18).

Часть вторая. Обобщение рядов (с. 18).

Часть третья. Степенные ряды возрастающих степеней многих переменных (с.30).

2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

40. Пусть $f(x, y, \ldots)$ – сумма целых рядов, $R_x, R_y, \ldots$ – их области (круги) сходимости, $R_x{}^\circ, R_y{}^\circ, \ldots$ – соответственно меньшие положительные величины. Если $x', y', \ldots, x, y, \ldots$ – произвольные варианты в этих кругах, центры которых в точках $O_x, O_y, \ldots$ как центры областей $R_x{}^\circ, R_y{}^\circ, \ldots$, таким образом, что все разности $x'-x, y'-y, \ldots$ будут бесконечно малыми, и разность $f(x', y', \ldots) - f(x, y, \ldots)$ так же стремится к нулю.

Действительно, $x' = x + h, y' = y + k, \ldots$; назовём $R'_x, R'_y, \ldots, R''_x, R''_y, \ldots$ такие положительные величины, которые удовлетворяют следующим неравенствам[185]:

$R'_x < R^\circ{}_x < R''_x < R_x$; $R'_y < R_y{}^\circ < R''_y < R_y$;...;

Обозначим[186] также $\rho^\circ{}_h, \rho^\circ{}_k, \ldots, \rho''_h, \rho''_k, \ldots, \rho_h^{IV}, \rho_k^{IV}, \ldots$ соответственно положительные величины, удовлетворяющие неравенствам: $\rho'_h < \rho_h{}^\circ < \rho''_h < R_x - R''_x$; $\rho'_k < \rho_k^0 < \rho''_k < R_y - R''_y$, …

Выделим, когда модули $x'-x, y'-y, \ldots$, т.е. h, k, … становятся меньше, чем $\rho''_h, \rho''_k, \ldots$. Тогда $f(x+h, y+k, \ldots)$ будет зависеть от целочисленного ряда $x, y, \ldots, k, h, \ldots$, который сходится в области сходимости $R''_x, R''_y, \ldots, \rho''_h, \rho''_k, \ldots$ (см. выше). Поэтому имеем $R''_x + \rho''_h < R_x$; $R''_y + \rho''_k < R_y$; … . Члены этого ряда, независимые от h, k, …, образуют новый ряд, сумма которого в точности воспроизводит $f(x, y, \ldots)$; все остальные непрерывны как произведения некоторых степеней или их величин. И наконец, напишем $f(x', y', \ldots) - f(x, y, \ldots) = h\omega_h + k\omega_k + \ldots$, где $\omega_h, \omega_k, \ldots$ обозначают целые ряды от $x, y, \ldots, k, h, \ldots$, с той же областью сходимости, что и прежние (выше, 4^0), то есть, иными словами, $R''_x, R''_y, \ldots, \rho''_h, \rho''_k, \ldots$, или представимые[187] как $r_h, r_k, \ldots$ для модулей h, k, …:

$$\mathrm{mod}\left[f(x', y', \ldots) - f(x, y, \ldots)\right] < r_h \cdot \mathrm{mod}\,\omega_h + r_k \cdot \mathrm{mod}\,\omega_k + \ldots$$

Таким образом, как только $r_h, r_k, \ldots$ не превосходят $\rho'_h, \rho'_k, \ldots$, имеем в силу того, что модули $x, y, \ldots$ всегда меньше или равны чем

$R'_x, R'_y, \ldots$

[185] Так в оригинале.
[186] В тексте количество штрихов неразборчиво.
[187] Все индексы плохо разборчивы.

$$\operatorname{mod}\omega_h < \frac{A_h}{\left(1-\frac{R'_x}{R^0_x}\right)\cdot\left(1-\frac{R'_y}{R_y}\right)\ldots\left(1-\frac{\rho'_h}{\rho^0_h}\right)\left(1-\frac{\rho'_k}{\rho^0_k}\right)\ldots}$$

$$\operatorname{mod}\omega_k < \frac{A_k}{\left(1-\frac{R'_x}{R^0_x}\right)\ldots\left(1-\frac{\rho'_h}{\rho^0_h}\right)\ldots}$$

……………………………………………….

где $A_h, A_k, \ldots$ обозначают верхние пределы модулей общих членов рядов $\omega_h, \omega_k, \ldots$ для модулей $R^0_x, R^0_y, \ldots, \rho^0_h, \rho^0_k, \ldots$, соответствующих *x, y, …, h, k, …* (выше, 3^0). Следовательно, можно представить $M_h, M_k, \ldots$, для вторых членов последнего неравенства получим более сильное обоснование: $\operatorname{mod}\left[f(x', y', \ldots) - f(x, y, \ldots)\right] < M_h r_h + M_k r_k + \ldots$, где, для *h, k, …* бесконечно малых: $\lim\left[f(x', y', \ldots) - f(x, y, \ldots)\right] = 0$.

41. Принимая это во внимание, мы получаем следующее утверждение, эквивалентное предыдущему:

Если сумма N первых элементов целого (по целым степеням) ряда, то заменяем варианты на сходящиеся варианты (18), *которые сходятся внутри меньшего внутреннего круга сходимости, так достигается сходимость вариант и достигается их эквивалентность друг другу, в то время как N есть индекс замещённых вариант от переменных, неограниченно сходящимся к каким-либо значениям.*

Именно это и будет как раз тем, что обеспечит целочисленному ряду свойство определять значение функции, даже неизмеримое, от независимых переменных (см. выше). Мы полагаем излишней другую точку зрения в этой теории.

42. *Если* $x', y', \ldots$ *соответственно стремятся к данным пределам x, y, …, расположенному во внутренней части круга сходимости,* $f(x', y', \ldots)$ *стремится к* $f(x, y, \ldots)$.

Это непосредственно следует из утверждения (40). Иными словами, *сумма целочисленного ряда есть непрерывная функция независимых переменных от пределов, к которым они сходятся*.

В частности, если *x, y, …* сходятся к нулю, сумма ряда, сходится к пределу первого элемента, $a_{0,0,\ldots}$, ибо $a_{0,0,\ldots}$ есть значение, которое получается при $x = y = \ldots = 0$ (с. 38).

Условие тождественности.

3. ОЛОТРОПНЫЕ ФУНКЦИИ

Часть четвёртая. Олотропные функции. – Классификация их производных. – Основное свойство.

Определения. Будем говорить, что функция $f(x, y, ...)$ олотропна (olotrope) на порциях $S_x, S_y, ...$ вспомогательной плоскости, определённой геометрически независимыми переменными, когда для всех значений переменных *x, y*, …, ограниченных этими областями, $f(x+h, y+k, ...)$ представляет собой ряд по целым степеням, а *h, k*, … таковы, что они остаются внутри области сходимости, отличаясь на величины, не превосходящие $\delta_x, \delta_y, ...$, все не равные нулю.

Назовём $\delta_x, \delta_y, ...$ *областями олотропии* или *олометрами* функции те участки, на которых выполняются названные условия.

Сразу же из этого определения следует, что *f* (*x, y*, …) представляется в форме ряда по целым степеням от $x-x_0, y-y_0, ...$, где $x_0, y_0, ...$ обозначают некоторые числовые значения переменных внутри области, такие, что для соседних точек *x, y*, …, для которых модули их разностей остаются внутри олометров. Таким образом, получается вместо $x-x_0, y-y_0, ...$ можно писать *h, k*, … $f(x_0+h, y_0+k, ...)$.

46.Стр. 45.*Сумма целочисленного ряда есть олотропная функция от переменных внутри круга с тем же центром, что и круг сходимости, но меньшего размера* (с. 45).

4. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО

Если *f* (*x, y*, …) есть олотропная функция в областях $S_x, S_y, ...$, то можно утверждать, что на всём пространстве между этими пределами можно найти такую положительную величину *M*, что значение функции по модулю будет меньше *M* (с. 57).

66. Почти одно и то же будет, когда для высказанного утверждения разность $f(x', y', ...) - f(x, y, ...)$ будет бесконечно малой при $x'-x, y'-y, ...$, при этом $x', y', ..., x, y, ...$ любые из областей $S_x, S_y, ...$ (с. 58).

67. *Таким образом, для неизменяемых величин x, y,… получится* $\lim f(x', y', ...) = f(x, y, ...)$; *или, другими словами, приращение олотропной функции, соответствующее бесконечно малому приращению переменных, само будет бесконечно малым.*

Олотропные функции в то же время являются непрерывными в обычном значении этого слова, но высказанное в предыдущем пункте заключает в себе несколько большее.

68. Если *f* (*x, y*, …) есть олотропная функция в областях $S_x, S_y, ...$, и если, какой бы малой ни была положительная величина ω, то найдутся значения переменных, при которых достигается, что модуль этой функции меньше ω, необходимо существует для этой области по крайней мере одна система значений *x, y*, …, удовлетворяющих уравнению $f(x, y, ...) = 0$.

Часть пятая. Пределы сходимости, зависящие от олотропных функций. Формирование функций для продолжения. Расмотрено существование и свойства корня двучленного уравнения (с. 66).

87. *Если функция f (x, y, ...) есть олотропная функция в областях $S_x, S_y, \ldots$, то будет сходиться её продолжение $f(x_0+h, y_0+k, \ldots)$, где $x_0, y_0, \ldots$ находятся внутри $S_x, S_y, \ldots$, когда модули h, k, ... на равном или меньшем расстоянии $\Delta_x, \Delta_y, \ldots$ от $x_0, y_0, \ldots$ в контуре тех областей, в которых они определены*.

Действительно, в силу предыдущей теоремы, успешно продолжим пределы сходимости: $\delta_x, \delta_y, \ldots$ – области олотропности в $2\delta_x, \delta_y, \ldots$(*так в оригинале* – Г.С.), затем в $3\delta_x, \delta_y, \ldots$и т. д., затем в $\Delta_x, \delta_y, \ldots$ (*так в оригинале*), потом в $\Delta_x, \Delta_y, \ldots$и так далее до последовательности последней варианты.

Заметим, что теорема 86, из которой не следует частная форма, представляет собой простейшее обратное предложение следующей теоремы 88. Тип тех условий, с помощью которых это будет доказано, не только достаточен, но и необходим. Таков, например, ряд (2) из п.86, не только постоянно сходится к пределам $x, y, \ldots, \xi, \eta, \ldots$ несомненно $f[(x+\xi),(y+\eta),\ldots]$ не будет превышено, ибо будет сходиться как обусловленный первым (38).

Теория, зависящая от настоящего параграфа, основана на пределах сходимости рядов Тейлора и Маклорена, таким образом можно быть уверенным в получении формулы, не расширяя её (с. 91).

Вычисление функций с помощью расширения. Однозначные (монодромные) функции

Когда расширение ограничено, в этом случае крайние значения $X, Y, \ldots$совпадают с исходными $x_0, y_0, \ldots$, *функция вновь принимает первоначальные значения, если она локально олотропна в областях, создаваемых контурами*. (с. 97).

Часть шестая. Сложные функции (с. 98).

Определения. Основные свойства.

95. 1^0. *Инверсия (обратная, в смысле минус первой степени) олотропной функции олотропна, пока (до тех пор) эта функция не исчезает*.

2^0. *Отношение двух олотропных функций есть олотропная функция, если знаменатель не обращается в ноль*.

3^0. *Рациональная функция олотропна для всех значений переменных, если они не обращаются в ноль в знаменателе*.

4^0. Рациональная функция от олотропной функции обладает тем же свойством, если знаменатель не обращается в нуль (с.101).

Производная сложной функции. Приложение формулы Тейлора к рациональным функциям (с. 106). Способы исследования функций (с.111). Возрастание и убывание действительных функций. Олотропная функция возрастает или убывает, если первая производная не обращается в ноль, а соответственно положительна или отрицательна (с. 112).

Особый случай, когда уравнение обязательно имеет несколько рациональных корней (с.113).

105. *Если между действительными числами a < b функция $f(x)$ остаётся олотропной и действительной, и если $f(a), f(b)$ имеют разные знаки, то уравнение $f(x)=0$ имеет между a и b хотя бы один действительный корень*[188].

В этих же условиях если $f(a)=f(b)=0$, то уравнение $f'(x)=0$ имеет между a и b хотя бы один действительный корень[189] (с. 106). Максимум и минимум действительных функций (с. 116).

Часть восьмая. Различные теоремы об олотропных и квази-олотропных функциях одной переменной (с. 119). Нули олотропной функции. Бесконечные значения квази-олотропной функции (с. 122).

113. Назовём функцию $f(x)$ квази-олотропной в области S, если в точках этой области, где функция олотропна, её обратная $\frac{1}{f(x)}$ теряет это свойство в особых свойственных олометрах, меньших либо равных данной величине δ. Такова, например, простая дробная функция $\frac{1}{x}$ для $x=0$. Эта функция подобна любой рациональной дроби, и будет олотропна вместе с целой функцией.

Фазы сингулярности (периоды единственности) функции одной переменной (с. 126).

Функции бесконечно олотропные или менее квази-олотропные (с. 129).

123. Функция $f(x)$, которая сохраняет олотропность на всей плоскости графического представления x, и не обращается в константу, будет наверняка бесконечной для некоторых значений x. (Мере доказывает это утверждение с помощью ряда Маклорена).

124. В этих же условиях функция $f(x)$, имеет хотя бы один ноль или бесконечно мала для всякого бесконечного значения x (с. 129). Ряды простых дробей (с. 132).

Часть девятая. Основные принципы интегрального исчисления (с. 138).

Часть десятая. Теория неявных функций (с.154).

[188] Эту теорему впервые сформулировал Мишель Ролль, сейчас она носит имя Больцано-Коши. Мере доказывает её как это делал Коши, с помощью нескольких различных δ, но без ε.
[189] Теорема Ролля, Мере возможно, был первым, кто доказал её, используя формулу Лагранжа.

Часть одиннадцатая. Изучение некоторых неявных функций одной переменной, определённых одним уравнением (с. 175).

Часть двенадцатая. Аналитическая теория показательных и однородных функций (с.205).

Круговые (периодические) функции[190] (с.210).

Часть тринадцатая. Продолжение предшествующей главы. Обратные функции. (Неперовы логарифмы) (с.221). Аркфункции (с.233). Теорема Коши (с.241).

Часть четырнадцатая. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия (с.243).

Часть пятнадцатая. Продолжение предшествующей. Основные понятия (с.263).

Часть шестнадцатая. Уравнения в полных дифференциалах (с.270).

Часть семнадцатая. Простые интегралы (с.277)».

«Новый курс анализа бесконечно малых» Шарля Мере, изданный в 1872 году, позволяет нам увидеть изменение структуры анализа со времён Коши, расширение материала, новые способы доказательства. В частности, заметим, что теорема Ролля из вспомогательных теорем для решения уравнений у Коши уже перешла в основные теоремы в курсе Мере. Понятие олотропной функции, аналогичное понятию равномерно непрерывной функции, не получило развития у других авторов. Позже мы увидим дальнейшее развитие структуры курса анализа у Вейерштрасса и Дини.

[190] Мере вводит синус и косинус через формулу Эйлера.

ПРИЛОЖЕНИЕ *В*.

Фрагмент лекций Вейерштрасса

Фрагменты из конспекта лекций Вейерштрасса 1886 года (выделения в тексте согласно оригинала) (Weierstrass K. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner-Archiv für mathematic. Band 9, 272 s. Reprint 1989) [450]. Вейкерштрасс читал эти лекции три раза в неделю по 60 минут в весеннем семестре.

Стр. 20 Вторник, 25. 5. 1886

Эти лекции составлены таким образом, чтобы <u>дополнить</u> лекции по теории аналитических функций зимнего семестра 1884/85. Та цель, которая имелась в виду, была достигнута, но более синтетическим методом, и некоторые результаты не получили желаемого обобщения, качество доказательств не было в полной мере удовлетворительным. Таким образом представляется полезным после этих лекций рассказать о различных методах, лежащих в основании теории функций, проследить их исторически и критически чтобы продемонстрировать различные точки зрения и попытаться их примирить. Короче говоря, показать тенденцию исторического развития математической науки, особенно в области анализа, и таким образом объяснить основные понятия науки. Нашей целью будет показать, что принципы математической науки основаны на действительно прочном фундаменте. Однако даже введение в математические науки требует изучения различных проблем, что в первую очередь показывает нам значительность и состоятельность науки. <u>Конечной</u> <u>целью</u> однако является, что мы всегда должны иметь в виду, одним из <u>оснований</u> науки является стремление получить уверенность в справедливости исследования.

§ 1. История возникновения понятия функции. Вторник, 25.5.1886

Наша современная теория функций развивалась постепенно. Сначала вообще слово «Функция» начал использовать Лейбниц, однако первоначально понятие функции не было чётким. Сначала названия появлялись при некоторых исследованиях алгебраических кривых, когда вычислялись их арифметические выражения через абсциссу, как те же самые функции, например, ордината, длина касательной до точки пересечения с осью абсцисс. В дальнейшем так стали называть величину, посредством которой другая величина вычисляется с помощью простой определённой арифметической операции, как такая функция. ЯКОБ БЕРНУЛЛИ внимательно сделал на основании этого полезный вывод, это понятие обобщил и сформулировал, что величина, вычисляемая посредством простых арифметических операций над названной величиной, есть функция от величины названной. ЛЕЙБНИЦ приспособил (унифицировал) это предложение, и его определение понятия функции осталось на долгое время господствующим. Это понятие функции было выражено так успешно, что вошло в обиход и обеспечило дальнейшее развитие понятия функции. Это привело к дальнейшему развитию алгебраических уравнений, функций с рациональными коэффициентами переменных величин, в то время как функции от этих величин предполагались по-прежнему возможными, а корни любых алгебраических уравнений с помощью ограниченного числа арифметических операций вычислимыми. Это нашёл Эйлер в своём Introductio (Введении в анализ бесконечно малых), а во времена Лагранжа и других значительных математиков был принят функции как совместный закон функциональной зависимости арифметических величин. Наряду с этим определением функции как арифметического выражения нашлось однако уже давнее другое, на первый взгляд совершенно иное, казалось бы. ИОГАНН (Jean) БЕРНУЛЛИ, брат ЯКОБА, строго придерживался этого определения; он указывал на то, что величины имеют геометрическое или естественное происхождение, и несомненно, что каждое значение величины или нескольких разных величин соответствует особого рода непрерывному изменению одной величины или одному непрерывному изменению, влекущему её существование, и зависимость арифметических выражений друг от друга поясняет и подтверждает такое существование. Поэтому требуется сформулировать общее понятие функции, чтобы это определение содержалось в нашем изложении идеи (с. 21). Этот более поздний подход представляют главным образом Карно, Коши, Дирихле и другие. Если изменяющаяся величина связана с другой, когда значению одной величины соответствует значение другой, будем говорить, что последняя величина есть функция первой. С целью пояснения скоро познакомимся с такими функциями, которые мы смогли определить, когда бесконечно малому изменению аргумента соответствует такое же изменение функции, таким образом для единичной (сингулярной) точки функция не определена. В качестве примера можно привести явное обобщение понятия функции в комментарии. Мы установим взаимную зависимость влияния двух планет. Каждая из них имеет определённый математический центр тяжести, хотя и непостоянный, ни одна планета не находится в устойчивом состоянии, однако в каждый миг имеет хорошо определённое положение в межпланетной среде. Расстояние между обеими планетами измеряется как расстояние между их центрами тяжести, это переменная величина, хотя в каждый момент величина вполне определённая. Установив должным образом начало координат, мы определяем время, имея определённую единицу времени, так что получаем в каждое мгновение отсчёт величины времени, в каждое мгновение соответственно для вполне определённой единицы длины определяем величину расстояния, и таким же образом мы можем выразить величину времени. Мы имеем таким образом две друг от друга зависящие величины. Каждое значение времени t соответствует значению r расстояния между центрами тяжести. Теперь закон известен для каждой планеты относительно другой, и принимает законченный вид, так что положение центра тяжести в теле определено, что обусловлено, когда закон по-прежнему арифметически выражен, r действительно представляет собой функцию от t. Но это употребление совершенно не удаётся, без того, чтобы r прекратилось, вполне определить функцию от t саму по себе. По правде говоря, закон взаимного влияния двух планет точно неизвестен; если в основе рассуждения лежат ньютоновские гипотезы, тогда закон достоверно обоснован, но мы хорошо знаем, что на движение также влияет сопротивление и силы трения, так что наше описание приблизительно. Теперь поставим вопрос, в силу каких предпосылок обоюдная зависимость r и t, если закону воздействия обеих планет друг на друга неизвестен, тогда необходимо, чтобы существовало условное (вымышленное) арифметическое выражение, найденное каким-то образом, допускающее вычисление r для каждого произвольного приближения значения t. Другой очевидный вопрос гласит, что будет ли обеспечиваться непрерывность функции, в том случае когда может быть дана арифметическая зависимость, всегда ли можно это установить, или нет. Это один вопрос, на который вряд ли кто-нибудь может ответить заранее. Можно даже склоняться к сомнению, отвечает ли здравому смыслу определение Жана[191] (Jean) Бернулли в отличие от более общего определения Лейбница. Покажем это в сравнении, для каждой зависимости обеих переменных величин арифметического выражения соответственно, и также обязательно для обоих определений, в то время как равноправность сохраняет силу. Наряду с нашим обсуждением попутно поставим вопрос, хотим ли мы на этой лекции ещё заниматься.

§ 2. О так называемом произвольном представлении функций

Мы сейчас не намереваемся дать арифметическое определение функции, но проложим путь в противоположную сторону; мы предположим, что существует [числовая] величина, зависящая от одной или нескольких переменных, которая непрерывно с ними изменяется, и докажем, что эта определённая величина будет непременно представлена определённым арифметическим способом. Это будет осуществляться следующим образом: берётся какая-нибудь неограниченная переменная величина t, принимающая значения от $-\infty$ до $+\infty$, и та же самая функция r, так что если принять любую сколь угодно малую величину δ, то целая рациональная функция от t, с рациональными числовыми коэффициентами, так определённая, что разность между истинным значением r и r из вышеупомянутого выражения для какого-нибудь значения t будет меньше чем δ. И далее мы будем полагать, что <u>функция посредством бесконечного ряда представлений для отдельных рациональных членов и есть вся функция с рациональными числовыми коэффициентами</u>, то есть осуществляется вычисление

[191] Иоганна

арифметического выражения, выполненное так подробно, что для любого требования к точности для любой величины t функция может быть представлена с любым приближением. Следуя рассуждению Бернулли, мы <u>довольствуемся ограниченным предварительным представлением о действительной переменной</u>. Раньше предполагали, что представление [функции] рядом Фурье разрешит рассматриваемую проблему, между тем обнаруживается, что существует непрерывная функция, которая не может быть получена при этом способе задания.

В дальнейшем отсюда следует, что и при расширении понятия функции на функцию нескольких переменных форма изложения теорем не изменится. Ошибочна также такая точка зрения, что превращение функции в степенной ряд ограничивает представление о ней; наоборот, это расширяет возможности её всестороннего использования.

Среда, 26. 5. 1886

Для того, чтобы ещё раз обсудить вышеуказанные теоремы, заметим, что переменная принимает все значения от минус до плюс бесконечности, что не изменяет степени общности, когда функция определена только в конкретной области изменения независимой переменной, и она может быть легко вычислена. Далее предположим, что рассматриваемая функция <u>непрерывна</u>. Кроме того, предположим, что функции так сказать, <u>произвольны</u> или неопределены, хотя это не очень подходящее название. Истинный смысл этой теоремы заключается в том, что для строго определённой непрерывной функции также всегда можно найти математическое выражение. Преимуществом этого утверждения является то, что оно указывает, как можно вывести свойства любой функции из основных понятий непрерывности, так как в любом научном исследовании важно извлекать из основных понятий дальнейшие последующие. После того, как мы признали возможность представления функции для каждого конкретного случая, когда можно это представление найти, то есть вы действительно должны знать о функциях, что они допускают аналитическое представление. Получается, что функция допускает представление, если это возможно, себя самой и своего произведения на некоторые степени аргументов внутри некоторых пределов интегрирования. Интегрирование само по себе является следствием предполагаемой непрерывности.

§3. Доказательство теоремы , что $\lim\limits_{k=0} F(x,k) = f(x)$, если

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\phi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \quad \text{и} \quad \omega = \int_{0}^{\infty}\phi(u)du$$

Пусть x это действительная переменная, принимающая значения от минус до плюс бесконечности, и $f(x)$ это действительная непрерывная функция, единственным образом вполне определённая для всех значений x, и далее мы предполагаем, что абсолютные значения $f(x)$ имеют <u>верхний</u> <u>предел,</u> как например такие ограниченные функции действительного переменного, как *sinx, cosx*. Мы будем понимать непрерывность в обычном смысле, а именно что $f(x+h)-f(x)$ исчезающее мало вместе с *h*, или, другими словами, для любого положительного сколь угодно малого ε будет выполняться, что когда абсолютная величина *h* предельно ограничена δ, тогда

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon \text{ при } |h|<\delta.$$

Давно известно, что при этих условиях не вполне обосновано такое утверждение, что $\lim\limits_{k=0} k\sqrt{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2}du=f(x)$, где *k* рассматривается как некоторая положительная действительная величина.

Пусть $\phi(x)$ – функция той же природы, что и *f*(*x*), т. е. для всех значений *x* должно выполняться, что она определена и непрерывна, а её абсолютное значение не превышает определённого предела. Кроме того в интервале она не будет изменять знак и будет чётной, т. е. $\phi(-x)=\phi(x)$.

Все эти условия, как мы видим, выполняются, например, для $e^{-k^2x^2}$, она исчезающее мала на минус и плюс бесконечности, а её верхний предел равен 1. Сейчас существует бесконечно много таких функций. Для таких $\omega=\int\limits_0^\infty \phi(x)dx$ существует проблема обобщения утверждений о том, что, как будет показано, если $\frac{1}{2k\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\phi\left(\frac{u-x}{k}\right)du=F(x,k)$ справедливо, тогда $\lim\limits_{k=0} F(x,k)=f(x)$ [с. 25].

Для того, чтобы прояснить смысл, сделаем следующее: придадим *x* какое-нибудь конкретное конечное значение, так что для *k* можно будет определить верхний предел $\bar{k}$, чтобы $F(x,k)-f(x)$ стало произвольно малым. Но это утверждение имеет ещё и другой смысл: если для *x* определить два конечных предела *a* и *b*, то будем утверждать, что наше допущение позволяет найти сколь угодно малую положительную величину ε, для которого можно установить верхнее значение $\bar{k}$ для *k* такое, что любая данная величина из интервала будет удовлетворять неравенству $|F(x,k)-f(x)|<\varepsilon$. В этом случае говорят, что приближение для данного значения *x* в пределах конечного интервала (*a*…*b*) происходит равномерно. Доказательство почти очевидно, оно использует только понятие интеграла (с. 26). Теорема о среднем (с. 27).

[Равномерная сходимость]:

Мы хотели бы привести некоторые теоретические соображения по поводу оснований практического применения этого метода. Если известно только то, что ряд абсолютно сходится, то для каждого **определённого** значения аргумента мы можем вычислить значение функции с заданной точностью; в условиях **равномерной сходимости** это относительно – это практически важнее – значения аргумента не должны быть заданы с абсолютной точностью, поэтому можно сказать, что такой ряд представляется сходящимся к функции, когда значения аргумента выбираются любым способом. Это применение так важно в тех случаях, когда значения аргумента используются там, где результат зависим от неизбежных ошибок измерений или наблюдений, или зависит от результатов предыдущих расчётов, следовательно, никогда не может быть вычислен с абсолютной точностью. Потребуем, чтобы функция вычислялась с ошибкой, меньшей, чем некоторая заданная малая величина g, разложим эту величину g на g_1+g_2; можно выделить n членов ряда таких, что для $x=x_0$ значение функции достигается с ошибкой, которая меньше, чем g_1, выберем тогда вместо $x=x_0$ соседнюю величину $x=x_1$, так чтобы всегда $|G_n(x_1)-G_n(x_0)|<g_2$, здесь $G_n(x)$ непрерывная функция своих аргументов, так что $|f(x_0)-G_n(x_1)|<g$.

Теперь мы знаем, что можем управлять точностью по потребности и по нашему желанию, при этом без вынужденного прерывания в области (поле) рациональных чисел, так как мы всегда можем указать аргумент x_0 сколь угодно близко расположенный к рациональному аргументу x_1. В то же время мы видим, как мало значит ряд с неравномерной сходимостью на практике, так как он недостоверен, какие бы точные значения аргумента мы не подставляли.

Мы сейчас приближаемся к вопросу о приложении наших рядов для вычисления функции, посредством формулирования утверждений, что для любого значения x, для которого функция определена, она действительно представима. Прежде чем давать точное доказательство, сделаем несколько предварительных арифметических замечаний (с. 36).

Стр. 37. Вторник, 1. 6. 1886

§ 5. Отступление. Общий обзор арифметики

Хотя понятие числа является чрезвычайно простым, определение ему дать нелегко, особенно для обучения. Самый лучший способ выявить понимание природы числа, это посмотреть, что происходит в нашем сознании в процессе счёта. Счёт происходит из тех двух фактов, что человеческий разум обладает способностью составлять представление о внешней и внутренней стороне вещей, и следует отметить, что у него есть способность воспроизводить эти образы неоднократно. Мы формируем идею вещи α так, что можем воспроизвести её произвольно или выбрать из данной обозримой совокупности (Aggregat, агрегат, многочлен) вещей выделить вещь α как первую, и кроме того, создать представление об идее второй вещи. Можем ли мы произвольно и успешно продолжать эту операцию – это и есть вопрос, именуемый в логике сложной идеей (составным представлением). Мы тоже будем придерживаться этого и назовём вещь α единицей, таким образом мы получим два ряда идей, как только что говорилось, сравнимых следующим образом:

Каждому элементу ряда a можно поставить в соответствие элемент ряда b, при этом возможны три случая: или каждый элемент ряда a поставлен в соответствие элементу ряда b, и таким образом все элементы будут совершенно исчерпаны, или ещё останутся элементы из a, или, в-третьих, останутся элементы из b. Это создаёт понятие отношений «равно», «больше» и «меньше». Конечно, мы должны признать, что названный набор представлений переменчив, и не зависит от единицы α, подобно тому, как изменяется длина прямой линии после определения единицы длины. Но невозможно придерживаться данного определения числа как идеи количества вещей, так как мы вводим количество таких вещей непосредственно, что весьма ограничивает наши возможности. Таким образом, в последовательном присоединении членов ряда нет никакой идеи счёта, но он в соединении идей, тем более, что эта способность формирует личность, совершенствующую своё мастерство счёта (с. 36). Обычно в первый момент мы можем охватить от 5 до 6 в массе, которую фактически не пересчитать, но есть люди, у которых эта способность гораздо более развита (Dahse). Числа и цифры служат для того, чтобы формализовать это представление (идею), особенно недавно сформированный метод для больших множеств вещей, их количество может быть обозначено достаточно лаконично и наглядно. Таким образом, суть вполне упорядоченного множества вещей состоит в том, что, во-первых, идея единицы воспроизводится, во-вторых, полностью определено количество вещей, независимо от того, получилось ли оно путём моментального видения или пересчёта. Если с первым всё ясно, можно пойти дальше и расширить концепцию числа соответсвенно природе числа, объединив несколько единиц. Пусть g – это последовательность различных представлений α, β, γ, …, представляющая собой такую идею, что отдельные вещи в определённом смысле следуют друг за другом. Мы получим вполне упорядоченное множество вещей как однородных (соразмерных) понятий. Эта величина (размер) переменна (изменчива) в том смысле, что каждый элемент α, β, γ, …, может иметься в различных количествах. С каждым добавлением любого элемента к упомянутой величине, понятие агрегата остаётся прежним и неизменным, подобно тому, как понятие прямой сохраняется при добавлении ещё одной длины. Истинная природа величин состоит в том, что это такие вещи, которые можно изменять без того, чтобы изменять связанное с ними понятие. В этом смысле мы называем каждую переменную последовательность предметов величиной и так как количество вхождений каждого предмета существенно, с помощью элементов α, β, γ, … создаётся числовая величина. Теперь, если последовательность будет полностью определена, необходимо будет указать, какой элемент в каком месте находится, и как часто встречается каждый указанный элемент. Однако в настоящее время в прикладных вопросах математики (в вычислительной математике) при вычислении числовых величин очерёдность появления отдельных элементов не имеет значения, так что числовая величина вполне определена данной совокупностью элементов и посредством этих данных, указав составляющие её элементы и их частоту, мы определяем последовательность. Это непосредственно приводит нас к значительной разнице между простыми и комплексными числами. В простых числовых величинах для построения используется один элемент α, а во втором случае величина состоит из нескольких элементов (с. 39). Комплексное число формируется из величин α, β, γ, … , связь между ними не предполагается, важность имеет только их совокупность и их порядок. Если мы хотим сравнить между собой две таких числовых величины, которые мы образовывали несчётное число раз, тогда сравниваем всю совокупность в целом, и эти числа тогда будут называться равными, когда каждый элемент из первой совокупности встречается так же часто, как и во второй совокупности [соответствующему элементу из второй совокупности]. Отношения «больше» и «меньше» могут быть определены, но не здесь. Зато сейчас мы можем определить операцию сложения двух комплексных величин a и b. <…>.

Математика имеет дело с числами разного рода, отдельные элементы, из которых они состоят, находятся в определённых отношениях друг к другу. Представьте себе, что они были сформированы из арифметики целых чисел, и мы пришли к понятию отвлечённых (абстрактных) чисел, их сложению, умножению, делимости, неделимости, короче, в царство чистой арифметики. Что касается общей теории числа, то она началась с тех пор как начали измерять. Представьте себе, например, что вы взвешиваете, причём мы представляем абсолютную точность весов по своему желанию. Мы видим, что разного вида и имеющие разные свойства вещества однако могут иметь одинаковый вес, с другой стороны, те же различные вещества из разных субстанций сложно различить. Если мы хотим иметь определённое представление о весе, нужно уметь производить вещества требуемой массы. Так как наше применение не требует абсолютной точности, то будет достаточно располагать весами α, β, γ, … , это позволит, используя их в различных сочетаниях и каждое из них в определённых количествах, выразить вес представленного материала с необходимой точностью [с. 40]. Может быть другая идея взвешивания когда мы для более точного взвешивания располагаем различными гирями и разновесками. Практически мы принимаем произвольную единицу α, вторым разновеском берём β, про которую мы знаем, что если взять определённое количество c β, то можно заменить его на α, а в качестве третьего разновеска возьмём γ, которая относится к β как β к α и т. д. Важно лишь то, чтобы отдельные разновески относились определённым образом между собой. В наличии постоянно должна быть основная единица (Haupteinheit) и суб-единицы (Untereinheit), с помощью некоторого количества которых можно выразить основную единицу. Это утверждение ближе всего к первоначальному, чтобы построить основу, которая состоит из величины α и совокупности её частей, каждая из которых из неё образована: числовая величина имеет конкретный смысл, которому мы придаём отчётливое значение величины в том самом смысле, который хотели определить. В то же время у нас есть возможность изменить различные значения числовых величин без изменения их величин; мы добавляем сначала величину, которая раньше была основной и рассмотренные составленные части, и называем это положительным числом (с. 39).

Стр. 40. Среда, 2.6.1886

Здесь важно рассмотреть понятие части величины, которая есть не что иное, чем определённое количество взаимозаменяемых величин. Можно утверждать, что (две величины) эквивалентны друг другу, без их полной идентичности, т.е. без одинакового количества элементов. Рассмотрим, например, основную единицу α и суб-единицу β, которая может взятая n раз заменить α и наоборот, α можно заменить на nβ, тогда мы получим разные числовые значения, которые эквивалентны друг другу. А теперь представьте себе последовательность частей основного элемента в целом, легко видеть, что в любая из частей опять в свою очередь имеет свои части. Таким образом мы можем преобразовать любое количество чисел, заменяя в любом элементе любую произвольную его часть, но и обратно, заменяя количество элементов на эквивалентные им (с. 41). Отсюда следует, что любую числовую величину можно представить через единственный элемент группы, а другие элементы как кратные из этой группы. Поскольку элементы α, β, γ, … , по отношению к основной единице имеют «знаменателем» 1, m, n, …, можно сначала найти число-делитель для 1, m, n, …; это будет = r, тогда α, β, γ, … , кратны данному элементу со «знаменателем» r. Если у нас два различных числа, то можно сначала представить каждое из них кратным элементам, и каждый (и тот и другой) из этих элементов снова представим как кратное этих последних элементов. Теперь мы можем сравнивать два числовых значения друг с другом и таким образом приходим к понятию равенства, «больше», «меньше» для любого количества переменных, которые мы сейчас рассматриваем. Основанием для этого расширения понятий является понимание того, что следующее: прежде всего существует бесконечно много чисел r, которые являются общим кратным знаменателем данных элементов. Итак, преобразуем число к двум другим: одно, кратное r-, и другое, кратное s- частям от основной единицы; нужно показать, что в результате сравнения двух таких числовых представлений элементы (зависят от приведения к) приводятся к общему знаменателю. Это доказывается с помощью следующего утверждения:

Если r является наименьшим общим кратным нескольких чисел, то все другие общие кратные будут кратны r, так что результат сравнения двух числовых величин с общим знаменателем является независимым (самостоятельным).

Сейчас законным будет ввести условия для отношений «равно», «больше», «меньше» по законам логики (если $a=b,\ b=c$ тогда $a=c$, и если $a>b, b>c$, тогда $a>c$), эти условия сохраняют законную силу. Теперь легко образовать понятие сложения: $a+b$ это такое число, под которым понимаем как возникающее когда элемент a прибавляем к неизменённому элементу b, или к любой другой величине, ей (т.е. b) эквивалентной. Мы знаем, что для нескольких слагаемых очерёдность сложения не имеет значения, теперь перейдём к определению умножения и покажем, как применять известные теоремы. Наряду с понятием кратного доступно понятие части. Это показывает, что для числовой величины существует произвольная кратность, а также и любые части, и благодаря этому можно найти для любой заданной составной части числовой величины соответствующую выбранную часть (с. 42). Мы можем придти к такому заключению, что умножить два числа друг на друга это значит умножить каждую часть одного числа на каждую часть другого и результаты сложить. Поэтому для того, чтобы определить перемножение двух элементов, мы рассуждаем следующим образом: произведение m-й и n-й частей основной единицы равно mn-й её части. В силу этого предположения сохраняются все законы, которые были установлены для отвлечённых (unbenannten, неименованных) чисел.

Теперь о последовательности комплексных величин, которая с таким же успехом может быть составлена из элементов и может быть как бесконечной, так и конечной, если только предположить, что она определена (bestimmte, конкретизирована), тогда мы можем указать, какой элемент находится на каждом определённом месте. Так, например, последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, … , так как она бесконечна, то она не имеет никакого предела, она полностью определена, поскольку ясен процесс её формирования. Если в природе в этом смысле существует бесконечный ряд вещей, неважно, сколько бы ни их было, в мире наших мыслей есть представление о какой-нибудь вещи, взятой лишь один раз, и можно сколь угодно много это воспроизводить, делая это без конца. Взяв за основу бесконечный ряд 1, 2, 3, … , мы потом сможем определить всякий другой (любой другой) последующий элемент, составленный из единиц (из чисел) 1, 2, 3, … по порядку, например, $1, {}^{1}\!/_{2}, {}^{1}\!/_{3}, \ldots$ полностью определена для каждого элемента, стоящего на любом месте. Мы оставляем за собой свободу использовать эту бесконечную последовательность произвольного количества элементов в формировании числовых величин. Это будет нужно даже если мы рассматриваем числовые величины, сформированные из конечного числа элементов. Так как мы уже дошли до числовых величин, знаменатели которых сколь угодно велики, возникает необходимость научиться осторожно обращаться с ними как с основанием любой части единицы. Если мы теперь положим такую бесконечную последовательность элементов, составляющих основу числа (числовую форму), то мы теперь можем обнаружить формирование числа (числовой величины), состоящей из бесконечного числа элементов. Такое число определено, когда можно указать, сколько раз в нём встречается каждый элемент. Кроме того, к этому следует добавить число 0, употребляемый, когда какой-нибудь элемент не встречается. Например, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}+...$ имеет совершенно определённое значение. Вся трудность состоит в том, чтобы определить, что мы понимаем под <u>числовой</u> <u>величиной,</u> <u>созданной</u> <u>в</u> <u>виде</u> <u>равенства</u> <u>с</u> <u>бесконечно</u> <u>большим</u> <u>количеством</u> элементов. В этой проблеме обычно умалчивается тот факт, что изначально такая численная величина определяется приёмом расширения чисел с помощью предельного перехода. Если дано число a, то сначала нужно определить, сколько раз в нём содержится основная единица α, это число будет = n. С остатком поступим таким же образом относительно второй элементарной единицы (элемента) и так далее. Эта операция может либо завершиться, тогда число a состоит из конечного числа единиц, либо нет, что представляет собой более общий случай. Тогда число a будет состоять из бесконечного числа элементов. В силу данного представления мы основываемся на измерении длины, но теперь совершенно ясно, что любые длины могут быть представлены числами с помощью найденной единицы измерения и представляет собой число, но отсюда явно не следует, что всякому числу, образованному бесконечным числом элементов, соответствует длина; в этом смысле эквивалентность означает, что число также имеет реальное существование, хотя истинность этого утверждения вытекает из всех приложений арифметики, учение о числовых величинах по умолчанию подразумевает это предположение. Это утверждение не может быть доказано без того, чтобы не сформулировать новую гипотезу, поскольку понятие линии является чисто эмпирическим. <u>Вне</u> <u>всякого</u> <u>сомнения</u>, что в указанном смысле числовые величины <u>определённо</u> <u>существуют</u>, и поэтому мы обязательно должны дать арифметическое определение иначе, чтобы не зависеть от гипотез, и кроме того, постараемся дать определение различными способами, из которых отдадим предпочтение следующему: Для численных величин, состоящих из конечного числа элементов, <u>понятие</u> <u>равенства</u> <u>можно</u> <u>было</u> <u>бы</u> <u>заменить</u> <u>понятием</u> <u>эквивалентности</u>. Пусть a – некоторое произвольное число и c – число, образованное из конечного числа элементов: мы будем говорить, что число c содержится в числе a, если a можно так преобразовать, что все без исключения элементы c встречаются (входят) в a, и если это так, то не все элементы a исчерпаны. Пусть теперь имеются два произвольных числовых значения a и b, они совпадают (имеют одно и то же имя), если любое число c, содержащееся в одном из них, содержится и в другом. Нужно только доказать, что это расширенное понятие равенства содержит в себе первоначальное [определение равенства]. Как только мы это установим, мы убедимся, что из $p = q$, $q = r$ следует, что $p = r$. Кроме того, если число c содержится в числе a, но не содержится в числе b, мы будем говорить, что a больше, чем b. В настоящее время существует несколько типов конечных и бесконечных числовых величин. В настоящее время используются числовые величины конечных и бесконечных значений. А именно, очевидно возможно, чтобы в числовой величине содержалось любое другое значение. Такую числовую величину мы будем называть бесконечно большой. Это доказывает необходимость ограничить применение математических операций только к конечным величинам (с. 43).

Пятница, 4. 6. 1886

Решение о том, являются ли два числа равными друг другу, естественно, не следует из того, что нужно проверять каждое число c, входит оно или не входит в два других числа; но есть способ показать, что не найдётся никакого c, входящего соответственно в оба числа. Если значение c содержится в каком-то числе, это же относится и к числам, меньшим c. Кроме того, если два числовых значения, a и a' не равны друг другу, должно существовать бесконечное количество числовых значений, образованных из c, таких, что они содержатся в одном числе, но не содержатся в другом. После того как мы сформулировали эти определения, можно теперь без труда найти последовательности с бесконечным числом переменных. Если у вас есть сумма двух чисел, и основной (образующий) элемент входит соответственно p раз и q раз, тогда в сумму он входит $p + q$ раз. Это можно распространить на сумму бесконечного числа слагаемых, но пока ещё нужны предпосылки становления: мы уже определили понятие бесконечно большого числа. Возьмём, например, число с элементами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, и мы сможем известным образом доказать, что в нём содержится любое число c. Мы сейчас покажем, что существует конечное число членов, которые сами по себе имеют величину, превосходящую c. Между двумя такими величинами бесконечных размеров в настоящее время невозможно никакое сравнение. В отличие от этого величина называется конечной (наконец), если существует бесконечное количество числовых величин, которые в рассматриваемой числовой величине не наблюдаются. Так как числовые величины, используемые теперь в математике, представляют собой главным образом отношения (пропорции) обширных чисел к другим числам, то ясно, что такие численные значения всегда имеют конечную величину, поэтому и мы в наших расчётах ограничимся такими числовыми значениями, величины которых ограничены. В настоящее время суммируется бесконечно много произвольных величин, если правила суммирования конечного числа слагаемых действуют, то может оказаться, что полученный таким образом результат конечен или бесконечен. Но сейчас числовая величина считается определённой, если она задана для каждого элемента, что, как правило, и бывает. Вообще говоря, бесконечное количество суммируемых чисел возможно, поэтому прежде всего необходимо, чтобы каждый определённый элемент ряда, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, встречался только конечное количество раз (с. 44). Тогда суммирование формально осуществимо. Остаётся ещё вопрос, при каких условиях сумма конечна, если каждое слагаемое удовлетворяет этому условию. Для этого рассмотрим следующее соображение: чтобы $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ имело конечное значение, нужно, чтобы данные величины, большие конечного числа (значения), и следовательно, большие чем любое из конечных чисел-слагаемых, образовывали сумму. Последнее и является определяющим в вопросе о критерии. То, что это обеспечит не только необходимое, но и достаточное условие, мы видим из того, что мы можем указать величины, значение которых больше, чем любое из $a_1, a_2, \ldots$, создающих сумму, так что на самом деле последовательность имеет конечное значение в силу нашего предыдущего определения. И в том и в другом предложении очевидно, что среди членов ряда $a_1, a_2, \ldots$, если эта сумма имеет конечное значение, тогда только конечное количество этих элементов должно быть больше, чем некоторое число g, но небольшое. Обычно мы имеем в виду последовательность слагаемых, как вполне упорядоченную, в то время как каждому из них соответствует определённая точка. Можно легко показать, что посредством продолжающегося сложения складываются все входящие элементы, причём с той частотой, с которой они входят в сумму. Представьте себе небольшое число g, и есть лишь конечное число из элементов $a_1, a_2, \ldots$, которые $> g$. Потребуем, чтобы, как говорится, члены последовательности становились неограниченно малыми с увеличением номера. Это условие не является достаточным. Для того чтобы его получить, принято действовать следующим образом: обозначим сумму n первых элементов s_n и рассмотрим последовательность величин $s_1, s_2, s_3, \ldots$; потребуем, чтобы эти суммы имели конечные значения, то есть чтобы s_n оставалась ниже определённого предела. То есть вы берёте n достаточно большим, чтобы $s_{n+r} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+r}$ для любого r могла быть сделана сколь угодно малой. С другой стороны, можно показать, что если в силу нашего предположения величина g при n превышающем ν так определена, что упомянутая разность при $n > \nu$ может быть меньше, чем g, то последовательность имеет конечное значение [сумма ряда конечна]. После того как мы исчерпали весь этот вопрос, можно сказать о сложении неограниченно большого числа элементов, и определить <u>понятие</u> <u>умножения</u>. Оба закона, относящиеся к этому, таковы: произведение двух элементов со знаменателями m и n будет иметь знаменатель mn; что касается выполнения умножения [рядов, сумм], то вы должны умножить каждый член одного ряда на каждый член другого ряда, а потом все эти произведения сложить (с. 45). Оказывается, что каждый элемент встречается только конечное количество раз. Возьмём, например, конкретный элемент $\frac{1}{n}$, и рассмотрим, как часто он встречается в произведении, разложим a на $a'+a''$, где в a'' не содержится элемент $\frac{1}{n}$, и аналогично b на $b'+b''$, где b'' имеет аналогичный смысл, что и a''. Затем, когда получено ab, тогда как $a'b''$, так и $a''b'$, так и $a''b''$ – это всего лишь элементы, у которых знаменатель > n, и только в $a'b'$ встречаем элемент со знаменателем n, и a' и b' имеют конечное число членов, таких, что в a и, тем паче, в $a'b'$ элемент $\frac{1}{n}$ входит конечное число раз. После того, как мы показали, что умножение по указанным правилам по этому определению остаётся одним и тем же, а понятие произведения бесконечного числа сомножителей без некоторого обсуждения не представляется возможным. Однако вместо того, чтобы на этом останавливаться, мы обратимся к рассмотрению <u>более</u> <u>чем</u> <u>одного</u> <u>образующего</u> <u>элемента</u> <u>сложносоставленной</u> <u>числовой</u> <u>величины</u>.

Суббота, 5.6.1886

Это может быть получено более простым путём, если поставить целью продолжить изучение арифметических свойств, проявляющихся в процессе исследования. Из <u>понятия</u> суммы следует, что к заданному числу нужно прибавить такую <u>разность</u>, чтобы сумма приобрела заданное значение. До тех пор, пока мы определяем числовые величины с ограничениями, приходится признать, что дальнейшее изучение невозможно. Не использовать ли нам испытанную форму $a-c$, чтобы перейти к виду $a-c+c=a$ и потом ввести новые единицы. Здесь мы сразу увидим, что если возможна операция вычитания, мы должны ввести для любой величины a другую величину a', так чтобы $a+a'=0$. Ноль сам по себе имеет реальный смысл, потому что он выражает отсутствие каких-либо единиц. Не только ради простоты мы пишем 0 вместо 0 0 0 … . Предположим, что a и a' одновременно входят в какую-нибудь сумму, это в дальнейшем не повлияет на величину суммы, так как a и a' находятся друг с другом в таком отношении, что их одновременное присутствие равносильно их отсутствию (с. 46). Поскольку изменение, возникающее с добавлением a, отменяется посредством добавления a', они аннулируются. Сейчас мы попробуем сформировать числовые величины с помощью гипотезы о произвольной основной единице и её противоположности, части этих обеих единиц ввести как вспомогательную единицу. Тогда сразу ясно, что когда единица γ является n-й частью α, то также и единица, противоположная γ, противоположна n-й части единицы α.

<…> – сумма, разность, произведение и частное чисел; о формальной алгебре; комплексные числа и операции над ними только в алгебраической форме.

$E \cdot E = E$

$E \cdot I = I \cdot E = I$

$I \cdot I = -E$

Теперь мы уже достаточно знаем об этих двух основных единицах [действительной и мнимой $\xi + \xi' i$], профессор Вейерштрасс изложил это в отдельном трактате. Это не является непосредственно необходимым для (отрезков) обеих прямых, размеры которых ξ и ξ', взаимно ортогональных, здесь мы сформулируем это в виде простых отношений. Мы хотим дать полезное определение. Для переменных $e, i, -e, -i$ одной величины назовём каждую следующую величину сопряжённой, когда очерёдность сохраняется, какое бы геометрическое представление эти величины не имели.

Аналогичным образом для любой комплексной величины a, по-иному сопряжённой, заменяя единицы на сопряжённые, получим тем самым величины a', a'', a'''. Теперь легко видеть, что выбранное нами представление четырёх таких величин, изображается взаимно перпендикулярными отрезками. Умножение можно определить так, чтобы умножение на своё сопряжённое формировало произведение новых единиц так же, как это получалось с перемножением прежних единиц.

Вторник, 8. 6. 1886

Мы уже оценили сверху значение положительных и отрицательных элементов, образующих ряд, в предположении, что ряд из положительных и ряд из отрицательных величин рассматривается сам по себе как имеющий конечное значение (с. 53). Как показали исследования в математическом анализе последнего времени, это условие является достаточным, но никоим образом не необходимым для того, чтобы общая сумма была конечной, так что можно пренебречь упомянутым ограничением, и исследовать ряды, у которых абсолютные величины положительных и отрицательных членов не являются конечными. Такие ряды, как например, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, который, как известно, имеет конечное значение, без того, чтобы $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$ или $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots$ имели бы конечные значения. Особая трудность в исследовании таких рядов заключается в том обстоятельстве, что они не всегда дают определённое значение, например, если переставить чередующиеся элементы, и положить в основу суммирования новую очерёдность элементов. Если же говорить вообще о произвольном ряде, по умолчанию предполагается, что мы придерживаемся первоначальной очерёдности элементов; обозначим тогда сумму первых членов s_n, тогда естественно будет определить <u>значение</u> <u>(суммы)</u> <u>ряда</u> как предельное значение при $n=\infty$, то есть $\lim_{n=\infty} s_n$. В силу арифметических представлений, которые здесь изложены, это недопустимо, мы не исходим из того предположения, что это пограничное значение, предел, но мы рассматриваем смежное понятие предела (Grenzbegriff), которое нужно определить арифметически. Предположив для сравнения геометрическую интерпретацию, согласно которой можно представить любое число изображённым на любом расстоянии (протяжении), получим, что s_n для любого значения n представляет собой при этом способе произвольно бесконечное определённое протяжение, плоское (ровное) от границы, s_n вместе со своим окончанием увеличивается при приближении к n, в то время как эта граница сама по себе означает, что в рассмотренной области этот предел достижим. Таким образом с увеличением n будем приближаться к конечной точке переменного расстояния (отрезка) при заданных ограничениях (в заданных рубежах), и определим соответствующий предел в виде суммы бесконечного ряда. По сути получается, что если отрезок является частью единичного, получено выражение, которое совпадает с бесконечным рядом, при условии, что этот ряд выражает определённую величину. Такое расширение чисел не вызывает возражений, если понимать число только как его меру. Здесь мы не будем вдаваться в трудности различной природы, которые встречаются при реализации этой идеи. Если мы тем не менее чисто арифметическим способом прежде всего определим числовые величины, состоящие из конечного количества элементов, нет смысла говорить о границе, к которой мы приближаемся с увеличением количества элементов приближаемой числовой величины, потому что в описываемом случае таких, как правило, нет (с. 54). А теперь обратимся к случаю, который представляет новую трудность. А именно, когда положительные и отрицательные элементы сами по себе не являются конечными или определёнными, так что нет представления о том, как ряд – в той форме, в которой по крайней мере он дан, может что-то собой выражать. Это неудобство легко преодолеть, преобразовав ряд к другому виду, в котором этого можно избежать. Для этого напомним, что теорема сформулирована для положительных и отрицательных элементов ряда, где сам по себе ряд из абсолютных величин имеет конечное значение. Поэтому как только ряд можно привести к так называемому <u>абсолютно</u> <u>суммируемому</u>, так его величина будет установлена. Теперь мы легко покажем условия, при которых данные ряды из положительных и отрицательных элементов могут быть преобразованы в один такой ряд. Как раз для абсолютно суммируемых рядов легко доказать, что $\lim_{n=\infty} \left| s_{n+r} - s_n \right| = 0$ для любого r, то есть изменение s_n при возрастающей точности (количества разрядов) будет сколь угодно малым. Теперь легко видеть, что это условие может быть выполнено с помощью положительных и отрицательных членов, образующих соответствующий ряд, без того, чтобы суммировать положительные и отрицательные члены, а вычисляя имеющиеся конечные значения, как например, в случае $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...$. Теперь мы хотим расширить понятие числовой величины с той точки зрения, что в каждом ряду, с помощью которого определяется соответствующая числовая величина, в порядке, о котором мы только что говорили, очерёдность элементов имеет важное значение. Теперь, если заданное условие выполняется, легко можно доказать следующее: сгруппируем (разместим, вставим) сохраняя последовательность (чередование, очерёдность) каждый раз некоторое определённое количество элементов рассматриваемого ряда $a_1+a_2+a_3+...$ вместе (в его совокупности), тогда образуется новый ряд $b_1+b_2+...$. Возможно сделать это преобразование произвольным числом способов, чтобы новый ряд был абсолютно суммируемым? Для того, чтобы это определение величины было безусловным, необходимо и достаточно, чтобы для всех способов преобразования получалась одна и та же величина. Абсолютно сходящиеся ряды сравнимы друг с другом в силу этой общей теоремы. Эта процедура производится следующим образом [с. 55]: пусть $a_1+a_2+...$ рассматриваемый ряд; и ряд $g_1+g_2+...$состоящий только из положительных элементов, о которых известно, что они конечны, следовательно, $\lim\limits_{n=\infty} g_n=0$. Сначала отделим некоторое количество элементов первого ряда таким образом, чтобы любое количество элементов остатка в сумме было бы меньше чем g_1. В силу нашего предположения можно так выбрать *n*, чтобы разность была $|s_{n+r}-s_n|<\delta$, для достижения указанной цели можно взять $\delta=g_1$. Это будут как раз $n=\alpha$ и $S_\alpha=b_1$. С оставшимися можно сделать поочередно то же самое, остальная часть этого ряда будет содержать произвольное количество элементов, сумма которых не превосходит g_2. Отделим от их суммы b_2. Продолжая таким образом, мы получим ряд из членов $b_1,b_2,....,b_n$, где вообще говоря $|b_{\nu+1}|<g_\nu$. Следовательно, $|b_2|+|b_3|+...+|b_n|<\sum\limits_1^{n-1} g_\nu$. С правой стороны в силу предположения, находится конечная величина, следовательно, и левая сторона тоже конечна, и тогда b_1тоже конечна, а следовательно, и весь ряд при произвольном увеличении *n* тоже будет иметь конечное значение. Теперь покажем, что если мы выполняем те же операции другими способами, образуя ряды $c_1,c_2,c_3,...$, их сумма будет иметь то же значение, что и в первом случае. Действительно, если ряд $=b_1+b_2+...b_m+R_m$, то $|R_m|<g_{m-1}+g_m+g_{m+1}+...$и это может быть применено к $\sum g_\nu$, которую по предположению можно сделать произвольно малой при неограниченном увеличении *m*. Таков же ряд

$=c_1+c_2+...c_p+R'_p$. Пусть теперь ряд $b_1+b_2+...b_m$ состоит из первых μ членов ряда $a_1+a_2+...$ взятых в совокупности, так что они прежде всего $=S_\mu+R_m$, а затем $=S_\nu+R'_p$, если ν для *c* имеет тот же смысл, что и μ для b. Разность между двумя этими выражениями есть $=S_\mu-S_\nu+R_m-R'_p$ (с. 56).

Теперь можно увеличить *m* и *p* так, чтобы R_m и R'_p стали сколь угодно малыми, согласно предположению $S_\mu-S_\nu$ по поводу ряда. Таким образом разность может быть сделана так мала, как это требуется, иными словами, имеется определённый набор положительных и отрицательных членов ряда с конечными значениями, поэтому с помощью этого построения можно получить любое количество <u>абсолютно</u> <u>суммируемых</u> <u>рядов</u>. Как видите, мы привели наши соображения о рядах без ограничений на общее понятие числовой величины, ими уже сейчас можно пользоваться чтобы определить операции сложения, вычитания и т.д., здесь мы излагаем это сокращённо, для того чтобы заложить основу, приблизиться к обоснованию.

Среда, 9. 6. 1886

§ 6. Введение понятия переменной величины; доказательство основных теорем

Под <u>переменной</u> <u>величиной</u> понимаем величину, которая определяется посредством бесконечно многих величин, которые соответствуют данному определению. Так, например, сформируем в области чисел, созданных из основной единицы, такие числа, которые кратны основной единице, переменные величины. Можно различать так называемые действительные и комплексные переменные, последние состоят из двух основных различных единиц, и в каждом отдельном случае нужно указывать, о расширении определения какого типа величин идёт речь. Обычно так называют только такие переменные величины, которые могут принимать бесконечное число значений; величина, которая вообще может принимать различные значения, уже является переменной. Назовём неограниченной переменной величиной по определению не имеющую абсолютно никаких ограничений. Такие ограничения на изменяемость могут быть сделаны различными способами, например, когда действительная переменная величина находится между двумя границами *a* и *b*, или когда комплексное значение ограничено в <u>соответствующим</u> <u>образом</u> <u>построенной</u> плоской области. С определением переменной величины связано понятие переменной <u>границы</u> (пограничной переменной величины, предельной точки). Проблема в том, какой арифметический смысл мы связываем с этим понятием (с. 57). Пусть *x* переменная величина, и *a* – некоторая точка, в любой окрестности которой содержится бесконечно много определённых значений [переменной], тогда *a* является границей переменной величины (предельной точкой), если она сама не входит в её определение. Видимо, может быть несколько таких ограничений. Да, количество таких пограничных точек может быть даже бесконечным, например, когда мы определяем такую переменную величину, которая может быть представлена бесконечным количеством переменных, составленных вместе, образованных из основной единицы и её частей. Тогда все рациональные величины будут определены, и в каждой окрестности любой иррациональной числовой величины находится произвольное сколь угодно большое количество рациональных числовых величин, сколь угодно близких к ней. Таким образом, любая иррациональная числовая величина является границей (предельной точкой) рациональной, то есть в данном случае определённой. Нужно ли определять разницу между рациональными и иррациональными величинами чисто арифметически? Если исходить из существования рациональных чисел, то нет никакого смысла определять иррациональные как пределы, потому что мы изначально не знаем, есть ли другие числовые величины, кроме рациональных. Только когда приходится иметь дело с обширными (экстенсивными, расширенными) величинами, можно говорить о границе отрезка, но только не с арифметической точки зрения. Но среди числовых величин, определённых нами выше, содержатся не только рациональные числа, но также и другие. Возьмём, к примеру, число *e*, состоящее из элементов $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots.$, это вполне определённый ряд, который определяет конкретную числовую величину, тем не менее можно показать, что не существует рациональной числовой величины, которая равна ей по определению, что показывает, что числовая область рациональных чисел не полна. Да, как исключение следует рассматривать тот случай, когда числовая величина, сформированная из бесконечного числа элементов, равна рациональной числовой величине. Изначально мы определяли рациональную числовую величину как составленную из конечного числа элементов сложных величин, следовательно, мы можем представить её выраженной через кратные положительные или отрицательные части основной единицы. Из основной единицы и её частей образуются числовые величины таким образом, что таким образом созданная область охватывает как рациональные, так и иррациональные числовые величины. Отметим, однако, что мы можем теперь рассматривать иррациональные числа как пределы переменных рассматриваемых рациональных величин. Так как ряд состоит из бесконечного числа элементов, мы всегда можем выделить достаточно элементов, чтобы остаток был меньше сколь угодно малой δ, так что существует бесконечно много рациональных чисел, сколь угодно близких к рассматриваемому иррациональному (с. 58). Как только мы это покажем, признаем, что на основании упомянутого выше примера переменная величина может иметь бесконечно много предельных точек.

Теперь мы подходим к разработке теорем, которые нельзя рассматривать как самые важные в теории числовых величин, но в целом являются необходимой основой для значительной части нашего исследования. Для ясности приведём пример. Рассмотрим два ряда:

$g_0(x)+g_1(x)+g_2(x)+\ldots in \inf.$, $h_0(x)+h_1(x)+h_2(x)+\ldots in \inf.$,

где $g_\nu(x)$ и $h_\nu(x)$целые рациональные функции *x*, с произвольными, в том числе рациональными коэффициентами. При рассмотрении этих рядов можно ограничиться действительными значениями аргумента, определённого между *a* и *b*, можно однако, распространить их на комплексные значения аргумента, во взаимосвязи их частей всего построения. Эти ряды могут быть равны, и возникает вопрос, какое условие будет достаточным, чтобы для любой величины *x* из области эти ряды принимали бы одинаковые значения. Если возможно преобразование одного ряда в другой с помощью аналитических операций, это можно увидеть, если доказать сходимость обоих рядов. Но бывают случаи, когда нельзя говорить о таком преобразовании, и тогда нужно выявить равенство. Поскольку вопрос теперь в том, нельзя ли обойтись меньшим количеством условий, достаточных для определения этого равенства, например, для небольшого ряда значений *x*, чтобы потом придать им более общий характер. Например, ряд определён только в некоторой связной части области, тогда вопрос в том, нельзя ли из равенства значений функции вдоль линии в этой области, сделать вывод о равенстве вдоль линии, проходящей по другим областям, в которых функция определена. Одно из таких доказательств на первый взгляд кажется чем-то очень сомнительным, на самом деле это введение нового понятия, а именно понятия <u>равномерной сходимости</u>. Мы уже ранее имели возможность познакомиться со смыслом и содержанием этого известного понятия, сейчас мы не будем на этом останавливаться. Достаточно сказать, что с недавнего времени оно характеризуется важной ролью во всех таких доказательствах. В конечном счёте доказательства по этому вопросу основываются на следующей теореме, которую мы сейчас сформулируем (с. 59):

Пусть x – неограниченная переменная величина, которая, как говорится, образует одномерное многообразие, геометрически представляемое в виде прямой линии, и на ней определена другая переменная величина x' таким образом, что количество определённых (definierten) точек бесконечно, тогда в областях x, для которых x' определена, есть по крайней мере одна точка, в окрестности которой находится бесконечно много определённых (определяемых) точек. Такая точка может быть либо определена сама, либо нет; в последнем случае это будет «<u>предельная</u> <u>точка</u> (Grenzstelle)».

Кажется естественным воспринимать это как должное, эта теорема считается само собой разумеющейся. В самом деле, предположим сначала лишь то, что x' определена между

конечными пределами *a* и *b*, очевидно, что если вернуться к идее прямой и учесть то, что на конечном отрезке *a*…*b* находится бесконечно много определённых точек, что по крайней мере в одной точке рассматриваемого отрезка должна быть точкой сгущения (letztere sich ins Unbegrenzte häufen müssen). Но мы хотим дать здесь строгое доказательство теоремы. Мы ограничимся конечным интервалом (*a*, …, *a*+*d*). (Пусть, например, x' определён как $\frac{1}{n^2}$, где *n* пробегает все числа от 1 до ∞, тогда (*a* … *a*+*d*) = (0 … 1).) Разделим этот отрезок пополам. Тогда в силу предположения по крайней мере в одной из двух половин интервала находится бесконечно много x'. Из этих двух интервалов мы разделим первый на $\left(a....a+\frac{d}{2}\right)$ и $\left(a+\frac{d}{2}...a+d\right)$. Первый из этих интервалов, в котором расположено бесконечно много x', обозначим $\left(a+\varepsilon\frac{d}{2}\ ...\ a+(\varepsilon+1)\frac{d}{2}\right)$, тогда (так как, где стало быть, таким образом) $\varepsilon=0$ или $=1$, мы учтём, примем во внимание также тот случай, когда в обеих частях интервала расположено бесконечно много x'. Итак, приступим. Разобьём интервал $\left(a+\varepsilon\frac{d}{2}\ ...\ a+(\varepsilon+1)\frac{d}{2}\right)$ на два равных интервала $\left(a+\varepsilon\frac{d}{2}\ ...\ a+\varepsilon\frac{d}{2}+\frac{d}{4}\right)$ и $\left(a+\varepsilon\frac{d}{2}+\frac{d}{4}\ ...a+(\varepsilon+1)\frac{d}{2}\right)$. Первый из них, в котором лежит бесконечно много x', обозначим $\left(a+\varepsilon\frac{d}{2}+\varepsilon_1\frac{d}{4}\ ...\ a+\varepsilon\frac{d}{2}+(\varepsilon_1+1)\frac{d}{4}\right)$, где $\varepsilon_1=0$ или $=1$. Продолжая эту процедуру, мы получим окончательный определённый ряд чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$, а затем (тогда) $a+\varepsilon\frac{d}{2}+\varepsilon_1\frac{d}{4}+...+\varepsilon_n\frac{d}{2^{n+1}}$ – это исходная точка первого интервала, в котором находится бесконечно много величин x'. Таким образом этот интервал можно представить так:
$\left(a+d\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon_1}{4}+\frac{\varepsilon_2}{8}+...+\frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}}\right)...a+d\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon_1}{4}+\frac{\varepsilon_2}{8}+...+\frac{\varepsilon_n+1}{2^{n+1}}\right)\right)$(с. 60).

Пусть $a_n=a+\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon_1}{4}+\frac{\varepsilon_2}{8}+...+\frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}}\right)d$; то есть внутри отрезка $\left(a_n....a_n+\frac{d}{2^{n+1}}\right)$ расположено бесконечно много определённых (definierten) чисел. Рассмотрим теперь число ряд из элементов a_n продолжающийся воображаемо бесконечно; затем наконец получим $a'=a+\eta d$, где $\eta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{k+1}$. Здесь η полностью известная (определённая) величина. Мы утверждаем, что a' есть точка, в окрестности которой плотно расположено бесконечно много определённых (definierten) x'. Ибо мы можем сначала установить $a' = a_n + \eta' d$, где $\eta' d > 0$, и сделать η' произвольно малым. В интервале $\left(a_n \ldots a_n + \frac{d}{2^{n+1}}\right)$ расположено бесконечно много определённых (определяемых, definierten) значений x'. Таким образом как только n определяется чтобы $\frac{d}{2^n} < g$, то величина x' такова, что отличается от a' менее, чем на g, потому что $\eta' d$ и подавно $< g$. Таким образом, теорема строго доказана.

Как видно, наше доказательство основано только на предположении о существовании величин ε_ν; это предположение является лишь логическим следствием двух условий: что существует бесконечно много определяемых x', и что они находятся в конечном интервале $(a .....a + d)$. До сих пор мы доказывали эту теорему в предположении, что x' определён между конечными величинами; её легко можно распространить на тот случай, когда x' определён (definiert) от $-\infty$ до $+\infty$. Или потому что найдётся бесконечно много определённых x', превосходящих сколь угодно большую величину *a*, тогда применим нашу теорему к x', расположенному на бесконечности; в этом случае будем говорить, что $+\infty$ является граничной (предельной) точкой для x', и то же самое соответственно относится к $-\infty$.

Пусть, наконец, в $(-\infty....+\infty)$ расположен конечный отрезок, о котором мы знаем, что в нём находится бесконечно много x', тогда мы легко сможем применить вышеизложенное доказательство (с. 61).

Пятница, 11. 6. 1886

Предельная точка a' в приведённых выше доказательствах играет важную роль, это определённая (назначенная) числовая величина, её можно дать в виде других разнообразных форм, не только делением пополам, но и делением на любое другое целое число. Главное здесь то, что существование этой числовой величины имеет арифметический смысл, так как она представима основной единицей и сколь угодно большим количеством её частей. Теперь перейдём к геометрической форме этой теоремы, которая сформулирована БОЛЬЦАНО, хотя свидетельства об этом нельзя назвать очень строгими. БОЛЬЦАНО выражается примерно так: Предположим, что на некоторой линии *AB* имеются точки, обладающие некоторыми свойствами, определённые каким-то образом. Как известно, если определена какая-нибудь точка *C*, определены точки, расположенные между *A* и *C*, то известно также, что в *AB* обязательно имеются точки, которые не могут быть определены. В этих условиях должна найтись точка *D* с таким свойством, что все точки, лежащие между *A* и *D*, относятся к определённым, а все точки, лежащие между *D* и *B*, не являются определёнными. Остаётся открытым вопрос, принадлежит ли *D* к определённым точкам, или нет. Больцано основал своё доказательство на том, что для положения точки *D* найдётся числовая величина, как это делали мы раньше, но тому, что любая созданная числовая величина соответствует точке, нет никаких доказательств. Нам будет достаточно доказать теорему следующим образом: предположим, что если *C* относится к определённым точкам, то и каждая точка между *A* и *C* тоже будет таковой. Это означает ни что иное, как то, что эти точки, как здесь предполагается, образуют непрерывную последовательность, и тогда ясно, что если две точки C и C' не являются определёнными, ни одна точка между C и C' не будет определённой. Поскольку не все точки между *A* и *B* являются определёнными, то ясно, что и без определённых точек можно образовать непрерывную последовательность. Таким образом, точка *C* относится к последнему классу, так что все точки отрезка *CB* тоже к нему принадлежат

Оба типа должны вместе заполнять отрезок *AB*, то, что мы имеем дело с установленными условиями, нельзя представить иначе, нежели два непрерывных отрезка, которые относятся к обоим классам точек, разделённых точкой *D*. На самом деле мы считаем, что обычные понятия точки и прямой настолько несомненны, что против вышеизложенного нет никаких возражений. Поэтому определим положение точки *D* так, чтобы оно как-то согласовывалось с нашим врождённым, естественным понятием предела, после чего мы можем представить себе, что прямая не ограничена ничем, кроме точек, так что можно предположить, что *D* представляет собой определённую величину (с. 62). Тогда будут согласованы оба метода доказательства. Кстати, мы не делаем особого акцента на том или другом из этих видов доказательств, задача основной леммы состоит в том, чтобы установить смысл. Это связано с тем обстоятельством, на которое мы уже неоднократно обращали внимание, предполагая, что по условию на отрезке *AB* с назначенной единицей длины имеется точка *C*, которая представляет собой числовую величину, обратное не является очевидным, а именно то, что любая числовая величина соответствует точке. По крайней мере не исключена возможность, что вся совокупность положительных числовых величин является чем-то всеобъемлющим, нежели вся совокупность всех возможных отрезков от *A* в направлении *AB*. Привлекая геометрическую интуицию, приведём вспомогательный способ для лёгкого объяснения того, что каждой определённой числовой величине соответствует геометрический отрезок. Мы считаем, что названная числовая величина, представленная в какой-нибудь арифметической форме, например, в десятичной системе в виде $a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\dots$, где $0\le a_k<10$, когда $k\ge 1$, может представлять на отрезке любую числовую величину, которая возникает в вышеприведённом выражении ряда первой, второй и так далее. Прерывая выделение элементов, мы определим таким образом бесконечно много числовых величин, к которым можно применить нашу теорему, и очень легко показать, что определённые выше выражения и являются числовыми величинами, в окрестности которых сгущено бесконечно много определённых точек (положений), что и подтверждает, что действительно изображена точка (положение), которая представляет приведённую выше числовую величину. Вопрос только в том, как вообразить себе эту предельную точку, если основываться на ходе мыслей Больцано. Теперь это делается следующим образом: мы уже определили понятия «больше» и «меньше» для наших числовых величин, а также и для отрезков, соответствующих числовым величинам, меньшим, чем рассматриваемая числовая величина. Если C – точка второго типа, то все точки между A и C будут точками этого типа, образующими непрерывную последовательность точек этого типа. То же самое можно сказать и о концевых точках отрезков, которые представляют числовые значения, большие чем рассматриваемая числовая величина. Таким образом, должна быть одна и только одна точка отделения двух отрезков друг от друга, и этой точкой является рассматриваемая числовая величина (с. 64). Благодаря тому, что мы обстоятельно разобрали вышеизложенное утверждение, сейчас можем сделать обобщение. Мы сможем перейти от рассмотрения отдельных переменных величин к рассмотрению систем таковых. В аналитической геометрии на плоскости, соответственно в пространстве, каждая точка характеризуется двумя или соответственно тремя величинами, которые могут принимать все действительные значения. Можно рассматривать эти переменные как связанные с различными единицами. Система *n* различных величин называется определённой системой значений точки в области этой величины и совокупностью всех точек <u>*n*-кратного</u> <u>многообразия.</u> При конкретном рассмотрении таких n-кратных многообразий необходимо сначала установить порядок следования величин, как при некотором заданном значении первая величина относится к первой переменной, вторая ко второй переменной и так далее. Здесь не предвидится никаких затруднений, если мы обратимся к системе переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$, понимая под $(a_1, a_2, ..., a_n)$ <u>точку</u> <u>в</u> <u>этом</u> <u>многообразии.</u> Отметим, что мы можем сформулировать следующую теорему:

Предположим, что в *n*-кратном точечном многообразии, определённым произвольным образом, однако так, что этому определению отвечает бесконечно много точек, имеется по крайней мере одна точка, в непосредственной окрестности которой сосредоточено бесконечно много определённых точек. Назовём совокупность всех точек, образованных, когда x_1 может принимать все значения от $a_1 - d$ до $a_1 + d$, x_2 может принимать все значения от $a_2 - d$ до $a_2 + d$ и так далее, и мы полагаем, что таким образом можно сформировать все возможные числовые комбинации *n* величин <u>окрестности</u> точки $(a_1, a_2, ..., a_n)$, таким образом мы утверждаем, что если d является сколь угодно малым, то в каждой сколь угодно малой окрестности по крайней мере одной точки существует бесконечно много точек, удовлетворяющих определению.

Первое утверждение очевидно только в том случае, если все рассматриваемые точки выражаются конечно, то есть $x_1, x_2, .., x_n$. абсолютное значение не превышает определённых пределов. Это легко обобщить на случай, когда граничная точка находится на бесконечности. Доказательство совершенно аналогично приведённому в соответствующей теореме для однократного многообразия.

Теперь можно обобщить теорему на n-кратное многообразие комплексных величин. Собственно говоря, мы имеем дело с $2n$-кратным многообразием, а именно с $2n$-кратным многообразием действительных величин в обычном смысле, так что легко распространить теорему на более широкую область значений (с. 64).

Теперь есть возможность определить окрестность точки $(a_1, ..., a_n)$ в области n-кратного многообразия действительных переменных через неравенства $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2} \le d$, таким образом для n-кратного комплексного многообразия величин вида $x_k = \xi_k + \eta_k i,\ k = 1, 2, ..., n$ будет $\sqrt{\sum_1^n (\xi_k - a_k)^2 + \sum_1^n (\eta_k - b_k)^2} \le d$.

Величина d называется радиусом окрестности рассматриваемой точки $(a_1, ..., a_n)$, это выражение для пространства переносится на произвольные n-кратные многообразия.

Теперь возможны два подхода: либо мы относим к определённым такую точку, в каждой окрестности которой находится бесконечно много определённых точек, либо нет. В последнем случае будем называть её граничной (предельной) точкой .

Вторник, 22. 6. 1886

Перейдём теперь к определению <u>континуума</u> в n-кратном многообразии. Это легко определить пока мы остаёмся в простом многообразии, но для n-кратного многообразия требуется отчётливое изложение. Рассмотрим, например, функцию двух независимых переменных, они могут иметь неограниченное изменение на всей неограниченной плоскости, или быть ограниченными в какой-то определённой области. Это то, что обычно рассматривают как часть плоскости, но это не совсем подходящий способ выражения, как видно, так как часто исключаются отдельные точки плоскости. Давайте теперь исключим из плоскости несколько точек, мы всегда сможем перейти от одной неисключённой точки к другой такой же непрерывным связным путём, да, мы всегда можем выделить такую часть плоскости, которая соединяет две точки одну с другой. Последнего мы можем достичь с помощью последовательности кругов, таких, что центр следующего круга лежит внутри предыдущего круга, а радиусы выбраны так, что все исключённые точки останутся снаружи (с. 65). В ином случае, когда количество исключённых точек бесконечно велико, нет необходимости изображать (строить) линию. Например, исключённые точки лежат на окружности таким образом, что, когда u' в каком-либо направлении из произвольной начальной точки проецируется на дугу, и этот круг имеет единичный радиус, для $u'=2\xi\pi$, где ξ пробегает все рациональные значения от 0 до 1, тем самым устраняется определённая часть плоскости без точек, непрерывно расположенных на линии. Прежде всего внутри круга не содержится исключённых точек, возьмём одну из них в качестве центра круга, все точки которого должны быть определены; можно убедиться, что его радиус не превышает определённого предела; вновь возьмём в круге новую точку и очертим вокруг неё круг, так же как вокруг первой точки, очевидно (может показаться), что если неограниченно продолжать эту процедуру, мы никогда не выйдем из внутренней области, через исключённые точки, ограничивающие круг за пределы круга, подобно тому, как точка извне никогда не сможет попасть в круг. Таким образом мы видим, что никакой непрерывной последовательности точек недостаточно для разложения двумерного многообразия на части. Как мы видим из примера, даже априорно невозможно определить виды разложения плоскости на части.

Теперь перейдём к рассмотрению *n*-кратного многообразия; мы можем определить его как множество определённых точек, и поговорим об основной теореме, подробное обоснование которой у нас было для случая простого многообразия. Точечное множество называется замкнутым, если любая окрестность каждой из его определённых точек содержит бесконечно много определённых точек. Если мы определим, например, все точки круговой области, то каждая точка окружности определена и одновременно является граничной, в то время как за пределами круговой области не найдётся ни одной точки, про которую можно сказать, что в любой её малой окрестности находятся определённые точки. Теперь мы можем сделать любое точечное множество *P* замкнутым, причислив к нему его пограничные (предельные) точки P'. Полагая, что точка не принадлежит ни к *P*, ни к P', мы можем в любом случае описать вокруг неё круг конечного радиуса, не содержащий P, в противном случае он содержал бы P' (с. 66). Но он также не может содержать и P', потому что, по определению, в P' содержится бесконечно много точек *P*.

С помощью такого замкнутого точечного множества мы сейчас или выделим из *n*-кратного многообразия один континуум, или несколько, находящихся на расстоянии друг от друга. Пусть дана точка *A*, не принадлежащая множеству точек, мы можем окружить её окрестностью такого радиуса ρ, что в неё не попадут определённые (definierten) точки; ρ является переменной величиной, имеющей верхнюю границу в том смысле, что принимает любые меньшие значения. Абсолютной окрестностью *A* будет такая, чей радиус ρ_0 и является этим верхним пределом. Отправляясь из точки *A*, построим последовательность точек $A_1, A_2, ..., A_n$ таким образом, что каждая последующая содержится в окрестности предыдущей. Далее возможны два случая: либо мы приходим из *A* в любую точку, не принадлежащую точечному множеству *P*, либо нет. В первом случае все те точки, которые не входили в точечное множество *P*, образуют [один] континуум, во втором случае в силу нашего предположения точка *A* всего лишь определяет оставшуюся после исключения *P* часть *n*-кратного многообразия. Выберем теперь в оставшейся части *n*-кратного многообразия точку *B*, так чтобы благодаря ей вновь определить в нём новый континуум.Таким образом мы видим, что в силу определения точечного множества *n*-кратное многообразие может быть разделено на бесконечно много частей.

Теперь возникает вопрос, будут ли две точки, изначально принадлежащие одному и тому же определённому континууму, всегда приводить к этому континууму или нет. Чтобы ответить на этот вопрос, представим, что между *A* и *B* находится последовательность таких точек, что мы можем перейти по ним из *A* в *B*, причём каждая следующая точка находится в окрестности предыдущей. Тогда сразу получается, что из *A* можно достичь всех точек, в которые мы можем попасть из *B*, потому что мы просто после *B* сможем попасть в *A*. Не совсем ясно, как из *B* мы сможем достичь всех точек, достижимых из *A*. Чтобы показать это, нужно доказать, что из *B* можно вернуться в *A*, а именно, что можно выйдя из *B* к *A*, можно пройти через все точки, достижимые из *A*. Для того, чтобы доказать это, соединим *A* и *B* последовательностью точек, которые смогут обеспечить переход от *A* к *B* (с. 67). Соединим эти точки ломаной линией; то есть $A_{n-1} A_n$ полностью в окрестности A_{n-1} и так далее. Пусть эта линия проходит через точку так, чтобы каждому положению соответствовал абсолютный радиус окрестности ρ, являющийся переменной величиной и имеющий нижний предел, не равный нулю; и если мы применим принцип классификации, который мы использовали в доказательстве основной теоремы, то прежде всего мы получим, что нужно попасть в одно или несколько **конкретных** мест, для которых фактически достигается нижняя граница. Но во всякой ли точке ломаной линии ρ имеет конечное значение, потому что иначе упомянутое место (точка) является предельной точкой для *A*, то есть принадлежит точечному множеству P, так что можно использовать его как любое продолжение континуума.

Мы хотим представить другое доказательство, которое основано на следующем предложении. Если две точки *A* и *B* находятся на расстоянии δ, и ρ это радиус окрестности *A*, тогда между $\rho-\delta$ и $\rho+\delta$ существует ρ', радиус окрестности *B*. Теперь можно выбрать ρ

настолько малым, чтобы разность между $\rho-\delta$ и $\rho+\delta$ была сколь угодно мала. Пусть точка пробегает отрезок от A_1 до A_n, тогда соответствующее значение ρ достигнет своей наименьшей величины, не равной нулю, как мы оговаривали выше. Пусть точка пробегает отрезок в обратном направлении $A_n, A_{n-1}, ..., A_1$, выберем расстояние $A_{\nu-1}A_\nu$ настолько малым, чтобы как A_ν лежало в окрестности $A_{\nu-1}$, так и $A_{\nu-1}$ лежало в окрестности A_ν, что получится, если $A_{\nu-1}A_\nu<\frac{1}{2}\rho$; это тот самый радиус окрестности A_ν, о котором мы говорили, что он $>\frac{1}{2}\rho$, $A_{\nu-1}$ таким образом попадает в окружность, описанную вокруг A_ν. Если мы выберем промежуточные точки таким образом, чтобы все расстояния между ними были $<\frac{1}{2}\rho_0$, где ρ_0 есть нижняя граница ρ, то мы уверены, что можно вернуться из A_n в A_1, о чём говорилось выше, то есть из все точек (всякой точки) мы можем попасть только в те точки континуума, которые ему принадлежат, и это в самом деле так, или, иначе говоря, точка может принадлежать только континууму, что и доказано полностью.

Среда, 23.6.1886

Эта теорема прежде всего применима к плоскости, то есть к двумерному многообразию, и теперь наша задача продолжить доказательство на произвольное *n*-кратное многообразие [с. 68]. Здесь мы будем использовать геометрические выражения, приведённые к следующему виду: пусть $x_k=a_k+t(b_k-a_k),\ (k=1,...,n)$, где *t* это неограниченная действительная переменная, тогда назовём совокупностью точек (мест, положений, Gesamtheit der Stellen) $(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих этому выражению, <u>линию</u> в соответствующем многообразии. Основания для такого названия не нуждаются в комментарии. Совокупность значений системы $(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые следуют из этого выражения, когда *t* принимает значения от 0 до 1, называется <u>отрезком</u>. Придавая *t* значения >1, получим продолжение отрезка *ab* за пределы *b*, придавая *t* отрицательные значения, получим продолжение за пределы *a*. Выражение $\sqrt{\sum_1^n(b_k-a_k)^2}$ называется расстоянием точки *b* до точки *a*. Если оно $=r$, мы понимаем под окрестностью точки *a* радиуса *r* совокупность всех значений системы, для которых $\sqrt{\sum_1^n(b_k-a_k)^2}<r$.

Докажем теперь теорему, которая является прямым обобщением следующего утверждения для пространства: Если *a*, *b*, *c* – три точки пространства, то $ac<ab+bc$, если они не лежат на одной прямой. Теперь пусть *c* изменяется, но так, чтобы *bc* всегда имеет одно и то

же значение, так что есть положения, при которых *ac* достигает максимума, и такие, при которых *ac* является минимальным. Для *n*-кратного многообразия эта теорема звучит следующим образом: Если *a*, *b*, *x* три точки, то $ax<ab+bx$ или $\sqrt{\sum(x_\lambda-a_\lambda)^2}<\sqrt{\sum(b_\lambda-a_\lambda)^2}+\sqrt{\sum(x_\lambda-b_\lambda)^2}$, кроме тех случаев, когда $x_\lambda=a_\lambda+t(b_\lambda-a_\lambda)$. В последнем случае из приведённого выше неравенства получается уравнение. Теперь мы можем доказать это чисто алгебраически, но поступим сначала следующим образом (с. 69). Пусть *a*, *b* фиксированы, *x* – переменная, но такая, что *bx* имеет постоянное значение ρ, так что сначала нужно показать, что существует точка, для которой $\sqrt{\sum(x_\lambda-a_\lambda)^2}=R$ есть максимум, и другая точка, для которой *R* является минимумом. Он также должен быть $\sum(b_\lambda-a_\lambda)^2=r^2$. Будем действовать обычным образом и составим выражение $\sum(x_\lambda-a_\lambda)^2-\varepsilon\sum(x_\lambda-b_\lambda)^2$, оно должно принимать минимальное или максимальное значение, и притом мы домножим слагаемое на неопределённую постоянную ε, потому что эта задача сродни вариационному исчислению. Таким образом, мы имеем систему уравнений $(x_\lambda-a_\lambda)-\varepsilon(x_\lambda-b_\lambda)=0\ \ (\lambda=1,\ldots,n)$ или $x_\lambda-a_\lambda=-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(b_\lambda-a_\lambda)$, что доказывает, что искомые точки действительно лежат на линии. Дальше получаем $R=\pm\varepsilon\rho=\pm\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}r$, а также $\varepsilon=1\pm\frac{r}{\rho}$.

Таким образом получаем две точки, и не больше, удовлетворяющих требуемому. Тогда в первом случае $R=\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\rho=r+\rho$, во втором $R=\left(\frac{r}{\rho}-1\right)\rho=r-\rho$. По сути, мы имеем в одном случае максимум, в другом минимум, так что фактически в остальных случаях $ax<ab+bx$. Эта теорема послужит основой доказательств наших теорем для *n*-кратных многообразий. Пусть в замкнутом многообразии дано замкнутое точечное множество, но так, что есть точки, не принадлежащие ему. Тогда для каждой точки, которая ему не принадлежит, безусловно, определена окрестность. Наверняка точки множества *P* не лежат в произвольной близости к упомянутым точкам, то есть может быть точка, обозначенная *a*, с окрестностью радиуса ρ, внутри которой нет точек из *P* . Несомненно, этот радиус не превышает конечного предела *r*, то есть окрестность *r* определена так, что при небольшом увеличении в неё попадёт точка *P*. Взяв в окрестности точки *a* некоторую точку *b*, можно показать, что, когда $ab=d$, радиус окрестности *b* не меньше чем $r-d$ и не больше, чем $r+d$ (с. 70). Если *c* является точкой из окрестности *b*, то в силу только что доказанной теоремы прежде всего $ab+bc>ac$ или $bc>r-d$, а также $bc<ab+ac$, $bc<r+d$, что и требовалось доказать. Во второй части *c* означает точку,

которая находится на границе окрестности *b*, расположенной в окрестности *a*. Итак, мы можем сформулировать следующее определение: если в окрестности точки *a* содержится точка *b*, в окрестности точки *b* содержится точка *c* и так далее, то любая точка *s*, по которой мы можем перейти из *a* в *c*, называется <u>связной</u> (смежной) с точкой *a*. Покажем, что если *s* связано с *a*, то и *a* связано с *s*.

Пусть теперь в окрестности точки *a* лежит точка *b*, так что $ab < \frac{1}{2} r$, где *r* это окрестность [радиус окрестности] точки *a*, тогда радиус окрестности точки *b* будет в силу доказанной теоремы $> \frac{1}{2} r$. Соединим *ab* отрезком прямой, тогда для любой точки всегда определена такая окрестность, которая $> r - d$, как только $ab = d$, нам нужно лишь – что возможно всегда – соединить *a* и *b* последовательностью точек такого рода, что при переходе от *a* к *b* каждая точка всегда лежала в окрестности предыдущей, чтобы быть уверенным, что из *b* в *a* можно вернуться обратно, но это всегда возможно, потому что расстояние между точками $< r - d$. Но *a* связано с *b*, и мы можем из *b* попасть в любую точку, в которую можно попасть из *a*, значит нужно отправиться из *b* через *a*.

Пятница, 25. 6. 1886

Теперь поставим вопрос о создании концепции <u>границ</u> <u>континуума</u>. А именно, могут ли все точки многообразия принадлежать континууму, или нет, в последнем случае тогда должны существовать точки, в произвольной близости к которым находятся как точки, принадлежащие континууму, так и не принадлежащие ему. Совокупность этих точек мы будем называть **границей (пределом)** континуума (с. 71). Это и есть наиболее возможное многообразие, на плоскости ограничителем может быть единственная точка, бесконечное количество точек, расположенных дискретно, и, наконец, непрерывный контур. Нам нужно доказать две вещи: 1) что за исключением упомянутого плоского случая в континууме имеются (содержит) границы; 2) что всё это можно найти в замкнутом точечном множестве, с помощью которого мы с самого начала определяли континуум. Совсем не обязательно, чтобы все точки, принадлежащие замкнутому множеству точек, были граничными (предельными); например, определим в пространстве замкнутое множество с помощью точек, которые находятся внутри сферы или на её поверхности, то в этом смысле если отделить от шара континуум его граничных точек, то оставшиеся внутренние точки сферы уже не будут замкнутым точечным множеством.

Поэтому сначала нужно доказать существование предельных точек. Пусть *a* это точка внутри континуума, *b* это любая другая точка; по ранее данному определению *n*-кратного многообразия $x_\lambda = a_\lambda + t(b_\lambda - a_\lambda)$, $(\lambda = 1, \ldots, n)$, где *t* принимает все положительные и отрицательные действительные значения, то a и b соединены прямой линией. Теперь пусть τ – произвольная положительная величина, так что для неё (такая, что) при подстановке её вместо t в выражения для координат отрезка получается точка P этого отрезка, лежащая в континууме, и такая, что все точки от a до неё принадлежат отрезку (участку) континуума, тогда расстояние (отрезок) aP имеет переменную величину и как таковой имеет верхнюю границу. Если оно будет бесконечно большим, тогда все точки прямой принадлежат континууму; если нет, то для P_0 должно быть предельное положение для P, в этом случае P_0 будет просто границей для P, как это следует из его определения. Отрезки, для которых такие предельные точки P_0 действительно существуют, должны быть в любом случае; в самом деле, нужно взять какую-нибудь точку, для которой в континууме определено точечное множество, связанное с a; разумеется, эта точка является точкой класса P_0, иначе на отрезке не было бы точек, предшествующих ей в соединении с точкой a, то есть соответствующих меньшей величине t (с. 72).

И наконец, легко видеть, что все граничные точки принадлежат замкнутому множеству; так как любая точка, не принадлежащая точечному множеству, принадлежит континууму, или, если многообразие расположено в точечных множествах в нескольких континуумах, то одному из этих континуумов.

Такой континуум, как только что описанный, назовём <u>незамкнутым</u> <u>континуумом;</u> мы думаем, что если мы добавим к нему все предельные точки, то получим структуру, которую вправе называть <u>замкнутым</u> <u>континуумом</u>. На самом деле тот континуум, что мы определили раньше, и есть замкнутое множество.

§ 7. Равномерная непрерывность (Gleichmäßige Stetigkeit)

Определим теперь функцию n переменных $u_1, u_2, ..., u_n$ для незамкнутого континуума, что не исключает того, что всё n-кратное многообразие образует континуум. Границы континуума мы, однако, использовали в случае функции одной переменной, где это определялось для всех значений от $-\infty$ до $+\infty$, или между a и b, и было неясно, имеет ли смысл функция в этих граничных точках. Если любой системе значений $(u_1, u_2, ... u_n)$ соответствует одно и только одно значение x функции, назовём её <u>однозначной</u> <u>функцией</u> переменных $u_1, u_2, ..., u_n$. Такое определение само по себе немного значит; оно станет плодотворным для анализа после введения понятия <u>непрерывности</u>. Понятие непрерывности определяется обычно так: Функция x от $(u_1, u_2, ... u_n)$ непрерывна в окрестности точки $a = (a_1, ..., a_n)$, если для сколь угодно малой положительной величины ε всегда можно определить такое δ, что $|x - b| < \varepsilon$, если

$|u_\lambda - a_\lambda| < \delta$ $(\lambda = 1, 2, ..., n)$, где b – это значение, которое x принимает в $(a_1, ..., a_n)$. Другими словами, мы можем охарактеризовать непрерывность как факт того, что после принятия ε можно определить такую окрестность ρ для определённого a, что $|x - b| < \varepsilon$, при $\sum_1^n (u_\lambda - a_\lambda)^2 < \rho^2$; оба этих определения согласуются друг с другом и не нуждаются в доработке [с. 73]. Наконец, правильное представление о бесконечно малом позволяет определить непрерывность функции в окрестности точки a так, что бесконечно малые изменения аргумента должны соответствовать бесконечно малым изменениям функции в окрестности точки a. Это определение легко можно распространить на случай, когда функция определена не только для тех точек континуума, определяемых как $(u_1, u_2, ... u_n)$, но и на всех точках вообще.

От непрерывности функции перейдём к другой непрерывности, которая является её частным случаем и нередко упускаемой из виду; я имею в виду понятие <u>равномерной непрерывности</u>. Функция называется равномерно непрерывной в определённом интервале $(a...b)$, если можно указать произвольно малое положительное ε, по которому определить такую величину δ, что выполняется неравенство $|f(u') - f(u)| < \varepsilon$, когда $|u' - u| < \delta$, для любого количества пар значений u и u' в интервале $(a...b)$. Как уже упоминалось, эта равномерная непрерывность есть следствие непрерывности вообще, и доказательство, предлагаемое нами для функции одной переменной, может без существенных изменений быть распространено на функции нескольких переменных. Это доказательство основано прежде всего на подробно обоснованной основной теореме из учения о величинах. Возьмём простое многообразие, которое получается, если переменная величина u принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, и разделим его на интервалы таким образом: возьмём положительное число n, и величину μ, которая пробегает все положительные и отрицательные целочисленные значения, и образуем интервалы $\left(\frac{\mu}{n} ... \frac{\mu+1}{n}\right)$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm \infty)$. Тогда каждое значение u будет принадлежать одному из интервалов, а именно, u должно принадлежать интервалу $\left(\frac{\mu}{n} ... \frac{\mu+1}{n}\right)$, когда $\frac{\mu}{n} \le u \le \frac{\mu+1}{n}$. Теперь придадим n и μ такие значения, чтобы u лежало в определённом интервале, для которых определена функция. Этому интервалу соответствуют значения $f(u)$, расположенные между верхним и нижним пределами g и g', так что $g - g'$ это <u>наибольшее изменение</u> (колебание) значений функции внутри этого интервала, и отсюда следует представление $|f(u') - f(u'')| < |g - g'|$, когда u' и u'' это две любых точки в интервале значений аргумента; и $|f(u')-f(u'')|$, где u' и u'' лежат в интервале $\left(\frac{\mu}{n}\dots\frac{\mu+1}{n}\right)$, является положительной переменной величиной с верхней границей $g-g'$ (с. 74). Рассмотрим совокупность интервалов $\left(\frac{\mu}{n}\dots\frac{\mu+1}{n}\right)$ $(\mu=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm\infty)$, и оставим только те из них, на которых функция вообще определена. Определим в каждом из интервалов наибольшее изменение (колебание) и выберем самое большое из них, которое обозначим $=g_n$. Очевидно, g_n имеет переменную величину. Неважно, что там может быть несколько μ, так как в интервале $\left(\frac{\mu}{n}\dots\frac{\mu+1}{n}\right)$ колебание достигает максимального значения g_n. Таких интервалов $\left(\frac{\mu}{n}\dots\frac{\mu+1}{n}\right)$ бесконечно много, так как n может принимать бесконечно много значений. Чтобы в этом убедиться, возьмём, например, в качестве n только значения простых чисел, тогда каждый интервал достоверно появится один раз, следовательно, так как количество простых чисел бесконечно велико, это в данном случае даст бесконечно много описанных выше интервалов. Сейчас такой интервал полностью определяется точкой $\frac{\mu}{n}$, и в силу основной теоремы учения о величинах должна быть хотя бы одна точка, в непосредственной близости к которой произвольно накапливаются определённые точки $\frac{\mu}{n}$. Если таких точек несколько, выберем одну из них и обозначим её u_0. Далее возьмём произвольно малый ε, и так как по предположению функция вблизи u_0 изменяется непрерывно, то мы можем определить величину δ так, что $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$, когда $|u-u_0|<\delta$. Рассмотрим теперь интервал $(u_0-\delta\dots u_0+\delta)$, в любой близости u_0 находится бесконечно много точек вида $\frac{\mu}{n}$, а отсюда следует, что как $\frac{\mu}{n}$, так и $\frac{\mu+1}{n}$ можно определить, чтобы $\left(\frac{\mu}{n}\dots\frac{\mu+1}{n}\right)$ лежал в пределах $(u_0-\delta\dots u_0+\delta)$. Это очевидно, нужно лишь выбрать n сколь угодно большим. Однако тогда в интервале $\left(\frac{\mu}{n}\dots\frac{\mu+1}{n}\right)$ разность между двумя значениями аргумента, один из которых $=u_0$, достоверно будет $<\delta$; следовательно, после того, как установлено, что $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$, и так как, когда u' и u'' это значения аргумента, соответствующие наименьшему и наибольшему значению $f(u)$ в интервале $\left(\frac{\mu}{n}\dots\frac{\mu+1}{n}\right)$, тогда получается $|f(u')-f(u'')|<2\varepsilon$, то есть $g_n<2\varepsilon$. Так как во всех остальных интервалах $\left(\frac{\mu'}{n} \dots \frac{\mu'+1}{n}\right)$ наибольшее значение колебания меньше или равно g_n, отсюда следует, что разница между двумя любыми значениями функции, соответствующими значениям аргументов из этих интервалов, будет меньше, чем произвольно малая принятая величина 2ε. Таким образом, теорема доказана, мы показали, что область переменной *u* можно разделить на такие интервалы, что в каждом из них разность между двумя любыми значениями функции будет меньше, чем назначенная произвольно малая величина. Таким образом, для того, чтобы $|f(u') - f(u'')| < \varepsilon$, при условии $|u' - u''| < \delta$, нужно выбрать такое *n*, чтобы $g_n < \frac{1}{2}\varepsilon$, выполнялось наше требование $\delta < \frac{1}{n}$ (с. 75). И даже если когда u' и u'' лежат в двух последовательных интервалах, что представляет собой единственный оставшийся случай, то есть если u' и u'' не лежат в одном интервале, всегда должно выполняться $|u' - u''| < \frac{1}{n}$, даже в этом случае по-прежнему $|f(u') - f(u'')| < 2\varepsilon$, и 2ε вместе с ε конечно может быть сделан сколь угодно малым.

Теорема доказана полностью, равномерная непрерывность была получена как частный случай общей непрерывности.

Важность этой теоремы состоит в том, что она распространяется дальше, на специальные функции, чья непрерывность установлена, но мы не будем доказывать их равномерную непрерывность, потому что это весьма утомительно (с. 76).

[Далее то же для функции нескольких переменных].

ПРИЛОЖЕНИЕ *C.*

Э. Гейне. «Лекции по теории функций»

Heine, E. Die Elemente der Functionenlehre//Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin; 1872, Bd LXXIV Heft 2. S. 172 –188. Журнал чистой и прикладной математики, Берлин, 1872, 74, с. 172–188. [333]. Выделения в тексте согласно оригинала.

Развитие теории функций происходит в основном за счёт элементарных фундаментальных теорем, хотя некоторые результаты проницательные исследователи ставят под сомнение, ибо результаты исследований не всегда обоснованы. Я объясняю это тем, что хотя принципы г-на Вейерштрасса изложены непосредственно в его лекциях и косвенных устных сообщениях, в рукописных копиях его лекций, и имеют весьма широкое распространение, но они не опубликованы в авторской редакции под контролем автора, что мешает целостному восприятию. Его утверждения основываются на неполном определении иррациональных чисел, в котором геометрическая интерпретация, а именно понимание линии как движения, часто приводит к заблуждению. Теоремы должны быть обоснованы с помощью нового понимания действительных иррациональных чисел, которые законно обоснованы и существуют, как бы мало они не отличались от рациональных чисел, и функция однозначно определена для каждого значения переменного, независимо от того, рационально оно или иррационально. С другой стороны, возможно, это напрасные возражения.

Не без колебаний публикую я эту работу, наиболее существенная первая часть которой «О числах» уже давно как закончена. Наряду с трудностью изложения такой темы, я не решался публиковать результаты, получившиеся в результате устного обмена мнениями, и содержащие прежние идеи других людей, прежде всего господина Вейерштрасса, мне остаётся всего лишь реализовать эти результаты; это нужно, дабы не оставлять неясных моментов в изложении. Отдельную благодарность я приношу г-ну Кантору из Галле за беседы, которые оказали значительное влияние на содержание моей работы, так как я позаимствовал у него идею общих чисел, посредством которых образуется ряд (A, § 1, определение 1). Мне кажется, в частности, это может быть применено в теории функций (B, § 2, лекция 1), благодаря первоначальному виду, по которому все числовые величины определённо содержатся в бесконечном количестве названного становления. Основание, на котором мы закономерно вводим наши числовые величины, найдены здесь г-ном Кантором, позволяет также ввести отношение «больше», «меньше» и «равно».

Я отвечаю на вопрос, что такое число, не останавливаясь на положительных рациональных числах, я буду понимать число концептуально, возможно, даже иррациональные числа в обычных пределах (в обычном их понимании), в обязательном предположении, что они существуют.

Я придерживаюсь формальной точки зрения[192] *и в то же время я воспринимаю числа как знаки,* чьё существование несомненно. *Особое внимание уделено основным арифметическим операциям*, которые должны быть определены так, чтобы иметь возможность оперировать с символами.

Арифметические операции, называемые правилами, над двумя двумя числами, связанными операционным знаком, следует изменить. Эти правила нужно установить так, чтобы результат обыкновенного вычисления над числами 0, 1, 2, 3 и т.д. был бы обычным. Невозможность вычитания во многих случаях привела к необходимости ввести новые знаки или символы: для каждого уже существовавшего символа «*a*» мы вводим символ «*не–a*» (*neg–a*), и расширяем определение операции. Это позволяет оперировать с новыми объектами, как с прежними. Представляется целесообразным ввести вычитание так, чтобы $neg(a) = 0 - a$. Невозможность осуществить деление двух символов *a* и *b,* если частное не является целым числом, даёт повод сначала связать пару *(a, b*), причём соединить так, чтобы вследствие этого получилось, что (*a,* 1) равно *a.* Расширение понятия умножения должно обеспечивать совпадение результата (*a, b*), подобно тому, как частное (*a*, 1) не отличается от *a*, и частное (*b,* 1) *не отличается от b.* Тогда для введённых чисел возможны операции сложения, вычитания, умножения и деления, однако последняя операция невозможна при знаменателе, равном нулю, и числителе, не равном нулю. Невозможность извлечения корня, а также выполнения трансцендентных операций привели к необходимости введения новых символов для действительных иррациональных и мнимых чисел. Первоначально правила для операций вводятся в разделе A. Для ограниченных вещественных чисел операции такие же, как и для комплексных, хотя вещественные числа, пока они не имеют сложного составного вида, обозначаются *a, b* и т.д. Вместо комплексных $a+b\sqrt{-1}$ равноценным будет замена на пару (*a*, b_i), для которой также разъясняется справедливость операции сложения, равно как и для $a+b_i$, а также умножения на $a+b\cdot 1_i$, и наконец, как следует из этого же утверждения, 1_i, корень из « –1» будет равен $a+b\sqrt{-1}$.

A. Обобщение чисел

§ 1. Числовая последовательность

---

[192] На протяжении многих лет в моих лекциях по алгебраическому анализу я направляю свои усилия на введения такого рода. – *Примечание Гейне*.

Определение 1. Назовём числовой последовательностью, последовательность[193], составленную из чисел a_1, a_2, a_3,…, a_n,…, если для каждого сколь угодно малого ненулевого числа η найдётся значение n, такое что $a_n - a_{n+\nu} < \eta$ для всех целых положительных ν.

Примечание 1. Слово «число» без дополнительных свойств, в разделе *A* означает рациональное число. При этом «ноль» считается рациональным числом.

Определение 2. Каждая числовая последовательность, члены которой a_n уменьшаются с увеличением индекса n, называется элементарной последовательностью[194].

Следствие. Элементы a элементарной числовой последовательности ограничены. Если последовательность не является элементарной, тогда все без исключения элементы имеют величину, отличную от нуля и зависящую от номера n.

Обозначение. Представляется целесообразным использовать греческие буквы только для обозначения членов элементарной последовательности. Таковыми будут η_1, η_2, и т. д. из элементарной последовательности.

Теорема 1. Пусть a_1, a_2, и т. д., а также b_1, b_2, и т. д. – члены числовой последовательности, тогда $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, и т. д., а также $a_1 - b_1, a_2 - b_2$, и т. д., и a_1b_1, a_2b_2, и т.д. – это тоже числовые последовательности.

Доказательство. Справедливо равенство $(a_n \pm b_n) - (a_{n+\nu} \pm b_{n+\nu}) = (a_n - a_{n+\nu}) \pm (b_n - b_{n+\nu})$, по верхнему знаку и точно также по нижнему знаку. Это выражение будет сколь угодно малым при увеличении n, где a и b таким образом образуют числовую последовательность, (§ 1, определение 1), что $a_n - a_{n+\nu}$ и $b_n - b_{n+\nu}$ при возрастающем n сколь угодно малы.

Это же верно и для $a_nb_n - a_{n+\nu}b_{n+\nu} = a_n(b_n - b_{n+\nu}) + b_{n+\nu}(a_n - a_{n+\nu})$, где a_n и $b_{n+\nu}$ не превосходят конечной величины (§ 1, следствие).

Теорема 2. В условиях первой теоремы и, кроме того, когда a не является элементарной последовательностью, то

$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$ является числовой последовательностью.

Доказательство.

$$\frac{b_m}{a_n} - \frac{b_{n+\nu}}{a_{n+\nu}} = \frac{b_na_{n+\nu} - a_nb_{n+\nu}}{a_na_{n+\nu}} = \frac{b_n(a_{n+\nu} - a_n) + a_n(b_n - b_{n+\nu})}{a_na_{n+\nu}}$$

Разность в числителе становится сколь угодно малой при возрастании n, а знаменатель не равен нулю (§ 1, следствие). Таким образом, и левая сторона с ростом n будет сколь угодно малой.

[193] Гейне рассматривает равномерно сходящиеся последовательности в смысле Коши.
[194] Гейне называет убывающие последовательности элементарными.

Определение 3. Будем называть числовые последовательности $a_1, a_2,\dots$ и b_1, b_2,.. равными тогда и только тогда, когда числовая последовательность $a_1 - b_1, a_2 - b_2,\dots$ будет элементарной последовательностью.

Теорема 3. Все элементарные последовательности равны друг другу и, обратно, не существует никаких других элементарных последовательностей, отличающихся от данных.

Доказательство. Пусть ε_n и η_n являются членами элементарных последовательностей. Тогда убывающая разность $\varepsilon_n - \eta_n$ при возрастающем n будет сколь угодной степени малости. Следовательно, $\varepsilon_1 - \eta_1, \varepsilon_2 - \eta_2,\dots$ есть элементарная последовательность, т. е. (§ 1, определение 3) и в самом деле последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\dots$ соответственно равна $\eta_1, \eta_2,\dots$

Не существует элементарной последовательности с n - м элементом a_n, для которого разность $a_n - \varepsilon_n$ с увеличением n будет оставаться большой[195] (§ 1, следствие).

§ 2. Введение более общего понятия числа либо цифры

Требование. Дополним каждую числовую последовательность символом.

Это будут такие последовательности, которые в квадратных скобках содержат *t*, ß таким образом, что, например, последовательность $a, b, c,\dots$ содержит символы $[a, b, c,\dots$и т.д.$]$[196].

Определение 1. Общим числом или числом называется символический ряд чисел, состоящий из символов.

Определение 2. Числа называются равными или взаимно-заменяемыми, если они равны; и неравными или невзаимозаменяемыми, если они имеют несовпадающие последовательности чисел (§ 1, определение 3).

Обозначение. Если $[a, b,\dots]$ и $[a', b',\dots]$ равны друг другу, мы будем обозначать это $[a, b,\dots] = [a', b',\dots]$ или $[a', b',\dots] = [a, b,\dots]$.

Сокращение. В число символов, обозначающих элементы ряда с помощью маленьких букв, помимо основных могут быть включены большие буквы, так что $[a_1, a_2,\dots]$ будем обозначать A; $[\eta_1, \eta_2,\dots]$ будем обозначать H.

Утверждение. Числовые последовательности, составленные из символов и содержащие только одинаковые элементы, являются рациональными числами.

Следствие 1. Как сказано (§ 2, обозначение), $[a_1, a_2,\dots] = A$, $[a, a, a,\dots] = a$.

Теорема 1. Каждая элементарная последовательность имеет своим символом (пределом) ноль.

195 Благодаря этому представлению будет обеспечиваться единственность предельного иррационального числа, называемого символом, к которому могут стремиться члены последовательностей, состоящих из рациональных чисел.

196 Таким образом, Гейне расширяет поле действительных чисел за счёт тех чисел, которые невозможно выразить конечной числовой записью, а также возможность многократного применения операции взятия предела.

Доказательство. Все элементарные последовательности равны между собой (§ 1, теорема 3). Таким образом, каждая элементарная последовательность имеет такой же символ (§ 2, определение 2), как и состоящая из знаков [0, 0, 0,…], так что (§ 2, требование 1) они равны нулю.

Пояснение. Принимаем в расчёт не числовую последовательность, а цифровую. Далее будут показаны арифметические действия (§ 3), над числовыми последовательностями, определённые таким образом, чтобы не противоречить действиям над достижимыми рациональными числами, у которых одинаковы все элементы $a_1, a_2, ...$; следовательно, числовая последовательность образовует рациональное число, что и доказывает утверждение.

Определение 3. Если $A > B$, тогда разность $a_n - b_n$ положительна для любого номера n, и если $A < B$, тогда разность $a_n - b_n$ отрицательна для любого номера n.

Пояснение. Отношение равенства исключает отношение «больше» или «меньше». Действительно, если $A = B$, то принадлежащие им элементы $a_n - b_n$ образуют элементарную последовательность; но ни для каких $A = B$ не найдётся таких $a_n - b_n$, чтобы они образовали элементарную последовательность, являющуюся к тому же абсолютно определённой (§ 1, следствие 1) и отличающуюся от нуля, так что либо $A>B$, либо $A<B$.

Следствие 2. Если $A>B$, тогда $B<A$.

Теорема 2. Символы двух последовательностей $b_1, b_2, b_3, \dots$ и $a_1, a_2, \dots, a_\rho$, b_μ, $b_{\mu+1}, b_{\mu+2}, \dots$. равны.

Доказательство. Две последовательности равны, так как элементы разности $a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_\rho - b_\rho, b_\mu - b_{\rho+1}, b_{\mu+1} - b_{\rho+1}, ...$ образуют элементарную последовательность (§ 2, определение 2; § 1, определение 3).

Следствие[197] 3. Число не изменится, если из образующей его последовательности отбросить любое конечное количество элементов.

§ 3. Операции над более общими числами

Определение 1. $A \pm B$ является тем же числом, что и соответствующая числовая последовательность (§ 1, теорема 1) $a_1 \pm b_1$, $a_2 \pm b_2$, … , равно как одно и то же число представляют AB и соответствующая числовая последовательность $a_1 b_1, a_2 b_2, ...$ Если не выполняется $A = 0$, (§ 1, теорема 2; § 2, теорема 1), тогда B/A соответствует ${}^{b_1}\!/_{a_1}, {}^{b_2}\!/_{a_2}, {}^{b_3}\!/_{a_3}, ...$

[197] Отсюда мы видим, что вполне достаточно иметь среди элементов такие, которые не являются его первыми элементами, достаточно принять только общий закон, что для последовательности $a_1, a_2, \dots$ принадлежащие к ней элементы могут быть выбраны из $[a_n]$. Это приводит к замене на обычное обозначение в скобках с точками (§4, пример): ${}^{1}\!/_{9}$ = [0,1;0,11;0,111,…] = 0,111… . Так принято во всём мире. –*Примечание Гейне*.

Следствие 1. Если $A \pm B = C$, или $AB = C$, или при A не равном нулю $C/A=B$, тогда соответственно выполняется

$$a_n \pm b_n + \eta_n = c_n$$

$$a_n\, b_n + \eta_n = c_n$$

$$c_n / a_n + \eta_n = b_n$$

И обратно, из трёх последних уравнений следуют первые.

Следствие 2. Справедливо $A \pm 0 = A$.

Следствие 3. Изменению знака $-a_1, -a_2, \dots$ соответствует $0 - A$.

Примечание. Принято писать $-A$ вместо $0 - A$, подразумевая присутствие всего выражения.

Определение 2. Численным или абсолютным значением элемента является значение, которое получается при замене символа на предельное числовое значение.

Теорема. Если $A \pm B = C$, или $AB = C$, или при A не равном нулю, тогда соответственно $A = C \mp B$ или $B = C/A$.

Доказательство. В первом случае (§ 3, следствие 1) $a_n \pm b_n + \eta_n = c_n \dots$, следовательно, $a_n + \eta_n = c_n \mp b_n$. Итак, имеем $[a_1 + \eta_1, a_2 + \eta_2, \dots] = [c_1 \mp b_1, c_2 \mp b_2, \dots]$. В левой части получается (§ 3, определение 1; § 2, теорема 1) $A + 0$ или A (§ 3, следствие 2), в правой части (§ 3, определение 1) получается $C \mp A$. Доказательство во втором случае аналогично.

§ 4. Отношение общих чисел к рациональным

Определение 1. Если для (рациональных) чисел $a_1, a_2, \dots$ некоторое (рациональное) число U имеет такое свойство, что $U - a_n$ уменьшается с ростом n, то тогда U называется пределом a.

Теорема 1. Если элементы данной числовой последовательности $a_1, a_2, \dots,$ имеют (рациональным) пределом U, тогда U тоже принадлежит последовательности чисел $a_1, a_2, \dots$

Доказательство. Очевидно, что члены последовательности $U - a_1$, $U - a_2$, $U - a_3, \dots$ образуют элементарную последовательность, пределом (§ 4, определение 1) которой является ноль(§ 2, теорема 1). В то же время (§ 3, определение1) также будет и с другой стороны

$= [U, U, U, \dots] - [a_1, a_2, a_3, \dots]$, что тоже (§ 2, утверждение) будет равно $U–A$.

Отсюда следует, что $U = [a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Пример. Дроби 0,1; 0,11; 0,111;….приближаются к рациональному числу 1/9, так что (см. примечание к § 2, следствие 3), 1/9 = [0,1; 0,11; 0,111;….].

Определение 2. Для чисел $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots,$ говорят, что они уменьшаются с ростом n при любых первоначальных значениях и приближаются к нулю, если существует число D, такое, что для всех положительных целых n существует численное значение $C_{n+\nu}$ (§ 3, определение 2), меньшее чем D (§ 2, определение 3).

Следствие. Если это верно для каждого D, тогда это верно и для каждого рационального числа d, так как рациональное число является частным случаем (§ 2, утверждение). Но также верно и обратное: если это верно для любого рационального числа, тогда это выполняется для любого числа D. Если это верно для данного для данного D, численное значение которого равно $[d_1, d_2,\ldots]$ и не равно нулю, то также верно, что для положительного рационального d может быть задано и d_n, близкое к нулю, которое будет меньше, чем число d_m для назначенного m. Теперь пусть значение $C_{n+\nu}$ будет меньше d, так что, если оно представляется через $[c_1, c_2,\ldots]$, то $d - c_m$ с увеличением m всегда остаётся положительным, и тогда для $d_m > d$ также положительным будет и $d_m - c_m$. *Этого достаточно, чтобы выполнялся критерий для рациональных чисел D*[198].

Определение 3. Если A есть данное число и с ростом n разность $A-B_n$ становится меньше любого заданного числа, тогда A есть предел B.

Теорема 2. Число A является пределом последовательности членов a, к которой оно принадлежит.

Доказательство. Нужно показать (§ 4, определение 3), что $A-a_n$ меньше любого назначенного числа (§ 4, следствие), или меньше любого рационального числа d. Пусть $A-a_n$ равно $[a_1 - a_n, a_2 - a_n, \ldots, a_n - a_n, a_{n+1} - a_n,\ldots]$ или (§ 2, теорема 2) равно $[a_{n+1} - a_n, a_{n+2} - a_n,\ldots]$. Выберем достаточно большое n, чтобы все члены последовательности оставались меньше d, таким образом, число не превосходит $[d, d,\ldots]$, и, следовательно, меньше d.

§ 5. Иррациональные числа произвольного порядка

Обозначение. Числа вообще, когда они в частных случаях становятся рациональными числами, будем называть иррациональными числами первого порядка. Как из рациональных чисел первого порядка A формируются иррациональные числа, так вновь из пределов иррациональных чисел можно получить числа второго порядка A', из них можно извлечь иррациональные числа третьего порядка A'', и т.д. Иррациональные числа $m + 1$ – го порядка будем обозначать $A^{(m)}$.

[198] Здесь, также как и в теореме 2 § 2 сформулирован принцип распространения локального свойства на всё множество, т. е. можно выбрать конечное число интервалов, покрывающих данный отрезок. Гейне оперирует с рациональными и иррациональными числами, и конечным числом интервалов-покрытий. В 1895 году Э. Борель распространил этот принцип на счётное число интервалов. В 1898 году А. Лебег усилил его для любого числа интервалов. Гейне использует этот принцип в доказательстве теоремы 6 § 3 о равномерной непрерывности функции на интервале. Этот принцип в литературе имеет различные названия: лемма (или теорема) Гейне-Бореля, лемма Бореля-Лебега. Гейне пользуется им при доказательстве пяти последних теорем.

Иррациональное число, лишённое порядка, становится рациональным. То, что иррациональные числа существуют, то есть не все величины $A^{(m)}$ могут быть рациональными числами, будет показано в разделе В (§ 3, следствие 2).

Теорема. Иррациональности m+2-го порядка не возникают заново, они согласуются с первым порядком.

Доказательство[199]. Пусть дано $A^{(m+1)} = \left[A_1^{(m)},\ A_2^{(m)},\ A_3^{(m)},...\right]$. Дальше возможно представить, что рациональные числа $a_1, a_2, a_3,\ldots$ соответственно расположены до чисел $A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, A_3^{(m)},...$ и они будут соответственно отличаться меньше чем на $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},....$ Пусть a_1, a_2, $a_3,\ldots$ определяют иррациональное число A первого порядка, так что $A^{(m+1)} - A$ будет элементарной последовательностью или нулём, т. е. это означает, что $A^{(m+1)} = A$.

В. О функциях

§ 1. Функции в целом

Определение. Однозначной функцией одной переменной x называется выражение, чётко определённое для любого рационального и иррационального x.

Пояснение. Значение функции для любого иррационального значения переменной не позволяет определять её так же, это зависит от специальной числовой последовательности, с помощью которой даётся иррациональная величина, *скорее всего, нужно придерживаться того же, что совпадает с определённой числовой последовательностью иррациональных величин, из которых выбирается x.*

Теорема 1. Любая целая степень x есть однозначная функция.

Доказательство. Предположим для определённости, что x принимает только одно значение, рациональное или иррациональное, из X – допустимого $[x_1, x_2,\ldots]$, и в то же время X равно величинам $[y_1, y_2,\ldots]$, таким образом (А, § 2, определение 2) последовательность $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2,\ldots$ будет элементарной последовательностью, обозначенной η_1, $\eta_2,\ldots$. Для m-кратного умножения элементов из X на самих себя (А, § 3, определение 1) получается соответственно $\left[x_1^m,\ x_2^m,...\right]$, $\left[y_1^m, y_2^m,...\right]$[200], их величины согласованы, и их разность $\left[(x_1+\eta_1)^m - x_1^m, (x_2+\eta_2)^m - x_2^m,....\right]$ образует элементарную последовательность.

Следствие. Все так называемые целые функции x являются [однозначными] функциями x.

[199] Предполагается, что иррациональность высшего порядка трактуется также, как прежде трактовалась иррациональность первого порядка. Я полагаю, что отношения будут очень похожи и их разработка без дополнительных усилий будет во многом повторением прежнего. – *Примечание Гейне.*

[200] В § 5 мы наметили возможность обобщённого понимания величин *x* и *y* не только как рациональных чисел; это можно распространить на все или частично на все иррациональные числа. В данном случае мы имеем дело с однозначной функцией, поэтому излишне каждый раз добавлять эти замечания. – *Примечание Гейне.*

Теорема 2. Sin *x* и cos *x* – это функции *x*.

Докажем это утверждение. В силу того, что, как известно, *sinx* раскладывается в степенную последовательность по степеням, поэтому необходимо, чтобы sin *x* был числом, которое соответствует числовой последовательности $x,\ x-\frac{x^3}{6},\ x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\ldots$. Каждый элемент, независимо от того, как далеко он расположен и как он сформирован, является целой функцией от *x* и имеет определённое значение. То, что члены числовой последовательности являются вполне определёнными, обусловлено разложением в ряд, а именно sin *x*.

Примечание. Нет иного способа вычислить $\sin x$ для иррациональной величины x, кроме как приближённо сходящегося вычисления, поэтому вычисляем посредством приближения $\sin x_1, \sin x_2, \ldots$ и т. д., где $x_1, x_2, \ldots$ и т. д. члены числовой последовательности, представляющей иррациональную величину.

До сих пор это делалось без проверки, потому что синус – это величина, у которой значения $\sin x_1, \sin x_2, \ldots$ тесно примыкают друг к другу (сравни с В, § 2, пояснение). Подобно тому, как каждое иррациональное число имеет вполне определённое значение, то же верно и для синуса любого числа, только это до сих пор не доказано. Также имеет смысл и *сумма ряда Фурье* разложения конечной функции, в том числе и в точках *разрыва*. Возражение, что невозможно произвести вычисления в тех точках, где абсциссы разъединены значением π и представляют собой иррациональные числа, имеет силу только до тех пор, пока мы не урегулируем право иррациональностей на самостоятельное существование[201].

(Для численного расчёта суммы при сколь угодно больших значениях до и после разрыва можно использовать способ уменьшения количества *n* средних значений. Приближение к среднему значению может достигаться путём увеличения числа *n*, когда для критических иррациональных абсцисс установлены рациональные значения, достаточно близкие к истинным).

§ 2. Условия непрерывности

Определение 1[202]. Функция *f(x) при любом определённом значении x = X называется непрерывной*, если для любого сколь угодно малого заданного числа ε и любого положительного числа η_0 выполняется условие, что для любой положительной величины η, меньшей, чем η_0, численное значение $f(X\pm\eta)-f(X)$ не превосходит ε.

Следствие 1. Два числовых значения функции аргумента *x*, которые лежат между $X-\eta$ и $X+\eta$, могут отличаться не более чем на 2ε.

---

[201] Отсюда берёт начало принцип пренебрежения некоторым множеством точек, или принцип установления степени общности, впервые сформулированный Гейне и широко используемый в теории множеств и теории меры XX века.

[202] В такой форме определение непрерывной функции сформулировал Н. Абель в 1826 году, не оговорив знак приращения аргумента.

Пояснение. Функция представляет собой агрегат[203] отдельных величин (A, § 1, определение), расположенных друг относительно друга так же, как и значения в окрестности, образованной непрерывным образом.

Теорема[204] 1. Если функция *f(x)* в точке $x = X$ непрерывна, то для любой последовательности x_1, x_2,…, которая обозначена символом X, можно образовать числовую последовательность $f(x_1)$, $f(x_2)$,… обозначаемую как последовательность $f(X)$; и обратно, если для любой последовательности x_1, x_2,…, которая обозначена символом X, формируется последовательность $f(x_1)$, $f(x_2)$,… обозначенная символом $f(X)$, тогда *f(x)* при $x = X$ непрерывна[205].

Доказательство.

Первое. Каждая последовательность x_1, x_2,... может быть представлена заменой на элементарную последовательность $X + \eta_1$, $X + \eta_2$,… . Так как это непрерывные функции, то для любого заданного числа ε (B, § 2, определение 1) члены последовательности η_1, η_2,… убывают до η_0, так что, несомненно, для величины *n* разность $f(X + \eta_n) - f(X)$, т.е. $f(x_n) - f(X)$ не будет превосходить ε. Так как ε можно взять сколь угодно малым, эта разность является общим членом элементарной последовательности $f(x_1) - f(X)$, $f(x_2) - f(X)$,…, числовые значения которой стремятся к нулю. С другой стороны, это также (*A*, § 3, определение 1) равно $[f(x_1), f(x_2),...] - f(X)$, что и доказывает первое предложение, то есть равенство $f(X)= [f(x_1), f(x_2),…]$.

Второе. Теперь пусть для функции выполняется вышеупомянутое условие, а именно, что для каждой без исключения последовательности X чисел x_1, x_2,.., члены последовательности $f(x_1) - f(X)$, $f(x_2) - f(X)$,... могут быть сколь угодно малы, и отсюда следует её непрерывность. Действительно, если мы фиксируем число ε, (B, § 2, определение 1), и возьмём также малое η_0, условие непрерывности не будет выполнено, так как всегда существует число η меньшее η_0, для которого $f(X + \eta) - f(X)$ остаётся больше ε; это должно выполняться для любой величины η_0 , для такого значения η (меньшего, чем η_0), чтобы разность была не меньше чем ε, и была бы равной η'. Для любого числа η, вдвое меньшего чем η_0, разность при $\eta = \eta''$ не может быть меньше, чем ε, и для любого η_0 равна половине от неё (т. е. четверти), потом можно взять $\eta = \eta'''$ и т.д. Для числа η_0 формируется элементарная последовательность, состоящая из уменьшающихся членов $\eta', \eta'', \eta''',...$ убывающая, так что $X + \eta', X + \eta'',...$ – числовая

[203] Aggregat, совокупность – термин, применяемый Вейерштрассом с 1861 года. Впервые встречается у Ньютона.
[204] Предложение о том, что функция тогда и только тогда непрерывна, когда $f(X)$-$f(x_n)$ сколь угодно мало для любого числа из последовательности X, с доказательством, я позаимствовал у г-на Кантора. В то время как я здесь рассматриваю функции одной переменной, г-н Кантор рассматривал общие функции нескольких переменных, и он показал непрерывность этих функций, которые в другом месте (в этом же журнале, т. 71, стр. 361) я назвал равномерными, если они удовлетворяют определенным условиям в каждой точке. Общий ход доказательства некоторых предложений изложен в § 3 в соответствии с принципами господина Вейерштрасса, известных мне из устных бесед с господами Вейерштрассом, Шварцем и Кантором, так что в результате осуществления этих свидетельств мне принадлежат лишь детали. – *Примечание Гейне*.
[205] Эту теорему называют определением непрерывности по Гейне. Современная её формулировка такова: две непрерывных функции, совпадающие на плотном множестве, идентичны. Для Гейне плотным множеством является множество рациональных чисел.

последовательность x_1, x_2,.. представимая числом X, но однако без выполнения того, чтобы $f(x_1) - f(X)$, $f(x_2) - f(X)$,... было бы меньше чем ε, что противоречит предположению.

Теорема 2. Каждая непрерывная функция $f(x)$ определена для любого данного x, если она определена для каждого из рациональных значений переменных[206].

Доказательство. Пусть X – иррациональное число из заданной последовательности x_1, x_2, x_3,...; пусть далее y_1, y_2, y_3... – рациональные числа, такие, что для x_1, x_2, x_3... отличаются меньше чем на 1,1/2,1/3,….Так как каждый x для одноимённого y соответственно отличается на элементарную последовательность (A, § 2, определение 2), то тогда X равен $[y_1, y_2,...]$, и также (B, § 2, теорема 1) $f(X) = [f(y_1), f(y_2),\ldots]$.

Теорема 3. Каждая целая степень x при каждом значении $x = X$ непрерывна.

Доказательство. Вновь пусть $X = [x_1, x_2,\ldots]$, из чего следует (A, § 3, определение 1), что $X^m = \left[x_1^m, x_2^m, \ldots\right]$. Однако (B, § 2, теорема 1) это и есть условие непрерывности всякой функции $f(x) = x^m$ из X.

Следствие 2. Каждая целая функция одной переменной непрерывна.

Теорема 4. Синус одной переменной – непрерывная функция.

Доказательство. Можно показать, что $\sin x_1$, $\sin x_2$,... образуют числовую последовательность, и во-вторых, что то же самое, это $\sin X$. Отсюда следует, что $\sin X - \sin x_1$, $\sin X - \sin x_2$,… – это элементарная последовательность. В самом деле, $\sin X - \sin x_n$, или $\left[X - x_n, X - x_n - \dfrac{X^3 - x_n^3}{6}, \ldots\right]$ при возрастающем n произвольно уменьшается.

§ 3. Свойства непрерывных функций

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* от $x = a$ до $x = b$, если она непрерывна для каждого значения аргумента, заключённого между a и b (B, § 2, определение 1) с включением значений a и b ; она называется *равномерно непрерывной (gleichmässig continuirlich)* от $x = a$ до $x = b$, если для любого сколь угодно малого ε найдётся такое значение η_0, что для любого положительного числа η, меньшего η_0 , $f(x\pm\eta) - f(x)$ не превосходит ε. Какую бы величину x мы ни взяли, при условии, что x и $x\pm\eta$ принадлежат области между a и b, будет *обязательно* выполняться *то же самое* требование[207].

Теорема 1. Каждая целая степень x в указанных пределах равномерно непрерывна.

Доказательство. Так как $(x\pm\eta)^m - x^m$ в любом случае не превосходит произведения множителя η на фиксированную величину, то эта разность остаётся для любого x сколь угодно малой при любой произвольно малой η_0 .

[206] Сейчас требование для функции быть определённой на рациональном множестве заменено требованием быть определённой на плотном множестве.
[207] Здесь впервые даётся определение равномерной непрерывности.

Следствие 1. Каждая целая функция в произвольной области равномерно непрерывна.

Теорема 2[208]. Если (для каждого x) от a до b дана такая непрерывная функция, что между двумя значениями a и b имеются $x = x_1$ и $x = x_2$, где функция имеет противоположные знаки, то она примет нулевое значение для некоторого промежуточного x.

Доказательство[209]. Пусть $x_2–x_1 = \delta$ и $f(x_1)$ положительна. Составим величины $x_3 = x_2 - \frac{\delta}{2}, x_4 = x_3 \pm \frac{\delta}{4}, x_5 = x_4 \pm \frac{\delta}{8}, ...,$ и в общем $x_{n+1} = x_n \pm \frac{\delta}{2^{n-1}}$, при вычислении x_{n+1} после x_n получаем положительный или отрицательный знак в зависимости от того, была ли $f(x_n)$ положительна или отрицательна; значение функции $f(x_n)$ для какого-нибудь n будет нулевым, так что не потребуется никакого дополнительного доказательства.

Числа $x_1, x_2,…$образуют числовую последовательность, т. к. (A, § 1, определение 1) разность $x_{n+\nu} - x_n$, как следует из приведённых равенств, где выполнялось основное элементарное вычисление, даже в самом неблагоприятном случае, а именно, когда значения функции в точках $x_{n-1}, x_n, ..., x_{n+\nu-1}$ имеют одинаковый знак, эта разность $x_{n+\nu} - x_n$ с ростом n будет сколь угодно малой. Число[210] этой числовой последовательности есть X, я утверждаю, что $f(X)$ равно нулю.

Если бы это было не равно нулю, то приняло бы значение, равное 4ε. Теперь подберём такое значение η_0, чтобы $f(X \pm \eta) - f(X) < \varepsilon$ (B § 2, определение 1), и выберем n настолько большим, чтобы $x_n, x_{n+1},…$ отличались бы меньше, чем на η_0, так что $f(X)$ из $f(x_n), f(x_{n+1}),...$ будут отличаться менее чем на ε. Тогда разность $f(x_n) - f(x_{n+\nu})$ будет меньше, чем 2ε. Придавая теперь ν настолько большое значение, чтобы $f(x_n)$ и $f(x_{n+\nu})$ имели бы противоположные знаки (то, что это всегда может быть достигнуто, будет показано ниже), видим, что $f(x_n)$ даже меньше, чем 2ε, следовательно, $f(X)$ меньше, чем 3ε, а значит, не равно 4ε.

Если, однако, при достаточно большом n возьмём такое число ν, что $f(x_{n+\nu})$ сохраняет тот же знак, что и в (точке) x_n, в последовательности найдётся такое число x_m с меньшим номером, для которого знак функции $f(x)$ сохраняется для $x_m, x_{m+1},…$ и больше не изменяется. Так как $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют противоположные знаки, следовательно, m по крайней мере равно 2; и следовательно, $f(x_{m-1})$ и $f(x_m)$ имеют разные знаки. Определим α как положительную или отрицательную единицу, в зависимости от того, положительна или отрицательна $f(x_{m-1})$, в соответствии с этими требованиями, тогда по предположению, будет

[208] Теорема Больцано - Коши.

[209] Представляется целесообразным исключить при доказательстве геометрические представления ради краткости. – *Примечание Гейне*.

[210] То есть предел последовательности.

$x_m = x_{m-1} + \alpha\delta 2^{2-m}$, $x_{m+1} = x_m - \alpha\delta 2^{1-m}$, $x_{m+2} = x_{m+1} - \alpha\delta 2^{-m}$,.... и таким образом $x_{m+\mu} - x_{m-1} = \alpha\delta 2^{2-m}\left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{\mu}}\right)$.

С увеличением μ эта разность уменьшается справа, и характер её с любой степенью малости таков, что числовая последовательность X создаёт сверху над x_{m-1} ограничивающую числовую последовательность. Общий член последовательности x_n становится произвольно близким к x_{m-1} и при этом данная целая величина $f(x_{m-1})$ для числа α является противоположной. Вследствие этого непрерывность функции *f(x)* невозможна.

Заключение 2. Как только α – целое положительное неквадратное число, уравнение $x^2 - \alpha = 0$ не имеет целого решения, т.е. не имеет рациональных корней. Но, однако, левая сторона уравнения для некоторых различных значений *x* имеет противоположные знаки, так что уравнение имеет иррациональные корни. Это доказательство того, что не все числа сводятся к рациональным, но есть ещё и иррациональные числа (A, § 5).

Теорема 3. Функция $f(x)$, определённая от $x = a$ до $x = b$ так, что для двух близко расположенных чисел x_1 и x_2, из убывающей последовательности $f(x)$ имеет различные знаки, является разрывной функцией.

Доказательство. Если она непрерывна, то найдётся число ξ из *x*, равное 2ε. Следовательно, найдётся величина η_0 , такая, что $f(\xi \pm \eta) - f(\xi) < \varepsilon$ для всех η, не превышающих η_0. Между $x = \xi$ и $x = \xi + \eta_0$ функция $f(x)$ соответственно имеет разные знаки, следовательно, для каждого $x = \xi + \eta$ будет исчезающее мала (B, § 3, теорема 2), так что $f(\xi)$ отличается от нуля не более, чем на 2ε.

Теорема 4. Если для всех значений от $x = a$ до $x = b$ непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна, и в границах от $x = a$ до $x = b$ становится меньше любой указанной величины, то она *достигает* значения нуля.

Доказательство. Так как $f(x)$ для любого *x* также имеет определённое значение, это может быть только для таких *x*, которые меньше любого указанного числа, когда его величина убывает. Пусть теперь x_1 *и* x_2 – два различных числа, для которых $f(x)$ сколь угодно мало; мы сохраняем этот термин из доказательства второй теоремы, так что числа x_3, x_4, и т. п. образуются по рекуррентным формулам указанным выше способом, в которых выбор знака ещё не определён, и принимают близкие значения в $x = x_3$, или $x = x_4$, .., $x = x_n$; в этих точках $f(x)$ может быть сколь угодно малым. В таком случае она в этих точках обращается в ноль, как это было видно с самого начала доказательства, и утверждение будет доказано. Осталось только показать, что если функция в точках x_3, x_4,… обращается в ноль, то сколько может быть таких значений.

Числа x, для которых $f(x)$ становится сколь угодно малой, являются или все большими, чем x_3, или все меньшими, чем x_3; или некоторые из них меньшими, а некоторые большими. В первом случае мы формируем x_4 из x_3 с помощью положительного знака, во втором – с помощью отрицательного, в третьем случае мы установим его произвольно, пусть это будет положительный. Подобным же образом сформируем x_5 из x_4, и так далее, так что последовательность $x_1, x_2, \ldots$, образована из чисел X, так что $f(x)$ равно нулю.

Если она отличается от нуля на 3ε, тогда, очевидно, в силу второй теоремы для η_0 выберем n настолько большим, чтобы $x_n, x_{n+1}, \ldots$ отличалось от X не более чем на η_0. Тогда существуют значения x_n и $x_{n+1}, \ldots$, между которыми лежит число x, для которого $f(x)$ будет, например, < ε, так что можно $f(X)$*, которая от всех чисел* (для любого значения) $f(x)$, где $X - \eta_0 < x < X + \eta_0$, *отличается* менее чем на ε, в крайнем случае на 2ε, и уж ни в коем случае ни на 3ε. Но если бы ν было бы настолько велико, что x_n будет оказываться каждый раз больше или каждый раз меньше чисел $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$, так что x_m , последний из этих созданных x, которые соответственно или меньше или больше, как это упоминалось выше; $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ будут тогда соответственно больше или меньше, чем x_m, и образуют возрастающую или убывающую последовательность членов, которая всегда остаётся меньше или больше x_{m-1}. Подобно такому же случаю второй теоремы получим $X = x_{m-1}$. Пока $f(X) = f(x_{m-1})$ сохраняет значение, ограниченное 3*ε*, следовательно, $f(x)$ должна оставаться сколь угодно малой для x, лежащих сколь угодно близко к x_{m-1}, а именно между $X = x_{m-1}$ и x_n при достаточно большом n. Однако это в силу непрерывности $f(x)$ невозможно.

Следствие 3. Если (для всех отдельных промежуточных значений) от $x = a$ до $x = b$ непрерывная функция не всюду равна постоянной величине, она достигает при некотором определённом значении x максимума и минимума[211].

Теорема[212] 5. Если (для всех отдельных промежуточных значений) от $x = a$ до $x = b$ непрерывная функция $f(x)$ одной переменной, лежащей между a и любым рациональным или иррациональным числом X , так что $a < X < b$, в точках, близких к X принимает неположительные значения, но после X положительна, тогда $f(X) = 0$.

Доказательство. Пусть x_1, $x_2, \ldots$ – числовая последовательность для X, все без исключения её члены меньше X. Тогда $f(X) = [f(x_1), f(x_2), \ldots]$ не является положительной, но и отрицательной вследствие непрерывности $f(x)$ она не может быть по построению, так как эту последовательность определили как имеющую нулевое и различные отрицательные значения;

[211] Теорема Вейерштрасса.
[212] Здесь Гейне впервые приближается к понятию одностороннего предела, введённому позже Улиссом Дини. Ранее подобную идею высказывал Дирихле.

продолжение $f(x)$ принимает наименьшее значение при x, большем X, по предположению, положительное. Следовательно, остаётся $f(X) = 0$.

Теорема[213] 6. Если для всех отдельных промежуточных значений от $x = a$ до $x = b$ функция $f(x)$ одной переменной непрерывна, то она равномерно непрерывна (B, § 3, определение 1).

Доказательство. Выберем 3ε произвольно большим, так что найдётся такое число, что для $x = a$ будет выполняться условие, что разность $f(x) - f(a)$ по абсолютной величине $\leq 3\varepsilon$. Значение, при котором это достигается, есть наибольшее, и в то же время $f(x) - f(a) - 3\varepsilon = 0$ (B, § 3, теорема 5). Это значение x_1. Точно также можно найти x_2 как наибольшее; это означает, что от $x = x_1$ до $x = x_2$ всегда остаётся $f(x) - f(x_1) \leq 3\varepsilon$. Так можно продолжить: придадим какому-то конечному числу n такое значение, чтобы выполнилось равенство $x_n = b$, или найдём, чтобы разность $f(x) - f(x_{n-1})$ от $x = x_{n-1}$ до $x = b$ не превышала 3ε. Итак, утверждение доказано.

По-прежнему остаётся справедливым, что не существует такого n, при котором величины $x_1, x_2, \ldots$ образуют бесконечно возрастающую последовательность, не превосходящую b. Этот ряд представляет собой числовую последовательность с элементами X; заслуживают внимания их свойства, в силу которых для каждого n выполняется равенство $f(x_{n+1}) - f(x_n) = 3\varepsilon$. Подберём теперь такое η_0, чтобы $f(X)$ отличалось от $f(X - \eta)$ меньше, чем на ε, при $\eta < \eta_0$. Между числами $X - \eta_0$ и X можно расположить последовательность $x_n, x_{n+1}, \ldots$, так что (B, § 2, следствие 1) $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ будет меньше, чем 2ε, в то время как другая часть должна быть 3ε. Следовательно, основное предположение невозможно, и функция равномерно непрерывна.

Галле, октябрь 1872 года.

[213] Теорема Гейне-Кантора.

ПРИЛОЖЕНИЕ *D.* Улисс Дини.
«Основания теории функций действительного переменного»

U. Dini . Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali (Pisa, 1878). Курсив У. Дини [228].

Последние 12–13 лет ознаменовали для меня период сомнений в том, что никакие фундаментальные принципы анализа не представляются изложенными в полной строгости и обоснованности в собственно математическом смысле. В то же время новая математическая жизнь, разнообразные исследования вносят надежду во всеобщие сомнения в разрешении этих принципиальных трудностей, которые пребывают лишь в моём воображении; когда некоторые мемуары Шварца и Гейне были опубликованы в период с 1870 по 1871, стало понятно, что эти люди уже опытны в науке и заслуживают глубокого уважения, сомнения свойственны и большим учёным; и круг немецкой науки выглядит установившимся на основе твёрдых принципов Алгебры и Анализа бесконечно малых.

Несмотря на то, что я начал свои мемуар с жалоб и некоторой неуверенности, это означает моё страстное намерение развеять сомнения, которые возможно обуревают только меня. Надеюсь, что эти сомнения позволят мне, профессору высшего Анализа Королевского университета Пизы, создать исследование более специального Анализа, подобное исследованию Шварца; обращаюсь к нему с публичным выражением благодарности и с просьбой сообщать новые результаты методов Вейерштрасса и других немецких математиков, их учеников и последователей в этом.

Опираясь на известия, полученные мною от Шварца, на два прекраснейших труда Ганкеля (Hankel) о пределах и о колеблющихся (oscillante) функциях, а также Дедекинда, Кантора и Гейне о неизмеримых числах, я решил взять в качестве источника одну часть моих университетских лекций 1871/72 учебного года, изложенных в научных принципах строгости, следуя направлению, содержащему некоторые замечания и указания, полученные от Шварца; а в следующем году решил опубликовать эти лекции, уже по большей части подготовленные для печати.

Закончив по этой причине лишь в 1873 году с колоссальным трудом (редактированием) в ином жанре, я должен признать, что это замедлило указанное издание, и только в июле 1875, несмотря на то, что было ещё множество других безотлагательных забот, издание было начато, потом прервалось на полдороге в 1876, после этого я подготовил 9 первых глав, чтобы дополнить их некоторыми лекциями этого года.

Вернувшись затем вновь к научной жизни в начале 1877 года, я приостановил публикацию, чтобы переписать некоторые фрагменты. Это было вызвано тем, что за это время появились новые труды, среди которых работы Дю Буа Реймона, Томе, Дарбу, где изложены их различные методы и результаты, которые уже теперь опубликованы или приготовлены к публикации; таким образом, в моём авторстве утрачена немалая часть. Ибо я делал воистину собственный курс инфинитезимального анализа, но будучи внештатным преподавателем, я на каждом шагу сомневался; но указанные исследования расширили мои взгляды, я использовал эти новые исследования, добавив свои личные результаты; в своём опусе я бы хотел начать с вопросов, в нём заключённых, поэтому вы найдёте здесь и повторения, и разные аспекты одних и тех же вопросов.

Добавим сюда, что имея желание продолжить свои скромные изыскания, я допускаю, что издание книги даже с основным исследованием вполне своевременно для таких вопросов, как кратные интегралы, для функций двух или более переменных в целом, и для тех, которые удовлетворяют уравнению $\Delta^2 = 0$, свойство эвольвенты функции в тригонометрическом ряде, для рядов сферических функций и так далее; я заимствовал многое из книг, получив замечательные результаты, и вновь приступил к публикации на основании достигнутого, не мешкая, и поэтому я решил посвятить всё издание строгому и полному курсу инфинитезимального анализа, который, как я чувствую, в этом нуждается, и я хочу пока сосредоточить усилия на улучшении пользы, без чего наше издание лишено смысла. Эти открытия, однако, частично опубликованы в книгах многих моих друзей, и многих молодых людей, которые уже были моими студентами, это обязывает меня продолжить публикацию, используя новые полученные сведения и в то же время после того, как уменьшен раздел основ определенных интегралов. Так я и сделал, отложив возобновление оставшейся части этой работы на подходящее время, после того как будет опубликован полный курс исчисления бесконечно малых, первый проект которого уже был написан по моим лекциям этого года, а потому я прошу снисхождения к различным дефектам этого курса, предлагая его вниманию публики.

А теперь короткий обзор содержания книги.

В первой главе изложена теория неизмеримых чисел, главным образом по Дедекинду, в некоторой степени дополненная Шварцем, во второй главе – теория числовых или точечных множеств (Punkt-menge), введённая в науку Кантором. В третьей главе я предлагаю понятие предела и теорем, которые ему соответствуют; это изложение, мне кажется, оправдано, ибо этот способ сохраняет все методы и в то же время ярко освещает обозначенные научные проблемы; это недорогая плата за те результаты, которых мы ранее не могли бы иметь.

В четвёртой главе рассматривается общее понятие функции одной переменной в интервале, в пятой главе даны общие свойства конечных и непрерывных функций, для чего я использую теорему Кантора о равномерной непрерывности в § 41, доказательство которой сообщил мне Шварц. В шестой главе рассмотрены разрывные функции с бесконечным числом разрывов (линейно разрывные функции Ганкеля), а в двух следующих главах некоторые общие исследования о рядах, и, на мой взгляд, неполные сведения о производных.

В 9 главе изложен принцип сгущения особенностей, данный Ганкелем, как мне кажется, в довольно строгом изложении, в 10 главе я определяю общий класс аналитически достаточно простых функций, нигде не имеющих определённую конечную производную, один из частных случаев такой функции приведен Дюбуа-Реймоном в 79 томе журнала Борхардта. Последняя функция, которую я рассматриваю в этой главе (§ 129), от α и x, когда они рассматриваются как радиус-вектор и полярный угол точки на плоскости, есть важный пример функции двух переменных α и x, являющейся конечной и непрерывной на всей плоскости; показано, что в круге радиуса $1+\frac{3}{2}\pi$ имеются конечные и непрерывные частные производные по переменной α, но нет конечной частной производной по x . Тогда легко найти функции нескольких переменных, которые имеют аналогичную особенность.

В 10 главе я привожу некоторые общие рассуждения по конечным и непрерывным функциям в связи с существованием производных; эти рассуждения приведены с целью дополнить материал 7 главы, где они приведены первоначально, уже будучи в печати. Хотя я не придаю большого значения этим результатам, потому что убеждён, что большинство исследований по функциям носят настолько общий характер, что они не зависят от возможного аналитического вида самих функций, которые возникают только с учётом их некоторых общих свойств, т. е. изучается всегда конечная и непрерывная в промежутке функция, с учётом некоторого набора частных сведений, и это бросание в крайности проливает много света и позволяет сделать такие выводы, которые вам было бы трудно сделать в общем случае.

В конце этой длинной главы я изложил определённые интегралы, пользуясь тем, что было получено в предыдущей главе, и я пришёл к такой общности результатов, которые не ожидал получить сначала, и вижу, что здесь много новых результатов и методов доказательств, надеюсь, что эту главу найдут интересной.

Из этих результатов можно получить многое и для кратных интегралов, и вообще расширить их на случай функции многих переменных, рассматриваемых в конечномерных или бесконечномерных областях, это относится также и к результатам из главы 4 и следующей за ней, посвящённых функции одной переменной.

Тем не менее, для широкой публики эти методы не представят большого труда, в заголовке главы я указал определённые интегралы, хотя должен признать, что они изложены неполно. Я буду рад, если, несмотря на замечания, мои недавние результаты будут полезны упрочению основы фундаментальных принципов анализа; эти наблюдения и результаты ранее были известны только в ограниченном кругу учёных.

Пиза, 10 июля 1878 года.

Неизмеримые числа

§ 1. Прежде чем приступить к изучению функции действительной переменной, полезно определить понятие иррационального или неизмеримого числа, а также предела. Исходя из происхождения иррациональных чисел, заметим, что они появились как арифметические квадратные корни, и обнаружилась невозможность тех операций, которые можно выполнять над целыми числами и дробями. В огромном числе случаев перед этой невозможностью останавливались, но (подобно тому, как дроби стали считать арифметическими числами) нужно вернуться к простой концепции целого и разобраться, чтобы убедиться в том, что эта невозможность может быть преодолена, она обусловлена не фактической неспособностью, а ограниченным понятием числа. Эта концепция по-прежнему открыта для расширения, путём которого в арифметику могут быть введены новые числа, реальные, по крайней мере в общем. С этим трудности в извлечении корней исчезают, как и с другими арифметическими действиями (соответственно расширяется при необходимости и их значение), при этом сохраняются их основные свойства.

Таким образом, вы видите, что даже с дробными числами понятие числа не достигает общности. Но оно может быть удобно расширено с привлечением геометрии в помощь арифметики, так как именно в геометрии видно, что используя лишь целые и дробные числа, невозможно измерить огромное число линий (отрезков) с помощью заданной единицы измерения. Это подводит нас к тому, что число есть ничто иное, как результат измерения определённой длины, и его понятие необходимо расширить, и ввести в арифметику новые числа.

А геометрия открывает нам, каким образом может быть сделано введение этих арифметических чисел.

Представим себе прямую, неподвижную точку 0 и единицу меры, и отметим на прямой вправо и влево точки, расстояния которых от 0 по отношению к единицам измерения выражаются рациональными числами (целыми или дробными, положительными или отрицательными). Как бы много точек мы ни поставили, всегда останется множество других точек $m, m', m'', \ldots$, которые будут как угодно близки. Отмечая растущее количество точек деления соответствующих рациональных чисел, однако они никогда не могут быть достигнуты, как например, точка, соответствующая концу диагонали такого квадрата, который имеет площадь, равную стороне, длина которой выражается рациональным числом. Когда расстояния

$0m, 0m', \ldots$ не могут представляться рациональными числами, но желательно их численно выразить, будет важно ввести новые числа. Когда это будет сделано, они, как и все другие расстояния (новые или старые), будут выражены числами от 0 и диапазон чисел будет значительно расширен. Теперь пусть $0m$ – это расстояние, соответствующее одному из новых чисел. Очевидно, что все расстояния, соответствующие *рациональным* числам, можно разделить на два класса, какие-то меньше $0m$, а какие-то больше $0m$, и что замечательно, увеличивая числа первого класса и уменьшая числа второго класса, мы будем получать расстояния, приближающиеся к $0m$, выраженные рациональными числами. Понятно, однако, что первые меньше вторых и меньше $0m$, и наоборот, поэтому $0m$ можно рассматривать как число, соответствующее данной величине, для которой величины двух классов сближаются и отличаются соответственно меньше и больше. Но они никогда не достигают его как числа, соответствующего величине $0m$, через которую проходит граница между двумя классами количеств, о которых мы уже говорили, в разложении переменных, соответствующих рациональным числам.

§ 2. Предлагаем теперь арифметическую концепцию того же расширения понятия числа, независимую от геометрии, в отличие от арифметики имевшую прекрасную наглядность. Представьте себе разложение рациональных чисел на два класса

A_1 и A_2 такие, что числа первого класса меньше, чем второго, но самое большое из чисел первого класса совпадает с одним из первых чисел второго класса. Следовательно, каждое рациональное число можно отнести к одному или к обоим классам[214]. Тогда вы можете ввести два новых класса рациональных чисел в порядке возрастания в первом и в порядке убывания во втором, приближающихся к рациональному числу a. И наконец, расширение этого может быть достигнуто в процессе, намеченном в поле рациональных чисел; тот самый рубеж, который обозначает границу между числами двух классов, но может и не быть достигнут, то есть может не быть найдено число, обозначающее границу между числами двух классов, хотя числа этих классов могут оказаться произвольно близко друг к другу.

Теперь второй случай, когда числа соответствуют соизмеримым величинам; для них допустима делимость до бесконечности (как для расстояний, рассчитываемых на прямой). Два класса чисел A_1 и A_2 в большом числе случаев (например, как вы видели выше, для некоторых участков линий), обладают тем свойством, что значения, соответствующие этим числам и затем рассматриваемые в порядке увеличения в первом классе и в порядке уменьшения во втором классе, неопределённо приближаются друг к другу. Они представляют единственную величину,

[214] Это можно показать на таком примере: можно разбить рациональные числа на два класса, так, что в первый класс войдут рациональные числа, квадраты которых меньше заданного рационального числа d, а во второй войдут такие числа, квадраты которых больше, чем d. – *Примечание Дини*.

существование которой, как известно, априорно, но никогда не может быть достигнуто, с учётом размеров соответствующих рациональных чисел из двух классов и которая обозначает границу между величинами двух классов. Если этой величине будет присвоено соответствующее число, что-то реальное, то следовательно, вы можете сказать, что рассматриваете и дальше в том же порядке указанные числа двух классов A_1 и A_2 и так далее, чтобы получить число, которое хотя и не является рациональным, но оно (как и рациональное число) является величиной, которая имеет реальное существование. Хотя оно никогда не может быть достигнуто только за счёт количества соответствующих рациональных чисел, но это наглядно демонстрирует смысл при рассмотрении чисел в двух последних абзацах.

Теперь рассмотрим любое из вышеперечисленных разложений рациональных чисел на два класса A_1 и A_2, и представим себе, что мы добавляем в каждом классе новое всегда рациональное число, восходящее число в первом классе и нисходящее число во втором классе. Если производить этот процесс, то никогда не удастся найти рациональное число, которое обозначает границу между числами двух классов, и вопреки тому, что я должен был получить на самом деле, даже неизвестно априорно заданной величины, к которой мы всё время приближаемся с помощью нашего процесса. Поскольку множество рациональных чисел состоит из двух классов, то в результате добавления вы можете себе представить, как с помощью одних величин определяется другая, где осуществляется бесконечная делимость, и эти величины всё более и более сближаются, различаясь на любую заданную величину, а сам процесс может продолжаться неопределённо долго. Не будет противоречием, что существующие величины определяются таким способом[215]. Поэтому мы можем, представляя эти масштабы, расширить понятие числа как существующего и присвоить ему соответствующее числовое значение, в любом случае связанное с разложением рациональных чисел без условного знака и рассмотрим это как новый вопрос в следующей главе [с. 1–2]

§ 3. Далее определение числа по Дедекинду (…)

§ 10. Теория точечных множеств по Кантору (…). Группы чисел или точек, их верхние и нижние пределы (...) (с. 14).

§ 12. Мы будем называть предельной точкой множества точку *x*, обладающую тем свойством, что в её любой сколь угодно малой окрестности всегда находится бесконечно много точек *y*, а потому в процессе последующего интервала (α, β) на $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ равных частей (§ 9) (учитывая, что вы получите по крайней мере два интервала рядом, содержащих бесконечное множество точек множества, а затем учитывая отрезок, например, первый, убывающий, и бесконечно удалённые точки) всегда приводит к созданию этих предельных точек, вы можете

[215] Так рассуждал Дюамель, а до него Больцано.

быть уверены, что *если множество G содержит бесконечное количество точек, то всегда будет существовать по крайней мере одна предельная точка, которая может и не принадлежать этому множеству,* и во множествах могут существовать бесконечно удалённые предельные точки, потому что вы будете иметь возможность проходить через интервалы удаляясь в процессе, что и доказывает, что есть бесконечное число точек, среди них содержатся даже бесконечно удалённые точки. *Множество всех предельных точек множества G Кантор назвал производным множеством и обозначил его G'. И т. д.*

§ 15. Теперь рассмотрим любое множество чисел $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ данных между двумя конечными числами α и β (α и β включены или нет), а λ обозначим такое число, что ни один из y не превосходит λ, а также для любого произвольно малого положительного числа σ будет выполняться λ – σ и λ (λ включено) всегда есть одно или несколько из чисел y. Говорят, что это число *является верхним пределом чисел $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, или верхняя граница множества, и если это будет одно из них (например, если это конечные числа), то это будет максимальное число, а если λ не входит в состав чисел $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, тогда среди этих чисел нет максимального, и λ является их верхним пределом.*

Теперь, независимо *от того, каков состав множеств $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, заключённых в конечном интервале* (α, β) (α и β включены или нет), легко показать, что *в этом интервале (края* α и β *включены) для них всегда существует верхняя граница* (который в каких-то случаях будет являться их максимумом). (...– д-во).

Аналогично рассматривая нижнюю границу чисел $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, мы могли бы показать, что всё данное множество чисел $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, заключённых в конечном интервале (α, β) (α и β включены), имеет нижнюю границу, причём это числовое значение в некоторых случаях будет минимальным среди них.

Далее распространяет это рассуждение для случая, когда один из краёв интервала бесконечен (с. 28–29).

§16. Следует отметить, *что если количество чисел $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ бесконечно, и среди них есть максимальное, то всегда существует число, являющееся верхним пределом множества, а затем найдётся наибольшее в первом производном множестве*, потому что какое бы произвольно малое σ мы ни взяли, λ – σ_1 и λ – y всегда должны численно убывать, отличаясь от λ; обозначим y' такую величину из y, которая заключается между λ – σ и λ, и пусть σ' есть положительное число, меньшее чем $\lambda - y'$, тогда можно будет сказать, что между $\lambda - \sigma'$ и λ будет существовать число y''; взяв теперь положительное число σ'', меньшее, чем $\lambda - y''$, между $\lambda-\sigma''$ и λ выберем y''' и так далее. Очевидно, что между λ и $\lambda-\sigma$ находится целый ряд из бесконечного количества y, и, следовательно, λ есть предельное число рассматриваемого множества (с. 21).

Концепция предела. Бесконечно малые и бесконечно большие[216]

§17. Понятие предела одно из самых фундаментальных во всей математике. Мы встречаем его в геометрии, арифметике, дифференциальном и интегральном исчислении, в Анализе и всех приложениях этих наук, и надо сказать, что когда мы говорим о неизмеримых числах и числовых множествах, некоторые понятия мы основываем на этой же концепции, чтобы установить это точно и строго (с. 21).

Пусть имеются некоторые величины y, рассматриваемые в зависимости от величин x, которые, за исключением только отдельной величины $x = a$, всегда имеют фиксированные конечные значения (то есть по абсолютной величине не должны превышать заданное число). Независимо от того, какими величинами являются x, они образуют непрерывный ряд чисел или дискретный ряд (последовательность) чисел (то есть образованный бесконечной группой значений, для которых a есть *предельная точка*). Если существует конечная определённая величина A, обладающая свойством, что найдётся сколь угодно малое положительное и отличное от нуля число σ, такое, что на неё неопределённо отличается x в большую или меньшую сторону при приближении к величине a, по нашему предположению конечной, и никогда не достигает $x = a$; тогда разность $A - y$ *останется и всегда будет оставаться* меньше по абсолютной величине, чем выбранное число σ; иначе говоря, A есть предельное значение, полученное для y, когда x увеличивается или уменьшается или, что не ограничивает общности, изменяется на прямой произвольно, и слева и справа от a. И в дальнейшем мы будем говорить, что y имеет предельные значения справа или слева от а, или, проще говоря, правый или левый предел y при $x = a$, или при $x = a + 0$, $x = a - 0$ соответственно[217] (с. 21).

Тогда, если для бесконечно близких x и a справа или слева, y принимает также и бесконечные значения (то есть численно большие, чем заданное число) или произвольно большие по абсолютному значению, то если для произвольно большого положительного числа ω можно найти положительное число ε больше нуля, чтобы положительные значения x, которые мы рассматриваем справа от a и отрицательные, если мы рассматриваем их слева от a, таковы, что для всех значений x между a и $a + \varepsilon$ (a исключено) y всегда остаётся по абсолютному значению больше, чем ω, мы будем говорить, что значения y не определены при

---

[216] Улисс Дини первым определил односторонний предел, и непрерывность через односторонние пределы.

[217] Эти символы $a + 0$, $a - 0$ часто используются для указания точки справа или слева от а соответственно, и сколь угодно много соседних с ней (a исключено), и мы будем использовать это обозначение в том же смысле) когда для сколь угодно малого и положительного числа σ можно будет найти такое ε, положительное в первом случае и отрицательное во втором, что для всех значений x, расположенных между a и $a + \varepsilon$ (а исключено), разность $A - y$ всегда будет меньше, чем σ. – *примечание Дини.*

приближении x к a справа или слева, и ограничены $\pm\infty$. Или ещё можно сказать, что y при $x=a$ справа или слева в пределе равен $\pm\infty$, не имея определённого знака, и, когда между a и a + ε (a исключено) y сохраняет знак, то в этом случае этот предел будем обозначать $+\infty$ или $-\infty$.

И наконец, когда переменная x растёт до бесконечности, например, для положительных значений, и в соответствии с определёнными законами (например, для целых чисел), то, если существует конечное и определённое число A с тем свойством, что для произвольно малого положительного отличного от нуля числа σ всегда можно найти положительное число x' настолько большое, что для каждого значения x, большего x', соответствующая разность между числовыми выражениями [между числовым значением функции и числом A] всегда будет меньше, чем σ, будем называть A предельным значением для y, когда x неограниченно возрастает, или пределом y для $x=+\infty$. И, наконец, будем говорить, что y имеет пределом бесконечность (положительную или отрицательную) при $x=\pm\infty$, когда для любого сколь угодно большого положительного числа ω найдётся положительное число x', что для каждого рассматриваемого значения x, большего, чем x', y будет по абсолютной величине всегда больше, чем ω, как, например, следующие функции: $(x-a)\cdot\sin\dfrac{1}{x-a}$, $\dfrac{1}{(x-a)\cdot\sin\dfrac{1}{x-a}}$, $\dfrac{1}{x-a}$, $\dfrac{\sin x}{x}$, $x+\sin\dfrac{1}{x}$,

первая имеет предел ноль при $x = a$ слева и справа от a, вторая имеет предел $\pm\infty$ при $x = a$ слева и справа, третья имеет предел $+\infty$ справа при $x = a$ и $-\infty$ слева при $x = a$, четвёртая имеет нулевой предел при $x=+\infty$, пятая имеет предел $+\infty$ для $x=+\infty$ и $-\infty$ при $x=-\infty$ (с. 22–23).

§18. Далее, если при удалении x на бесконечность вправо или влево, или при неопределённом изменении x, положительно или отрицательно, y ведёт себя так, что не вписывается в вышеперечисленные случаи, то будем говорить, что y не имеет определённого предела при $x = a$ справа или слева соответственно, или при $x=\pm\infty$. В частности, если y будет конечным, он не будет иметь предела, определяемого в точке $x = a$. Например, справа, когда не будет существовать число A с таким свойством, что для каждого значения σ, меньшего определённого числа, найдётся соответствующий ε (положительный) такой, что значение разности $A - y$ для x между a и a + ε всегда численно меньше, чем σ, или, другими словами, y не будет иметь предела при $x = a$ справа или слева, независимо от значения A; всегда есть значения σ, для которых невозможно найти значение величины ε, с тем свойством, что при всех значениях x между a и a + ε разность $A - y$ всегда численно меньше, чем σ.

Кроме того, y не будет иметь предела при $x = a$ справа или слева при бесконечном приближении x к a, когда численные значения произвольно велики. То есть при произвольно большом значении ω, какое бы малое значение ни принимал ε, то значение y, соответствующее значениям x между a и $a + ε$ будет то больше, то меньше значения ω по абсолютной величине.

В аналогичных условиях предел y при $x=\pm\infty$, поэтому в частности, можно сказать, что пределы не определены для функций $y=\sin\frac{1}{x-a}$, $y=1+\frac{1}{x-a}\cdot\sin\frac{1}{x-a}$ при $x = a$, а значения

$y=\sin x$, $y=x\cdot\sin x$ при $x=\pm\infty$.

§ 19. Эти соображения распространяются и на случай когда y зависит от большего числа переменных $x_1, x_2,..., x_n$. Так что если $a_1, a_2,..., a_n$ – конечные числа и существует конечное определённое значение A, обладающее тем свойством, что для произвольного положительного сколь угодно малого σ существуют отличные от нуля числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_n$, такие, что для значений $x_1, x_2,..., x_n$, лежащих между a_1 и $a_1+\varepsilon_1$, a_2 и $a_2+\varepsilon_2$, …, a_n и $a_n+\varepsilon_n$ соответственно (система $x_1=a_1, x_2=a_2,..., x_n=a_n$ исключена), разность $A - y$ численно меньше σ, тогда говорят, что A это предел величины y, при $x_1, x_2,..., x_n$ неограниченно приближающемся к $a_1, a_2,..., a_n$, оставаясь больше или меньше их на $\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_n$, соответственно положительных или отрицательных.

И соображения, подобные сделанным выше, для одной переменной, распространяются на случаи, когда предел бесконечен или не определён, или когда одно или несколько значений $a_1, a_2,..., a_n$ бесконечно.

§ 20. Остановимся теперь более конкретно на том случае, когда y меняется в зависимости от одной переменной x, непрерывной или дискретной, и заметим, что предельные значения y, которые мы определяем с двух сторон (справа и слева) от конечного числа a, могут быть различными. Следовательно, тогда мы не можем просто сказать, что y при $x = a$ имеет предел A; если двустороннее значение y (слева и справа) в конечной точке a имеет различные пределы, то есть по обе стороны от a пределы различны, или при изменении x не определено, в каком смысле x должен быть ближе к a, тогда это означает один из названных случаев, то есть что наше исследование не прояснило, в каком смысле x приближается к a.

Отметим также, что когда величина y_a явно известна, т. е. y может быть вычислен при $x = a$, мы не должны путать это специальное значение y для $x = a$ с предельными значениями, которых достигает y с той и другой стороны от a. В силу самого определения предела, как мы предполагаем, значения этих величин могут отличаться, потому что предел y зависит от того, вычисляете ли вы y в точках $a - 0$ или $a + 0$ снаружи от предельной точки a, а вовсе не специальное значение y в точке a, и хотя в некоторых случаях и то и другое значение могут существовать и совпадать с y_a, но могут и быть различны.

Примеры. 1. Если значение y будут $\frac{\sin(x-a)}{x-a}$, то величина y_a из y для $x = a$ не будет иметь никакого смысла, так как предельные значения для $x = a$ справа или слева от a будут одинаковы, а значения, которые принимает производная y по x, будут отличаться в a. Если рассмотреть значения функции $(x-a)^2 \cdot \sin\frac{1}{x-a}$, то они при $x = a$ будут равны нулю, тогда как производная по x [в окрестности] a будет $y = 2(x-a)\cdot\sin\frac{1}{x-a} - \cos\frac{1}{x-a}$.

Однако для случая $y_a = \lim\limits_{h=0}\frac{h^2\cdot\sin\frac{1}{h}}{h} = 0$ при $x = a$ величина y_a из y будет определена и равна нулю, а предельные значения y бесконечны при неопределённом приближении к a справа или слева будут не определены.

2. Если значение y для различных x будут в виде ряда $\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$, то значение y_π, соответствующее $x = \pi$, равно нулю, а предельные значения y справа от π будут (как мы увидим ниже), равны $-\frac{1}{2}\pi$, а слева от π будут $\frac{1}{2}\pi$.

То же самое относится и к $x = \infty$.

Отметим, однако, что нигде раньше у других авторов нет никакого упоминания о пределе y для $x = a$ (справа и слева), что, когда значение y_a не определено и/или когда они известны, но отличаются в пределе, или когда, наконец, не хотят рассматривать совокупность других значений y слева и справа от a, потому что этот процесс в $x = a$ больше не имеет смысла, и потому то же значение y_a должно на самом деле определять другой процесс. И вообще, когда мы говорим о пределе, идея в том, что это недостижимая величина.

§ 21. Не будем забывать, что существуют ограничения известных теорем о пределах суммы, произведения и пр., когда слагаемые или сомножители, создающие эти суммы или произведения, имеют конечные пределы, тогда и результат будет конечен и определён. Но мы видим, что в некоторых случаях эти теоремы имеют ограничения, например, в случае, когда количество слагаемых или сомножителей бесконечно, или x бесконечно приближается к a неопределённым образом; во многих случаях эти теоремы несправедливы, если, например, как в предыдущем случае, ряд $\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...$ имеет предел в $x=\pi$ справа равный $-\frac{1}{2}\pi$, а слева $\frac{1}{2}\pi$, а сумма равна нулю.

§ 22. Теоремы, о которых мы только что говорили, во многих случаях упрощают поиск пределов, но очень часто это исследование остаётся сложным. Часто, однако, не нужно на самом деле вычислять его, а достаточно просто признания существования конечного и определённого предела *A* для *y*, а уже затем просто используют первую или вторую из двух этих теорем для его вычисления.

Для того случая, когда величина *x*, для которой мы пытаемся вычислить предел *y*, конечна, служит первая из теорем, она гласит:

Для того, чтобы *значения y справа и слева от конечного числа a, например, справа, имели определённый предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого положительного числа* σ *существовало положительное число* ε, *такое, что разность* $y_{a+\varepsilon}-y_{a+\delta}$ *между значением y в точке* $x=a+\varepsilon$, *т. е.* $y_{a+\varepsilon}$, *и любым другим значением* $y_{a+\delta}$, *соответствующим значению x в* $a+\delta$, *значения y для x между a и a + ε (a исключено), было численно меньше, чем σ.* Доказательство (…)

§ 23. Подобным образом доказывается и вторая теорема, о которой мы говорили, полезная для того случая, когда ищут предел *y* для бесконечных значений переменной *x*, и которая может быть сформулирована так:

Для того, чтобы значения *y для бесконечно больших значений x, положительных или отрицательных, допустим, что для положительных, имели конечный определённый предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного произвольно малого числа* σ *существовало положительное число* x' *настолько большое, что при всех положительных значениях x, больших, чем* x', *по абсолютному значению будет* $y_{x'}-y_x<\sigma$. Доказательство (…).

§ 24. При *доказательстве* следующей теоремы используем лемму Гейне.

Теорема: *Если значения y для x, неопределённо близких к a справа или слева, или при x, растущих до бесконечности, всегда остаются конечными, но не имеют конечного предела, то они будут постоянно (непрерывно) колебаться, по крайней мере, некоторые из границ этих колебаний, как ожидается, отличаются друг от друга на величину, отличную от нуля,* как это происходит, например, во-первых, с функцией $\sin\frac{1}{x-a}$, а во-вторых, с функцией $\sin x$.

§ 25. Предыдущие наблюдения приводят нас к следующей теореме: *Если при приближении x к конечной величине a справа или слева, или растущем до бесконечности* *положительного или отрицательного значения, допустим, что для положительного, величина у всегда сохраняет одинаковый знак, и не растёт или не уменьшается по абсолютной величине, оставаясь однако всегда меньше определённого конечного числа, то для* $x = a$ *справа или слева или для* $x=\infty$ *она будет иметь определённый конечный предел.*

(…)*Теоремы* о сумме и частном.

Понятие *функции*. Непрерывность и разрывность

§ 29. *Выполнив* приведённые выше соображения о неизмеримых числах, множествах точек и пределах, давайте подумаем о функциях, и начнём с формирования понятия функции одного действительного переменного.

Сначала древние использовали слово функция, чтобы выразить различные зависимости, и только Лейбниц и Бернулли, а затем Эйлер, расширили понятие функции, чтобы включить все аналитические выражения, любым способом содержащие соответствующие переменные. В нынешнем (XIX) столетии Дирихле определил понятие функции, не зависящей от каких-либо предположений о возможном аналитическом выражении. Он назвал функцией действительного переменного x в данном интервале (включая крайние точки) такие значения y, каждое из которых *единственно* и *определено* для соответствующего x, независимо от того, определяется ли это соответствие с помощью аналитических операций по переменной x, или каким-либо иным способом.

Рассмотрим это понятие функции, в частности, ограничимся действительными и конечными функциями, а именно: x независимая переменная в интервале и y как некоторая сумма сходящегося ряда, например: $\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\cdot\frac{\sin nx}{n}$ для всех x из произвольного интервала y будет определённой и конечной величиной. Или функция x в некотором интервале, определяемая так, что величина y равна нулю для рациональных x и равна единице для иррациональных x, или функция от x в данном интервале, равная x при рациональном x, и равная x^2 для иррационального x, … Но, например, если в интервале, содержащем точку $x = 0$, величина y равна $\sin\frac{1}{x}$, то нельзя рассматривать её как функцию в этом промежутке, ибо её значение в точке $x = 0$ не определено, и только тогда она станет функцией от x, когда вы назначите для неё особое значение для $x = 0$, например, когда вы скажете, что она в этой точке равна нулю.

Следует отметить, что функции определены в общих чертах, пока вы не поставите для них других условий, включающих общие свойства отношений между значениями в различных точках (т. е. при различных значениях x). Когда эти точки, как предполагается, сколь угодно близки друг к другу, и функция имеет значения во всех этих точках (и это несмотря на то, что некоторые законы уже должны быть определены, те, что не относятся к отдельным значениям функции в каждой точке, очевидно, что для бесконечно удалённых точек интервала никто никогда не мог сказать, как полностью определяется функция, определить эти законы); так что, в частности, без каких-либо ограничений, мы не всегда сможем говорить о непрерывности, дифференцируемости и пр.

И с этим определением возникает естественный вопрос: «Возможно ли сохранить все обобщения, содержащиеся в определении функции y от x в данном интервале, всегда ли можно аналитически определить функцию для одной или нескольких переменных для одной или множества конечных или бесконечных операций, которые предстоит сделать над переменной?», и этот вопрос при современном состоянии науки пока не имеет удовлетворительного ответа. Хотя мы теперь знаем это для очень обширного класса функций, но для таких функций, которые имеют особенности и сами представляют огромные аналитические выражения. Но всё же остаются сомнения, могут ли без ограничений существовать такие функции [с произвольным аналитическим выражением, по крайней мере, в настоящее время при современном развитии анализа, ответить на этот вопрос невозможно], для каждой из которых аналитическое выражение проанализировать в целом невозможно.

Желая сейчас исследовать функцию одной вещественной переменной x, которую мы определили, начнём поиск таких различий, речь пойдёт о непрерывности или разрывах, рассматриваемых в данном интервале.

§ 30. Обозначим $f(x)$ функции, рассматриваемые в данном интервале (α,β) и заметим, что данное нами определение обусловливает единственное значение, определённое в каждой точке в пределах интервала (края включены), и если специально не сказано иное, всегда предполагаем, что это значение действительно и конечно (т. е. все значения расположены между двумя конечными числами).

Будем говорить, что она *непрерывна* для $x=a$ или в точке a, если она имеет значение $f(a)$, когда для произвольного сколь угодно малого положительного отличного от нуля σ будет существовать отличное от нуля положительное число ε, что для всех δ, численно меньших чем ε, разность $f(a+\delta)-f(a)$ будет численно меньше, чем σ, или, иными словами, мы говорим, что $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, где имеет значение $f(a)$, и даже при желании (произвольно) разность $f(a+h)$ и $f(a-h)$, где h – положительное, и для h = 0 имеем предельное значение $f(a)$, или, наконец, когда величины $f(a+h)-f(a)$ и $f(a-h)-f(a)$ отличаются бесконечно мало вместе с h.

Будем говорить, что $f(x)$ *разрывна* в $x=a$, если не существует при произвольном положительном σ, соответствующего ε, что для всех значений δ, меньших чем ε, всегда выполняется $f(a+\delta)-f(a)<\sigma$, или, иными словами, мы говорим, что $f(x)$ разрывна в $x=a$, когда значения $f(a+h)$ в $f(x)$ справа от *a*, и значения $f(a-h)$ в $f(x)$ слева от *a*, не имеют определённых пределов, равных между собой, или отличаются от значения $f(a)$, которое функция имеет в точке *a*.

Отметим, однако, что если *a* лежит на краю интервала (α, β), то, как в случае непрерывности, так и в случае разрыва, нельзя говорить о значении $f(x)$ на краю этого интервала, так как невозможно определить значения $f(a+h)$, $f(a-h)$ и $f(a)$.

§ 31. Введём новые различия для разрывов $f(x)$ в точке *a*.

1. В случае, если точка *a* не является крайней точкой интервала, и в этой точке имеет место разрыв, для которого функция $f(x)$ имеет значения $f(a+h)$ и $f(a-h)$ справа и слева от *a*, равные одному и тому же числу *A*, то непрерывность в этой точке может быть восстановлена, если вместо $f(a)$ взять в качестве значения функции число *A*, по Риману, *разрыв устраним*, если изменить значение функции в этой точке.

2. В случае, когда точка *a* разрыва функции $f(x)$ не лежит на краю интервала, и значения $f(x)$ с одной стороны от *a* имеют предел $f(a)$, а с другой стороны не имеют определённого предела, или отличаются от $f(a)$, то будем говорить, что $f(x)$ *непрерывна с одной стороны* (*правой или левой*) *от a*, и *разрывна с другой стороны*, или просто скажем, что $f(x)$ *разрывна или непрерывна с одной стороны от a*[218].

Если *функция* $f(x)$ имеет разрыв по одну сторону от *a*, и этот разрыв такой, что с одной стороны от *a* функция $f(x)$ имеет определённый предел, то будем говорить, что это *обычный разрыв* или *разрыв первого рода*, а если же значения $f(x)$ не имеют определённого предела, разрыв будем называть *разрывом второго рода*; в случае, когда разрыв можно устранить, изменив значение функции в соответствующей точке, это будет обычный разрыв, а если функция $f(x)$ в точке *a*, не лежащей на краю интервала, разрывна, она может быть непрерывна с одной стороны, а с другой стороны иметь обычный разрыв или разрыв второго рода, или, будучи разрывной с обеих сторон от точки *a*, то она может иметь с одной стороны обычный разрыв, а с другой иметь разрыв второго рода, и изменяя значение функции в этой точке, мы

---

[218] Следует отметить, что теперь у нас есть понятие непрерывной функции в точке *a*, или с одной стороны от этой точки; т. е. во-первых для того случая, когда *y* – это величина, данная для всех значений *x*, в том числе и в интервале $(a, a\pm\varepsilon)$, и справа и слева от *a* (*a* включено), случай (§ 20), где значения y_a в точке $x=a$ совпадают с предельными значениями и справа и слева от *a*, и, во-вторых, для того случая, если только *y*, рассматриваемый как функция от *x*, является непрерывной функцией лишь с одной стороны, с правой или с левой, от *a*) - *примечание Улисса Дини.*

можем устранить разрыв по крайней мере, с одной стороны, если это разрыв первого рода, но это невозможно в случае разрыва второго рода.

И поэтому, когда точки разрыва $f(x)$ лежат на краю интервала, мы можем также назначать (привлекать) обычный способ рассмотрения и устранения, изменив значение функции в этой точке.

§ 32. Кроме того, заслуживает внимание то случай, когда разрыв второго рода с одной стороны от точки a; значения $f(x)$ для x, неопределённо близких к a, сами по себе будут продолжать непрерывно колебаться (бесконечно много раз) с амплитудой большей, чем заданное число (§ 24), и тогда значения $f(x)$ не будут иметь определённого предела. И у нас есть пример того, что функция в точках x, отличающихся от a, равная $\sin\frac{1}{x-a}$ и в точке $x=a$ равна нулю, и при бесконечном приближении x к a с той или с другой стороны точки a продолжает колебаться от –1 до 1.

Кроме того, вы можете также заметить, что функция, непрерывная справа или слева от точки a, или просто имеющая обычный разрыв с обеих сторон этой точки, будет всё-таки в окрестности точки a делать бесконечное число колебаний, амплитуда которых сжимается при бесконечном приближении x к a (§ 24). Так, например, для x, не равных нулю, функцию, равную $x\cdot\sin\frac{1}{x}$, в точке $x = 0$ полагаем равной нулю или какому-нибудь другому числу.

§ 33. Также следует отметить, что функция может быть непрерывной или иметь обычный разрыв в точке a, только с одной стороны, например: справа имеет разрыв, и даже разрыв второго рода, а с левой стороны в точках, которые находятся в сколь угодно малой окрестности точки a, при движении вправо сколь угодно близко к a, она произвольно мала (т. е. разрыв в точках справа сколь угодно близко от a); и обратно, происходит разрыв второго рода в точке a справа, и непрерывность слева от точки, которая расположена в окрестности a, сколь угодно близко от a, справа от a[219].

Дело в том, что непрерывность справа от точки a, или обычный разрыв, приводит к тому, что для любого положительного числа σ найдётся такое положительное число ε, что в интервале $(a, a+\varepsilon)$, который имеет *нижнюю границу* в a, численно получится (1) $f(a+\varepsilon)-f(a+\delta)<\sigma$.

Вместо того, чтобы быть непрерывной или иметь только обычный разрыв слева от точки $x=a+\varepsilon'$, которая расположена справа от a, и сколь угодно близко неё (от a), это влечёт за собой, что для любого положительного числа σ_1 существует интервал $(a+\varepsilon'-\varepsilon_1, a+\varepsilon')$ и *верхняя*

[219] Дини имеет в виду одностороннюю равномерную непрерывность.

граница в фиксированной точке $a+\varepsilon'$, что для каждого x численно выполняется неравенство (2): $f(a+\varepsilon'-\varepsilon_1)-f(x)<\sigma_1$, и это показывает только то, что, как мы сказали выше, для условий (1) и (2) из одного не следует другое, так как по мере уменьшения σ всегда продолжает существовать интервал $(a, a+\varepsilon)$, нижняя граница которого в точке *a*, и где выполняется условие (1), но это не является необходимым для уменьшения σ_1, которое должно продолжать обусловливать существование интервала $(a+\varepsilon'-\varepsilon_1, a+\varepsilon')$ в верхней границе фиксированной точки $a+\varepsilon'$, которая удовлетворяет условию (2), и обратно. (…).

§ 35. Теперь мы говорим, что когда $f(x)$ справа или слева от точки *a* непрерывна или имеет лишь обычный разрыв, по обозначениям Дирихле, $f(a+0)$ и $f(a-0)$, предел при положительном и стремящимся к нулю *h* мы будем обозначать $f(a+h)$ и $f(a-h)$, которые соответствуют $f(x)$ с какой-либо стороны от *a* (справа или слева).

§ 36. Теорема Вейерштрасса

Теперь будет полезно сформулировать следующую теорему Вейерштрасса о нижних и верхних пределах (или максимальном и минимальном значении функции, реальной и всегда конечной) в заданном интервале. Если $f(x)$ задана в произвольном интервале (α, β) (пределы включены), то по теореме § 15 можно сказать, что существует верхний предел λ и нижний предел μ значений функции в этом интервале. Теперь мы утверждаем, что *в этой области есть по крайней мере одна определённая точка* x' (которая может также лежать на краю интервала), *такая, что значения* $f(x)$, *соответствующие окрестности точки* x' (§ 11), *будут сколь угодно близки к верхнему пределу* λ (Вейерштрасс).

Функции, непрерывные в данном интервале

§ 39. *Непрерывными в заданном интервале* называются такие функции, которые во всех точках этого интервала (края включены) непрерывны. *Непрерывными вообще* в интервале называются такие функции, которые являются разрывными лишь в конечном числе точек этого интервала, так что удаление этих точек вместе с содержащими их произвольно малыми интервалами, оставляет функцию непрерывной на остальной части интервала.

Так, например, функция $x\cdot\sin\frac{1}{x}$, если придать ей нулевое значение в точке $x=0$, непрерывна в любом интервале, между тем функция $\sin\frac{1}{x}$, какое бы значение мы ни придали ей в точке $x=0$, непрерывна только в общем смысле в тех интервалах, которые содержат точку $x=0$.

Равномерная непрерывность

§ 40. Перейдём теперь к специальным функциям, которые непрерывны в конечном интервале (α,β) и прежде всего рассмотрим такую функцию $f(x)$, что для произвольно малого отличного от нуля положительного числа σ, для каждого *x*, принимающего особое значение *a* между α и β (α и β включены) будет существовать особое (специальное) число ε, отличающееся от нуля и положительное, такое, что для всех значений δ, численно меньших ε, для которых точка $a+\delta$ остаётся в интервале (α,β), будет выполняться по абсолютной величине $f(a+\delta)-f(a)<\sigma$[220]. Но при том же значении σ (которое соответствует числу ε) возможно, что число ε, которое годится для числа *a*, не годится для других точек в том же интервале, но тогда нужно его уменьшать; кроме того, возникает сомнение, как это происходит, когда вы бесконечно близки к точке разрыва функции, которая непрерывна лишь в общем смысле, а также непрерывных внутри интервала, при приближении *x* к специальным точкам, ε можно уменьшать до предела, но он никогда не достигнет нулевого значения (которое было бы нижним пределом всех значений ε). Другими словами, сомнительно, что в некоторых случаях это число ε, отличное от нуля, может служить для всех значений *x* от α до β (α и β включены), и поэтому целесообразно различать разные виды непрерывности функции в интервале (α,β), а именно *равномерной* непрерывности, и *неравномерной* непрерывности в ином случае, когда для произвольно малого положительного числа σ найдётся отличное от нуля и положительное число ε, такое, что для всех величин δ, численно меньших, чем ε, при которых точка $x+\delta$ находится в интервале (α,β)(α и β включены), будет выполняться по абсолютной величине $f(x+\delta)-f(x)<\sigma$. Как показал Кантор, если $f(x)$ непрерывна в интервале от α до β, для произвольного числа σ всегда существует такое число ε, который служит для всех точек одного и того же интервала, и тогда всё вышеизложенное различие излишне.

§ 41. Эта важная теорема Кантора доказывается следующим образом (…).

§ 42. Отметим, что эта теорема эквивалентна такой: *Если функция* $f(x)$ *непрерывна всюду в интервале* (α,β), *взяв любое сколь угодно малое положительное число* σ, *всегда можно разложить весь интервал* (α,β) *на конечное число достаточно малых частичных интервалов, величина которых отлична от нуля, таким образом, чтобы изменение функции в каждом из них было бы меньше* σ; потому что если ε это число, о котором сказано выше, и которое

[220] Во избежание недоразумений отметим, что мы всегда ограничиваем рассматриваемую величину δ численной величиной ε*, при которой точка* $a+\delta$ *попадает в заданный интервал* (α,β) (α *и* β *включены*), *то есть точка* $a+\delta$*, лежащая между* $a-\varepsilon$ *и* $a+\varepsilon$*, находится внутри интервала* (α,β) достаточно близко к краям α *и* β; никакие из точек $a+\delta$, для которых δ численно меньше, чем ε, фактически не выходят из интервала (α,β). В этом можно убедиться в случае, когда *a* достаточно близко к краю интервала, например, к α или к другому краю, таким образом, при рассмотрении фиксированного положительного числа $\varepsilon>a-\alpha$, такого, что для точки $a+\delta$*, расположенной между* α и $a+\varepsilon$ (включая *a*) численно выполняется $f(a+\delta)-f(a)<\sigma$, но тогда некоторые из точек $a+\delta$ при δ численно меньших, чем ε, действительно выходят за пределы интервала (α,β). *– Примечание Улисса Дини.*

соответствует числу σ', меньшему, чем $\frac{\sigma}{2}$, в каждом интервале длины меньшей или равной ε изменение функции не превзойдёт $2\sigma'$ (§ 37), и все они будут меньше, чем σ.

§ 43. Непрерывные на данном интервале функции обладают также и другими свойствами, которые хоть и могут быть доказаны немедленно, но для большей строгости доказательства требуется специального исследовать эти функции.

Эти свойства содержатся в следующих теоремах, из которых первая, третья и четвёртая главным образом связаны с непрерывностью функции в точке.

Теорема I. Если *функция* $f(x)$ *непрерывна в определённой точке* x', *и определена во множестве точек, для которых* x' *является предельной точкой* (§ 12), *тогда она определена и в точке* x'. (Док-во).

Из этой теоремы непосредственно следует: *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в определённом интервале* (α,β) *и определена в точках бесконечного множества G, то она определена во всех точках производного множества G* (множества, являющегося производным по отношению к *G*). (§§ 12 и 13).

Таким образом, мы получаем следующее:

§ 44. Теорема II. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в некотором интервале* (α,β) *и определена только в точках второго типа множества G, являющихся производными точками, образованными из первого множества, т.е. на полученном множестве* G', *которое содержит все точки отрезка, то она будет определена и в других (остальных) точках*.

В частном случае можно сказать: *Если функция* $f(x)$ *имеет одно и то же значение A во всех точках множества G, которое мы сейчас рассматриваем, она будет равна A на всём интервале, и если функция* $f(x)$ *непрерывна между* α *и* β *и определена во всех рациональных точках этого интервала, то она будет определена и в иррациональных точках,* а так же: *если две непрерывные функции в интервале* (α,β) *равны во всех точках множества G, в настоящее время указано* 2^a *видов, то эти функции будут равными и в остальных точках*.

§ 45. Теорема III. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x', *а в точках, отличных от* x', *кроме произвольно малого количества точек, функция принимает значения A, или принимает числовые значения, которые отличается от A произвольно мало, тогда* $f(x')=A$, например, если $f(x')=B$ при *B* отличном от *A*, тогда $f(x)$ в точке x' не будет непрерывной.

§ 46. Теорема IV. *Если* $f(x)$ *непрерывна в точке* x', *и при неопределённом приближении x с одной стороны от* x' *она конечна и не превышает A, а с другой стороны от этой точки она конечна и меньше A, тогда в точке* x' *она будет иметь значение A.*

Ясно, что *если* бы не выполнялось $f(x')=A$, то с одной стороны от x' функция $f(x)-A$ при бесконечном приближении x к x' будет в конечном итоге всегда положительной или равной нулю, а при приближении с другой стороны будет всегда отрицательной или равной нулю, а в точке x' не равной нулю, следовательно, с какой-то из сторон от x' функция не является непрерывной, что противоречит нашему предположению.

§ 47. Теорема V. *Функция* $f(x)$, *которая в заданном интервале* (α,β) *непрерывна и не равна постоянной, достигает в этом интервале своего наибольшего и наименьшего значения.* То есть в данном интервале (включая края) существует по крайней мере одна точка x', в которой функция имеет значение, не меньшее, чем любое из значений, принимаемых ею на интервале, это значение превосходит все значения в остальных точках интервала, и также в том же интервале существует по крайней мере одна точка x'', в которой значение функции не больше, чем любое из значений, принимаемых функцией в других точках, т. е. оно меньше, чем все остальные значения (Вейерштрасс)[221].

В самом деле, обозначим λ верхний предел значений нашей функции $f(x)$ в заданном интервале от α до β (включая края). Этот верхний предел существует (§ 36) по крайней мере в одной точке x', и будет обладать тем свойством, что в каждой, сколь угодно малой окрестности (intorno) верхний предел значений функции $f(x)$ тоже будет λ, поэтому в силу теоремы III, очевидно, $f(x')=\lambda$, поэтому λ максимально.

Точно так же доказывается существование минимума, и, следовательно, теорема доказана.

§ 48. Теорема VI. *Если* $f(x)$ *является непрерывной функцией в* (α,β) *и в этом интервале принимает также различные значения, численно меньшие любой данной величины, то в этом интервале существует такая точка x, в которой функция примет значение ноль*. [Se $f(x)$ è una funzione continua nell`intervallo (α, β) e in questo intervallo prendre anche valori numericamente minori di qualunque quantità data, essa per un valore determinato di *x* nello stesso intervallo prenderà effettivamente anche il valore zero[222]].

В самом деле, в силу предыдущей теоремы, функция $f^2(x)$, являющаяся непрерывной между α и β (§ 38) достигает минимума, который в то же время будет нижней границей между α и β (края включены). Но по нашему предположению, нижняя граница равна нулю, тогда между α и β (края включены) найдётся значение x, в котором $f(x)=0$.

---

[221] Заметим, что для функции, которая не является непрерывной всюду в интервале, это не выполняется, в силу теоремы § 36, так как для неё максимальные и минимальные значения, очевидно, не существуют. – *Примечание Улисса Дини.*

[222] Возможно, Дини забыл уточнить, что функция принимает неотрицателольные значения.

§ 49. Теорема VII. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна между* α *и* β *и в этом интервале принимает численные значения, сколь угодно близкие к данному числу А, тогда для определённого значения x из этого интервала она обязательно примет также и значение А.*

Действительно, функция $f(x)-A$ в этом интервале будет принимать значения, численно меньшие любого числа, и следовательно (в силу предыдущей теоремы), когда x примет некоторое определённое значение x' из этого интервала (включая края), функция примет значение нуля, и поэтому будет $f(x')=0$.

§ 50. Теорема VIII. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в интервале между* α *и* β (α и β включены) *и в некоторой точке x, равной a, она положительна, а в другой точке x, равной b из того же интервала* (α и β включены), *она отрицательна, то для некоторого значения x между a и b она примет нулевое значение*.

Действительно, пусть, например, $a < b$, и образуем множество положительных значений $f(x)$ от a до b (a включено), и обозначим за A нижний предел этих значений. Так как $f(x)$ непрерывна между a и b, то в силу предыдущей теоремы существует точка x', в которой $f(x')=A$, что и доказывает теорему, если просто придать A значение нуля.

Теперь, допустив, что A отлична от нуля, по теореме из § 42 можно найти число ε, отличное от нуля и положительное, с помощью которого последовательно разделим интервал (a, b) на интервалы $(a, a + \varepsilon)$, $(a + \varepsilon, a + 2\varepsilon)$, $(a + 2\varepsilon, a + 3\varepsilon)$, …, в каждом из которых вариация $f(x)$ по абсолютной величине меньше, чем A; и так как ε отличен от нуля, число этих интервалов конечно, и последний из них $(m\varepsilon, b)$, будет иметь амплитуду меньше ε. Теперь рассмотрим первый из этих интервалов $(a, a + \varepsilon)$, и заметим, что $f(a)>A$, из чего сразу видно, что в нём функция $f(x)$ будет положительной, и следовательно, не меньше A, следовательно, $f(a+\varepsilon)$ будет положительным и не меньше, чем A. Рассматривая второй интервал $(a + \varepsilon, a + 2\varepsilon)$, заключаем, что и в нём функция $f(x)$ всегда положительна, и следовательно, не меньше A, и $f(a+2\varepsilon)\geq A$, и продолжая так, приходим к выводу, что при A, отличном от нуля, $f(x)$ будет положительна и не меньше, чем A во всех точках интервала, в частности, и $f(b)$ будет положительным и не меньше, чем A, что противоречит нашему предположению. Поэтому мы должны признать, что A равна нулю, и что $f(x')=0$, следовательно, точка x' не может находиться ни в a, ни в b, что и доказывает теорему.

§ 51. Теорема IX. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна от* α *до* β *и в обеих точках a и b этого интервала* (α и β включены) *принимает различные значения A* и *B, тогда для одного или более значений x между a и b она принимает некоторое значение C, заключённое между A* и *B.*

Рассмотрим функцию $f(x)-C$, мы видим, что её значения при $x = a$ и при $x = b$ будут противоположны по знаку, отсюда в силу предыдущей теоремы для x между a и b будет существовать по крайней мере одно значение x', для которого $f(x')-C=0$, то есть $f(x')=C$.

§ 52. Для этой теоремы, как и для теоремы из § 47 сразу же получаем следующее:

Теорема X. *Если функция* $f(x)$, *непрерывная от* α *до* β, *и в этом интервале хотя бы один раз для определённого значения переменной величины принимает значения между своим максимальным и своим минимальным значением, которые имеются в этом интервале*.

§ 53. *Теорема* XI. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в интервале* (α, β) *и в некоторой окрестности на краю интервала, например, в окрестности* α, *постоянна и равна A, но при этом не равна постоянной на всём интервале* (α, β) *и, допустим например, что* α < β, *то внутри этого интервала существует определённая точка* x' *такая, что между* α *и* x' (x' *включено*) *всегда будет* $f(x)=A$, *а для любого интервала* $(x', x'+\varepsilon)$ *справа от* x', *с левой крайней точкой в* x' *всегда найдутся точки x, в которых не будет выполняться* $f(x)=A$. Доказательство (…).

В «Курсе Дифференциального и интегрального исчисления» У. Дини 1907 года это материал повторяется без изменений.