

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Царицанская Юлия Юрьевна

**АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ ВАСИЛЬЕВ
И МАТЕМАТИКА В РОССИИ
В КОНЦЕ XIX – НАЧАЛЕ XX ВЕКОВ**

специальность 07.00.10 – История науки и техники
(физико-математические науки)

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н. Демидов С. С.

Москва – 2017 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО А. В. ВАСИЛЬЕВА.....	13
1.1. Детство и студенческие годы.....	13
1.2. Деятельность в Казанском университете.....	15
1.3. Деятельность в Санкт-Петербурге.....	29
1.4. Деятельность в Москве.....	33
ГЛАВА 2. НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ А. В. ВАСИЛЬЕВА	40
2.1. Математические работы.....	40
2.1.1. Сочинение <i>pro venia legendi</i>	40
2.1.2. Магистерская диссертация.....	46
2.1.3. Докторская диссертация.....	57
2.2. История математики в творчестве А. В. Васильева.....	72
2.3. Педагогическая деятельность.....	84
2.3.1. Учебные курсы.....	84
2.3.2. Педагогические взгляды.....	91
ГЛАВА 3. А. В. ВАСИЛЬЕВ И РОССИЙСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СООБЩЕСТВО.....	97
3.1. Казанское физико-математическое общество на рубеже XIX–XX вв.	97
3.1.1. История образования общества.....	97
3.1.2. Научная деятельность общества.....	99
3.1.3. Мероприятия, посвященные Н. И. Лобачевскому.....	103
3.1.4. Заключение.....	106
3.2. А. В. Васильев и Петроградское физико-математическое общество.....	108
3.2.1. История Санкт-Петербургского математического общества.....	108
3.2.2. Образование Петроградского физико-математического общества	109
3.2.3. Заключение.....	113

3.3. Российские ученые и формирование международного математического сообщества в конце XIX – первой трети XX вв.....	115
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	126
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	128
ПРИЛОЖЕНИЕ А	144
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	163

ВВЕДЕНИЕ

Представленная работа содержит результаты историко-научного исследования, посвященного творчеству Александра Васильевича Васильева (1853-1929) и его роли в развитии российского и международного математического сообщества в последней трети XIX – первой четверти XX веков.

Исследования выполнены в Московском Государственном университете им. М. В. Ломоносова в 2011 – 2016 гг.

Актуальность работы. Процесс формирования международного математического сообщества, включая историю развития национальных математических сообществ во второй половине XIX – первой половине XX столетий, стал темой многочисленных исследований и, начиная с середины 70-х годов XX века, находится в состоянии активной разработки. Особенно интенсивно эта тематика начала изучаться в последние десятилетия¹.

Формирование мирового математического сообщества происходило в ходе активного развития национальных математических сообществ, в первую очередь, немецкого и французского – двух ведущих в XIX – первой трети XX в. В конце XIX – в начале XX вв. конкуренцию им готовилась составить Италия, а уже в XX в. к числу лидеров присоединились СССР и США.

В ходе этого процесса возник новый тип математика – активного деятеля зарождавшегося международного математического сообщества, ученого с широким кругом научных интересов, нацеленного на проблемы этого только

¹ См., например, Hormigon M. Messengers of Mathematics. European Mathematical Journals (1800-1946) / M. Hormigon, E. Ausejo. – Zaragoza: Siglo XXI de Espana, 1993; Goldstein C. L'Europe mathematique-Mathematical Europe / C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter. – Paris: Edition de la Maison des sciences de l'homme, 1996; Garding L. Mathematical and Mathematicians. – Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1998; Дело академика Николая Николаевича Лузина / Под ред. С. С. Демидова и Б. В. Левшина. — СПб.: РХГИ, 1999; Parshall, K. Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Community, 1800-1945 / K. Parshall, A. Rice. – Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2002; Green J., LaDuke J. Pioneering Women in American Mathematics: The Pre-1940 Phd's. – Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2009; Hollings Ch. Mathematics across the Iron Curtain. – Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2014; Aubin D., Goldstein C. The War of Guns and Mathematics: Mathematical Practices and Communities in France and Its Western Allies around World War I. – Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2014.

возникавшего сообщества, и своей работой способствовавшего его успешному формированию. К этому новому типу можно отнести таких ученых как Ш. А. Лезан (1841-1920, Франция), Г. Гальдеано (1846-1924, Испания), Ф. Г. Тейшейра (1851-1933, Португалия), А. В. Васильев (1853-1929, Россия), Дж. Б. Гуччи (1855-1914, Италия), К. Стефанос (1857-1917, Греция). Эти ученые, хотя и были признанными специалистами, но не являлись математиками первого ряда. Их значимость определяется, прежде всего, той важной ролью, которую сыграла их деятельность в развитии зарождающегося международного математического сообщества.

Жизни и деятельности А. В. Васильева посвящена обширная литература. В первую очередь, здесь необходимо отметить статьи в биографических сборниках², а также серию некрологов в различных математических изданиях³.

Среди современных работ укажем статью В. А. Бажанова и А. П. Юшкевича⁴, напечатанную в качестве послесловия к книге А. В. Васильева о Н. И. Лобачевском. В ней отражены основные направления научной и общественной деятельности А. В. Васильева, значительное место уделяется его усилиям по пропаганде идей Н. И. Лобачевского, приводится список трудов А. В. Васильева.

² См., например, Венгеров С. А. Критико-биографический словарь русских писателей и ученых. Том IV / С. А. Венгеров. – СПб.: Семен. типо-лит. (И. Ефрона), 1895. – 262 с.; Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Казанского университета (1804 - 1904): Кафедра православного богословия, факультеты историко-филологический (с разрядом восточной словесности и лектурами) и физико-математический. В 2-х частях. Ч. 1 / Под ред.: Загоскин Н. П. - Казань: Типо-лит. Имп. ун-та, 1904. – 552 с.

³ Парфентьев Н. Н. А. В. Васильев как математик и философ // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1930. – Сер. 3. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 92-104; Синцов Д. М. Васильев А. В. как педагог и популяризатор // Математическое образование. – 1930. – № 6. – С. 177-185; Fehr H. F. Alexander Vassilief // L'Enseignement Mathematique. – 1929. – Т. 29. – P. 317 – 318; Korzybski A. Alexander Vasilievitch Vasiliev (1853 – 1929) // Science. – 1929. – Vol. LXX. – N 1825. – P. 598 – 600; Loria G. Alexandre Vasilievic Vasilieff // Archeion. – 1930. – Vol. XII. – P. 46 – 47; Rainoff T. Alexander Vassilievic Vasiliev // Isis. – 1930. – Vol. XIV (2). – N 44. – P. 342 – 348.

⁴ Бажанов В. А., Юшкевич А. П. А. В. Васильев как ученый и общественный деятель // Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский (1792 - 1856). – М.: Наука, 1992. – С. 221-228

В последние десятилетия деятельность А. В. Васильева стала сюжетом цикла работ В. А. Бажанова⁵. В них биография А. В. Васильева дополнена сведениями о его семье, а также сделан акцент на роли А. В. Васильева в формировании мировоззрения его старшего сына – выдающегося логика Н. А. Васильева (1880 – 1940).

Кроме того, необходимо отметить очерк Н. Г. Баранец и А. Б. Веревкина⁶, в котором рассмотрены философские взгляды А. В. Васильева.

Однако, в упомянутых исследованиях упор делался на отдельные важные аспекты творчества А. В. Васильева. Эти работы не ставили своей целью систематическое исследование его научной, педагогической и организационной деятельности. К тому же, они содержат не только значительные пробелы в описании его жизни и деятельности, но в некоторых случаях даже ошибочные сведения⁷.

Объектом диссертационного исследования является история развития математики и математического сообщества в России во второй половине XIX – первой трети XX века.

Предметом диссертационного исследования является научная, педагогическая, организаторская деятельность одного из активнейших участников процесса становления российского математического сообщества – Александра Васильевича Васильева.

⁵ Бажанов В. А. Александр Васильевич Васильев. – Казань: изд-во Казанского университета, 2002. – 30 с; Бажанов В. А. Николай Александрович Васильев (1880—1940) / Отв. ред. Б. Л. Лаптев, И. И. Мочалов. — М.: Наука, 1988. — 144 с; Бажанов В. А. Профессор А. В. Васильев как ученый, организатор и общественный деятель // История логики в России и СССР. – М.: Канон+, 2007. – С. 164-212; Бажанов В. А. Профессор А. В. Васильев. Ученый, организатор науки, общественный деятель // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 2002. – Выпуск 7(42). – С. 120-149.

⁶ Баранец Н. Г., Веревкин А. Б. А. В. Васильев об экономии в математике и ее истории // Российские математики о науке и философии. – Ульяновск: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2012. – 160 с.

⁷ Например, на сайте интернет-энциклопедии «Академик» содержатся сведения о том, что А. В. Васильев якобы умер во Франции в 1929 году (URL:

http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_biography/127723/%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B5%D0%B2, дата обращения 15.09.2016).

Целью работы является оценка вклада научной, педагогической и организаторской деятельности Александра Васильевича Васильева в процесс развития российского математического сообщества.

В связи с поставленной целью необходимо решить следующие **задачи**:

- составление по возможности полной научной биографии А. В. Васильева;
- анализ его основных научных трудов (математических и историко-математических);
- исследование педагогической деятельности А. В. Васильева;
- выявление наиболее существенных аспектов его организаторской деятельности (в России, а также на международном уровне).

Решение этих задач станет вкладом в изучение истории российского и мирового математического сообществ в указанный период.

Методы исследования. Для решения поставленных задач применялись методы историко-научного анализа математических и историко-математических трудов А. В. Васильева в контексте математики того времени (антикваристский подход) в сочетании с анализом его результатов с позиции современной науки (презентистский подход).

Источниковедческую базу исследования, прежде всего, составляют:

- архивные материалы, предоставленные
 - Архивом Московского Государственного университета им. М. В. Ломоносова (Архив МГУ, фонд 1);
 - Архивом Российской Академии Наук (РАН, фонды 518, 603);
 - Научным архивом Российской Академии образования (НА РАО, фонды 52, 104);
 - Национальным архивом республики Татарстан (НА РТ, фонд 977);
 - Отделом редких книг и рукописей Научной библиотеки МГУ (ОРКиР НБ МГУ, фонд 25);
 - Российским государственным историческим архивом (РГИА, фонд 1606);

- Центральным государственным архивом г. Москвы (ЦГАМ, фонд 1609);
- Центральным государственным архивом Российской Федерации (ЦГА РФ, фонды Р-2856, Р-2990);
- Центральным государственным историческим архивом г. Санкт-Петербурга (ЦГИА СПб, фонды 14, 113);
- материалы личного архива Н. Л. Крушинской (правнучки А. В. Васильева).

Кроме того, в качестве источников использовались:

- публикации об А. В. Васильеве, его научном наследии и творческой биографии;
- историко-математическая периодическая печать;
- опубликованные труды А. В. Васильева и его современников;
- переписка ученого.

Научная новизна работы состоит в том, что:

- уточнены и дополнены биографические сведения об А. В. Васильеве, в частности, касающиеся последних лет жизни ученого; уточнена и дополнена библиография трудов ученого; в научный оборот введены новые архивные документы, имеющие отношение к различным вопросам истории математики;
- впервые систематическому историко-математическому анализу подвергнуты математические работы А. В. Васильева, проанализированы его учебные математические курсы;
- впервые был проведен историко-математический анализ организационно-научной деятельности А. В. Васильева в качестве председателя Казанского физико-математического общества, Петроградского физико-математического общества, Московского математического научно-педагогического кружка, а также как деятеля международного математического сообщества;
- восстановлена целостная картина ряда важных эпизодов из истории российского математического сообщества (организация преподавания

математики в Казанском и Санкт-Петербургском университетах, деятельность российских математических обществ, празднование столетия со дня рождения Н. И. Лобачевского и др.), а также формирования институтов международного математического сообщества конца XIX – начала XX столетий.

Практическая ценность исследования. Результаты исследования имеют значение для учебно-методической и преподавательской работы при подготовке курсов истории математики в России, истории неевклидовой геометрии, истории Казанской математической школы, истории Казанского физико-математического общества, истории Санкт-Петербургского математического общества, а также представляют интерес для историков математики и математиков. Объективный анализ деятельности А. В. Васильева позволяет полнее оценить его роль в развитии научного сообщества его времени и тем самым выработать более адекватное представление о развитии российского и международного математического сообщества того времени. Работа также вносит вклад в историю взаимосвязей отечественных научных школ.

Положения, выносимые на защиту:

- В диссертации предложена целостная, приведенная в систему, дополненная новыми фактами и документально уточненная творческая биография А. В. Васильева.
- Наиболее важными результатами научно-педагогической деятельности А. В. Васильева были следующие:
 - математические работы и учебные курсы А. В. Васильева существенным образом способствовали проникновению новых концепций и понятий в русскую математическую литературу, в частности, теории характеристик Л. Кронекера, теория коннексов А. Клебша, приложений теории групп к вопросам решения дифференциальных уравнений, основ математической логики, теории действительного числа К. Вейерштрасса и др.;

- многие историко-математические исследования А. В. Васильева стали первыми обобщающими трудами в своем роде (биография Н. И. Лобачевского, очерк по истории математики в России), что способствовало развитию историко-математических исследований в России; А. В. Васильев, как один из первых русских историков математики, оказал прямое влияние на формирование советской историко-математической школы;
- результатом педагогической деятельности А. В. Васильева стало проникновение в российское образование европейского опыта преподавания – в частности, новой формы занятий со студентами в виде математических семинаров; кроме того, отличительной чертой его педагогических взглядов являлась убежденность в необходимости введения историко-философской составляющей в процесс математического преподавания.
- Наиболее важные результаты организационной деятельности А. В. Васильева для развития российского математического сообщества и формирования международного математического сообщества заключались в следующем:
 - А. В. Васильев стал главным организатором мероприятий, проводимых Казанским университетом в связи со столетием Н. И. Лобачевского, которые существенным образом способствовали укреплению авторитета русской науки на международном уровне, а также стали важным шагом на пути строительства международного математического сообщества;
 - являясь в разное время руководителем Казанского физико-математического общества, Петроградского физико-математического общества, Московского математического научно-педагогического кружка, А. В. Васильев был одним из ведущих организаторов научной жизни в России;

- А. В. Васильев являлся одним из главных участников организации и подготовки важнейших событий в жизни мирового математического сообщества (международные математические конгрессы, юбилей К. Вейерштрасса, празднование столетия Н. И. Лобачевского и учреждение премии его имени), в частности, велика его роль в возобновлении нарушенных Первой мировой войной международных отношений и организации международного конгресса математиков 1924 г. в Торонто.

В результате проведенного исследования формируется более полная картина развития математических институтов и математической жизни в России и Европе.

Апробация результатов. Основные результаты исследований доложены:

- на XI Колмогоровских чтениях в Ярославском Педагогическом университете в 2013 г.;
- на XIX Годичной научной конференции Института истории естествознания и техники РАН в 2013 г.;
- на XII Колмогоровских чтениях в Ярославском Педагогическом университете в 2014 г.;
- на XXII Годичной научной конференции Института истории естествознания и техники РАН в 2016 г.;
- на заседаниях Общественного семинара по истории математики и механики в МГУ им. М. В. Ломоносова в 2012, 2013, 2014, 2016 гг.

Публикации. Результаты исследований опубликованы в восьми работах, три из которых опубликованы в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, библиографии и двух приложений. Текст содержит 127 страниц, библиография состоит из 165 наименований, приложение А содержит 19 страниц, приложение Б содержит 5 страниц.

В приложении А представлен библиографический список трудов А. В. Васильева, приложение Б включает в себя архивные документы и фотоматериалы, относящиеся к биографии А. В. Васильева.

ГЛАВА 1. ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО А. В. ВАСИЛЬЕВА

1.1. Детство и студенческие годы

Александр Васильевич Васильев родился 24 июля 1853 года в Казани в семье выдающегося русского китаевода, Василия Павловича Васильева (1818-1900) (прил. Б, Рисунок 5, Рисунок 6). В. П. Васильев известен как знаток географии Китая, в изучение которой он внес большой вклад, а также как специалист по буддизму и восточным языкам. Он окончил восточное отделение филологического факультета Казанского университета со степенью кандидата по монгольской словесности. Затем в течение 10 лет он жил и работал в Китае, и, вернувшись оттуда, занял должность ординарного профессора по китайской и маньчжурской словесности. В 1855 году в связи с переездом факультета восточных языков в Санкт-Петербург В. П. Васильев вместе с семьей переехал в столицу. В 1866 году В. П. Васильев был избран членом-корреспондентом (а в 1886 – ординарным академиком) историко-филологического отделения Петербургской Академии наук. Помимо ценных научных результатов, деятельность В. П. Васильева отличали активное участие в жизни факультета⁸ и внимание к политическим вопросам.

Мать А. В. Васильева, Софья Ивановна Симонова, была дочерью выдающегося астронома, географа и геодезиста, ректора Казанского университета, члена-корреспондента Петербургской академии наук Ивана Михайловича Симонова (1794-1855).

С самого детства А. В. Васильев видел перед собой пример неустанной научной деятельности в лице отца, что, безусловно, способствовало раннему развитию у него тяги к знаниям. Научившись читать в четыре года, мальчик с

⁸ С 1878 по 1893 год В. П. Васильев занимал должность декана восточного факультета, выступал за углубление специализации студентов и введение в программу дополнительных предметов; кроме того, он был одним из инициаторов издания факультетом периодического журнала «Азиатское обозрение». Также В. П. Васильев сотрудничал с прогрессивной газетой «Восточное обозрение», выпускавшейся с 1882 года в Петербурге, освещавшей административно-политические вопросы в Восточной России.

пяти начал читать газеты, причем *«для большего удобства раскладывал газетный лист на полу, и сам ложился на пол»* [50, с. 136]. Интеллектуальному развитию также способствовали частые беседы В. П. Васильева со своими друзьями – видными деятелями культурной и общественной жизни (частым гостем в доме В. П. Васильева был, например, известный писатель П. И. Мельников (Андрей Печерский)). Кроме всего прочего, в детстве мальчик очень увлекался историей: в автобиографической статье он приводит эпизод, как отец заставил его однажды *«при Мельникове изложить генеалогию всех английских королей от Альфреда Великого до королевы Виктории»* [50, с. 136]. А. В. Васильев вспоминает также, что ему часто доводилось присутствовать на переговорах отца с крепостными крестьянами по различным вопросам. Таким образом, с ранних лет А. В. Васильева окружала обстановка, благодаря которой развивались в нем такие черты личности, как тяга к знаниям и неравнодушное отношение к общественно-социальным вопросам, составившие впоследствии основу для формирования его активной общественной позиции и стремления к основательному подходу в отношении любого вопроса.

В 11 лет он поступил в 5-ю Санкт-Петербургскую гимназию. Поначалу во время обучения А. В. Васильев увлекался химией, покупал книги на сбереженные от завтраков деньги и ставил химические опыты. Вскоре интерес к химии сменился увлечением математикой. По этому поводу А. В. Васильев вспоминает высокие требования, предъявляемые к ученикам на уроках математики его педагогом К. Д. Краевичем⁹. Однако гимназический курс не удовлетворял А. В. Васильева, и он самостоятельно изучил *«Курс анализа, читанный в Парижской политехнической школе»* Ж. Штурма (1868). Кроме того, во время обучения мальчик продолжал много читать, к примеру, в этот период его особенно увлекала латинская поэзия. Помимо латыни, А. В. Васильев изучал в

⁹ Константин Дмитриевич Краевич (1833-1892) – российский физик и педагог, окончил Главный педагогический институт (где был однокурсником Д. И. Менделеева), автор учебников по алгебре, физике и космографии, в 1876-1882 гг. издавал педагогический журнал «Семья и школа».

гимназии немецкий и французский языки. В 1870 г. А. В. Васильев окончил гимназию с золотой медалью.

Сразу же после этого А. В. Васильев поступил на физико-математический факультет Санкт-Петербургского Университета. Интересен тот факт, что весной-летом 1870 г. (в период проведения вступительных экзаменов) В. П. Васильев был направлен в научную командировку для изучения китайских, маньчжурских и тибетских фондов библиотек Вены, Мюнхена, Лондона и Берлина, и встречи с известными европейскими учеными-синологами [19]. В эту поездку В. П. Васильев взял своего сына Александра, в связи с чем специально просил разрешения у руководства факультета перенести для него вступительные испытания.

В тот период на физико-математическом факультете Санкт-Петербургского университета преподавали Пафнутий Львович Чебышев, Осип Иванович Сомов, Александр Николаевич Коркин, Юлиан Васильевич Сохоцкий, Егор Иванович Золотарев. В 1874 г. А. В. Васильев окончил университет со степенью кандидата (прил. Б, Рисунок 7), сдав на «отлично» кандидатские экзамены (богословие, математику, механику, физику, неорганическую химию, астрономию, геодезию, физическую географию, французский язык) и получив золотую медаль за кандидатское сочинение «Теория отделения корней» (забегая вперед, отметим, что эту тематику он будет развивать впоследствии в своей работе *pro venia legendi* и затем в докторской диссертации).

После окончания университета А. В. Васильев был приглашен для чтения лекций в Казанский университет на кафедру чистой математики. Естественно предположить, что здесь сыграли роль «старые связи» семьи Васильевых с Казанским университетом, оставшиеся со времени работы там В. П. Васильева.

1.2. Деятельность в Казанском университете

Получив приглашение работать в Казанском университете, осенью 1874 г. А. В. Васильев представил физико-математическому факультету диссертацию на

получение права читать лекции «Об отделении корней систем совокупных уравнений», его оппонентами были профессор Эраст Петрович Янишевский и доцент Федор Матвеевич Суворов.

Представленное сочинение «Об отделении корней систем совокупных уравнений» посвящено теории характеристик Л. Кронекера, изложенной в работе последнего «Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln» (1869) [138]. В этой работе Л. Кронекером рассмотрен вопрос о применении теории характеристик к задаче об отделении корней систем уравнений. Задача отделения корней заключается в нахождении числа корней системы уравнений $F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, F_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_n(x_1, \dots, x_n) = 0$, лежащих внутри заданной области $F_0(x_1, \dots, x_n) < 0$. Аппарат теории характеристик позволяет решить данную задачу в общем виде для n -мерного пространства. В своей работе А. В. Васильев излагает теорию характеристик, а затем применяет ее к доказательству теоремы Ш.-Ф. Штурма и Ж. Лиувилля о нахождении разности между числом решений системы $f_1(x_1, x_2) = 0, f_2(x_1, x_2) = 0$, лежащих внутри контура $f_0(x_1, x_2) = 0$ и вне его. Данная тематика исследований впоследствии встретится в докторской диссертации А. В. Васильева, также посвященной теории характеристик Л. Кронекера.

Кроме того, для получения права чтения лекций А. В. Васильевым были прочитаны пробные лекции по чистой математике «Определенный интеграл. Условие интегрируемости Римана» и «О функциях комплексных величин». В выборе тем для лекций проявился характерный для творческой деятельности А. В. Васильева интерес к новейшим научным теориям и методам.

Вскоре после этого, в декабре 1874 года, А. В. Васильев был назначен приват-доцентом, и ему было поручено чтение лекций по теории функций для объединенных 3 и 4 курсов физико-математического факультета. В течение следующих нескольких лет он также читал курсы по исчислению конечных разностей, теории вероятностей, теории чисел.

Научные интересы его в этот период лежат в области дифференциальных уравнений. В 1878 году выходит его работа «Об особенных решениях в связи с

новыми взглядами на задачу интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка», посвященная изложению результатов А. Клебша по теории коннексов и приложению их к исследованию особых решений дифференциальных уравнений.

Кроме того, в этот период его интересует задача выявления критериев, на основании которых можно судить, имеет ли линейное дифференциальное уравнение алгебраические интегралы. По его мнению, *«этот вопрос должен предшествовать решению всех других вопросов о дифференциальных линейных уравнениях, так как его решение выделило бы самые простые дифференциальные уравнения, удовлетворяющиеся не трансцендентными, но алгебраическими функциями»* [79, оп. Совет, д. 7525, л. 7].

Весной 1878 года А. В. Васильев успешно сдает магистерские экзамены (из раздела Чистой математики он отвечал вопросы «О различных системах координат» и «Основания вариационного способа», из раздела Аналитической механики – «Сложение сил, приложенных к одной точке», из Теории вероятностей – «О математическом и нравственном ожидании»). Его экзаменаторами были профессор Эраст Петрович Янишевский, профессор Петр Иванович Котельников, доцент Федор Матвеевич Суворов и декан физико-математического факультета Мариан Альбертович Ковальский.

После сдачи магистерских экзаменов А. В. Васильев для приготовления к профессорскому званию был командирован за границу на 1879 год. Первую треть года он слушает лекции в Берлинском университете. В силу того, что физико-математическим факультетом ему было поручено преподавание теории функций и теории чисел, наибольшее внимание А. В. Васильев уделяет курсам К. Вейерштрасса («Теория эллиптических функций»), Л. Кронекера («Теория алгебраических уравнений») и Э. Куммера («Теория чисел»). Известно, что к этому моменту Васильев уже был заочно знаком с Л. Кронекером, которому в 1874 г. посылал свое сочинение *pro venia legendi*: *«Еще более, чем курсы почтенных ученых, могла бы быть полезна беседа с ними. Я не смею надеяться заранее на это по отношению к профессорам Вейерштрассу и Куммеру – но*

любезность профессора Кронекера, который дважды в ответ на посылку ему моей pro venia legendi прислал мне свои мемуары – в последний раз после трехгодичного молчания с моей стороны, надеюсь, не изменится при личных свиданиях, и он не откажется руководить меня в моих занятиях» [79, оп. Совет, д. 7525, л. 5].

По окончании зимнего семестра А. В. Васильев отправляется в Париж, чтобы провести там предстоящий летний семестр. В Париже он посещает лекции Ж. Лиувилля («Определенный интеграл») и Ш. Эрмита («Об определенном интеграле и его приложениях»). К началу зимнего семестра нового учебного года А. В. Васильев снова возвращается в Берлин, где изучает по записям курс К. Вейерштрасса «Введение в теорию аналитических функций», чтобы затем прослушать его же курс «Теория абелевых функций». Кроме посещения лекций А. В. Васильев занимается самостоятельно по избранной для себя теме – «Об алгебраических интегралах линейных дифференциальных уравнений второго порядка», изучая работы, К. Вейерштрасса, Ш. Брио и Ж. К. Буке, Л. Фукса, Б. Римана, Ж. Лиувилля и П. Гордана. Эта заграничная командировка стала началом многих научных знакомств А. В. Васильева – с профессорами и студентами Берлинского и Парижского университетов.

Во время поездки в 1879 г. А. В. Васильев познакомился со многими европейскими математиками, в частности, с двумя представителями математической школы Вейерштрасса – С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлером. Со временем эти знакомства превратились в теплые дружеские отношения, математики часто встречались в неформальной обстановке: *«Сколько прекрасных воспоминаний моей жизни связано с 1879–1884 годами. Я снова вспоминаю виденную мной в Париже у госпожи Ковалевской корректуру статьи Пуанкаре для первой тетради «Acta», принесенную им самим»* (письмо А. В. Васильева Г. Миттаг-Леффлеру от 7 апреля 1924 г., цит. по [55]).

В 1885 г. С. В. Ковалевская обратилась к А. В. Васильеву с просьбой взять на себя распространение среди российских математиков воззвания о сборе средств на подарок К. Вейерштрассу при подготовке празднования его 70-летнего юбилея.

Итогом заграничной поездки 1879 года стала представленная в Казанский Университет на защиту магистерская диссертация А. В. Васильева «О функциях рациональных, аналогичных с функциями двояко-периодическими», оппонентами А. В. Васильева были профессор Эраст Петрович Янишевский и доцент Федор Матвеевич Суворов (прил. Б, Рисунок 8). В диссертации рассмотрены функции, инвариантные относительно преобразований, образующих конечные подгруппы в группе дробно-линейных преобразований (группа вращений на постоянный угол, группа диэдра, группа вращений тетраэдра, группа вращений октаэдра, группа вращений икосаэдра). Затем установлена связь между такими функциями и дифференциальными уравнениями третьего порядка определенного вида. Решения этих уравнений, в свою очередь, связаны с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка, что позволяет построить классификацию линейных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих алгебраические интегралы, в соответствии с 5-ю типами. Эта работа была основана на идеях, впоследствии изложенных Ф. Клейном в «Лекциях об икосаэдре и решении уравнения 5-ой степени» (1884) [67]. В этом сочинении Ф. Клейн дает ссылку на диссертацию А. В. Васильева, указывая ее в числе трудов, достаточно полно отражающих содержание данной теории.

По возвращении из-за границы А. В. Васильев просит физико-математический факультет разрешить ему читать новый курс «Введение в анализ» (впервые в России такой курс начал читать в Петербургском университете Егор Иванович Золотарев в 1877–78 учебном году). Вот как А. В. Васильев обосновывает необходимость преподавания данного курса: *«цель этого курса будет заключаться, во-первых, в том, чтобы служить связью между гимназическим и университетским курсом, дать возможность студентам 1-го курса, с одной стороны, привести в систему и расширить взгляд на знания анализа ими уже приобретенные, с другой стороны, познакомиться на простых примерах с понятиями высшего анализа: о функции, о непрерывности и т.п.»* [79, оп. Физ-Мат, д. 877, л. 11].

В 1884 году А. В. Васильев защитил докторскую диссертацию «Теория отделения корней систем алгебраических уравнений», в которой вернулся к теме, уже встречавшейся в его творчестве ранее – теории характеристик Л. Кронекера (прил. Б, Рисунок 10). На этот раз он начал изложение с развернутого исторического обзора, в котором показал, как задача нахождения числа корней уравнения $f(x) = 0$ переросла в задачу об отделении корней систем алгебраических уравнений. Анализируя попытки, предпринятые на пути решения данной проблемы (теория индексов («интегральных указателей») О. Коши, теория вставлений Дж. Дж. Сильвестра, теория характеристик Л. Кронекера), А. В. Васильев замечает, что все они прямо или косвенно сводятся к изучению вопроса о взаимном расположении на плоскости кривых, заданных уравнениями $f(x) = y$, $f'(x) = y$, $y = 0$. Аналогичную идею использовал также К. Ф. Гаусс в доказательстве существования, по крайней мере, одного корня уравнения $f(z) = 0$. Первые результаты относительно нахождения числа корней системы двух уравнений с двумя неизвестными были получены Ш.-Ф. Штурмом и Ж. Лиувиллем. Работа Л. Кронекера «Über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln» (1869) стала обобщением данных результатов на случай n измерений. Однако сочинение Л. Кронекера было написано в чрезвычайно лаконичной и сжатой форме, в силу чего, как пишет А. В. Васильев, довольно сложно для понимания. Поэтому А. В. Васильев поставил своей целью подробное изложение результатов Л. Кронекера и их связи с предшествующими теориями, объединив, таким образом, исследования, касающиеся нахождения числа корней уравнений. Сюжет работы интересен тем, что помимо алгебраического применения теории характеристик в ней дана геометрическая интерпретация характеристики системы функций (с использованием понятия завивания кривой или поверхности вокруг точки).

К алгебраическому направлению исследований относится также работа А. В. Васильева «О формулах, данных Якоби для выражения решений линейной системы посредством кратных интегралов» (1885) [37], в которой А. В. Васильев показал, что формулы К. Якоби для частного случая $n = 3$ могут быть получены

альтернативным путем из результатов К. Ф. Гаусса, изложенных в работе «*Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum*» (1813).

В 1882 году А. В. Васильев проводит лето в Берлинском и Лейпцигском университетах и знакомится с Ф. Клейном. Целью этой поездки было «*ознакомление с преподаванием математики в университетах Западной Европы*» [42, с. 2]. Результатом ее стал развернутый очерк «О преподавании математики в Берлинском и Лейпцигском университетах» (1882) [42], включающий в себя описание учебного процесса, содержание некоторых курсов и факультативных занятий в немецких университетах.

Впоследствии поездки А. В. Васильева в Европу становятся регулярными – практически каждый год (почти всегда в летние месяцы) он ездит в Европу, где изучает научную литературу в библиотеках, посещает съезды, знакомится с принципами преподавания в европейских университетах, расширяет круг международных научных связей.

В 1884 году А. В. Васильев был избран председателем физико-математической секции в Казанском обществе естествоиспытателей, созданной в 1880 году. В 1890 году члены секции во главе с А. В. Васильевым вынесли на рассмотрение факультета (а затем и Совета Университета) вопрос о преобразовании секции в самостоятельное Физико-математическое Общество. Общество ставило своей целью «содействовать успехам физико-математических наук, улучшению методов их преподавания и распространению физико-математических знаний в пределах Восточной России» [64, с. 4]. Тогда же возник печатный орган Общества – Известия Казанского физико-математического Общества. А. В. Васильев в качестве председателя Общества занимался редактированием этого издания, а также регулярно публиковал в нем заметки, освещающие различные события из математической жизни Европы.

Кроме того, с 1883 года А. В. Васильев составлял рефераты работ русских математиков по анализу для реферативного ежегодника «*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*» (в период с 1883 по 1897 гг. А. В. Васильев опубликовал обзоры более 400 работ).

По просьбе С. В. Ковалевской А. В. Васильев принимал участие в сборе средств на подарок К. Вейерштрассу в связи с его семидесятилетним юбилеем в 1885 году ¹⁰: *«Подумавши, я решил поступить следующим образом: напечатал воззвание, один из экземпляров которого я Вам прилагаю, и разослал его по всем русским математикам, мне известным по имени. Затем в каждом из Университетских городов я просил кого-нибудь принять на себя более деятельное участие в подписке, в Петербурге – Сохоцкого, в Москве – Бугаева, в Киеве – Ермакова, в Одессе – Слешинского.*

Деньги было бы неудобно присылать ко мне в Казань; поэтому я просил пересылать их в Берлин пр. Фуксу ¹¹. Но я думал, что кроме того многим нашим соотечественникам будет всего приятнее послать деньги на подарок Вейерштрассу через его знаменитую русскую ученицу и потому я осмелился также выставить адрес С. В. Ковалевской.» (из письма А. В. Васильева к С. В. Ковалевской, 1885 г. [5], подробнее об этом письме см. [101]).

Особого внимания заслуживает преподавательская деятельность А. В. Васильева. Один из его учеников, Н. Н. Парфентьев, охарактеризовал Васильева-педагога как *«ученого, который умел учить и увлекать молодежь»*. *«Его блестящие по внешней форме и содержанию лекции привлекали всегда битком набитые аудитории - будь то лекции теоретические, практические, семинарские или публичные»* [84, с. 3].

А. В. Васильева крайне волновал вопрос создания условий для активной самостоятельной работы студентов, и с этой целью им был организован в 1900 г. «Казанский физико-математический кружок» при Казанском физико-математическом обществе ¹². Другой его ученик, Д. М. Синцов, вспоминал, что,

¹⁰ По случаю юбилея К. Вейерштрасса был создан фотоальбом со снимками его учеников и коллег, см. фотоснимок А. В. Васильева в прил. Б, Рисунок 9.

¹¹ Л. Фукс возглавлял оргкомитет по подготовке празднования юбилея К. Вейерштрасса.

¹² Занятия физико-математического кружка посещал во время своей учебы в Казанском университете поэт В. Хлебников. Вот как А. В. Васильев впоследствии описывал эти занятия в беседе с С. Я. Маршаком: *«Иногда на эти интересные встречи приходил и Хлебников. И удивительно, что при его появлении все почему-то вставало. И совсем непостижимо, что я тоже вставал. А ведь я уже многие годы был ординарным профессором. А кем*

таким образом, «*постоянное общение с таким живым, полным заразительной кипучей энергии человеком разрешало вопрос о кадрах, и немногочисленный Казанский университет за короткое время выдвинул ряд лиц, ставших потом преподавателями математических наук во всех концах России*» [95, с. 181]. И это не преувеличение. Взглянув на состав преподавателей по математическим дисциплинам в российских университетах, можно обратить внимание, сколь велико среди них число тех, кто был оставлен для приготовления к профессорскому званию А. В. Васильевым. К числу его учеников относятся Дмитрий Матвеевич Синцов¹³, Александр Петрович Котельников¹⁴, Николай Николаевич Парфентьев¹⁵, Владимир Леонидович Некрасов¹⁶, а также Е. И. Григорьев, П. П. Граве и др. Обращая внимание на разноплановость научных интересов учеников А. В. Васильева, можно говорить о том, что она стала результатом влияния широкого кругозора их педагога.

В 1887 году А. В. Васильев был избран ординарным профессором, а в 1899 году получил звание заслуженного профессора. Курсы лекций, читаемые А. В. Васильевым – «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление»,

был он? Студентом второго курса, желторотым мальчишкой! Я до сих пор не понимаю, почему же я вставал всё-таки вместе со своими студентами? Это что-то, чему нет объяснения...» [78, с. 336].

¹³ Синцов Дмитрий Матвеевич (1863 – 1946) – российский и советский математик, академик АН УССР. Окончил Казанский университет. Обучался за границей у С. Ли. Педагогическую деятельность начал в Казани, затем работал в Екатеринославе (Днепропетровске) и Харькове, а также – в Москве и Уфе во время Великой Отечественной войны. Известен работами по теории коннексов, которые составили значительный вклад в теорию неголономных систем.

¹⁴ Александр Петрович Котельников (1865 – 1944) – русский и советский механик и геометр. Окончил Казанский университет. В разные периоды жизни работал в Киеве, Казани, Москве. Основные работы посвящены теории кватернионов и комплексных чисел в применении к геометрии и механике. Разрабатывал проблемы механики неевклидовых пространств.

¹⁵ Николай Николаевич Парфентьев (1877 – 1943) – российский и советский математик. Окончил Казанский университет. В 1911 г. защитил магистерскую диссертацию «Исследование по теории роста функций». Научные интересы лежат в области математики, механики, физики, истории философии и методологии точных наук. С 1919 г. до конца жизни возглавлял Казанское физико-математическое общество. Профессор Казанского университета.

¹⁶ Владимир Леонидович Некрасов (1864 – 1922) – российский математик. Окончил Казанский университет. Защитил магистерскую диссертацию «Строение и мера линейных точечных областей», которая стала одной из первых работ в России по теории множеств. Преподавал в Томском Технологическом университете.

«Геометрические приложения дифференциального исчисления», «Интегрирование дифференциальных уравнений», «Исчисление конечных разностей», «Теория вероятностей», «Теория чисел», «Высшая алгебра», «Теория эллиптических функций», «История математики» и др. – отличались содержательностью, широтой философско-исторического контекста и новизной идей, включая в себя такие разделы, как теория групп, теория кватернионов, теория множеств, которые только еще входили в моду в Западной Европе (подробнее о педагогической деятельности см. п. 2.3.1.2.3).

Делом жизни А. В. Васильева по праву может считаться популяризация идей Николая Ивановича Лобачевского и деятельность по увековечению его памяти. В 1883–1886 годах при активном содействии А. В. Васильева было издано полное собрание геометрических сочинений Н. И. Лобачевского в двух томах (с предисловием А. В. Васильева к обоим томам). Кроме того, А. В. Васильев был инициатором международной подписки на денежный капитал по случаю празднования 100-летия со дня рождения великого казанского геометра в 1893 году¹⁷. Обширные международные связи А. В. Васильева позволили придать этой идее грандиозный размах. Почетными членами Оргкомитета стали Э. Бельтрами, Г. Гельмгольц, Ж. Дарбу, Ф. Клейн, Л. Кремона, А. Кэли, С. Ли, А. Пуанкаре, Дж. Сильвестр, П. Л. Чебышев, Ш. Эрмит. О том, с каким живым интересом Европа восприняла деятельность А. В. Васильева в этом направлении, можно судить по тому, что речь, произнесенная А. В. Васильевым на торжественном заседании Казанского университета 22 октября 1893 г., была переведена на немецкий [124], французский [126], английский [132], испанский [129] и чешский языки. В результате на собранные деньги была учреждена премия за исследования в области геометрии, а также открыт памятник Н. И. Лобачевскому (Рисунок 1). Среди лауреатов премии мы видим С. Ли, Д. Гильберта, Ф. Шура, Г. Вейля и др.

¹⁷ Уже в советское время были найдены архивные документы, позволяющие заключить, что в действительности Н. И. Лобачевский родился 20 ноября 1792 года (по старому стилю) (подробнее см. в [87]).

В этот период вышел ряд работ А. В. Васильева, посвященных Н. И. Лобачевскому – «Lobachevsky as algebraist and analyst» (1894) [161], «Значение Н. И. Лобачевского для императорского Казанского университета» (1896) [27], «Lobatschefskij's Ansichten uber die Theorie der Parallellinien vor dem Jahre 1826» (1895) [157]. Необходимо также отметить существенный вклад А. В. Васильева в изучение работ Лобачевского по алгебре и анализу.

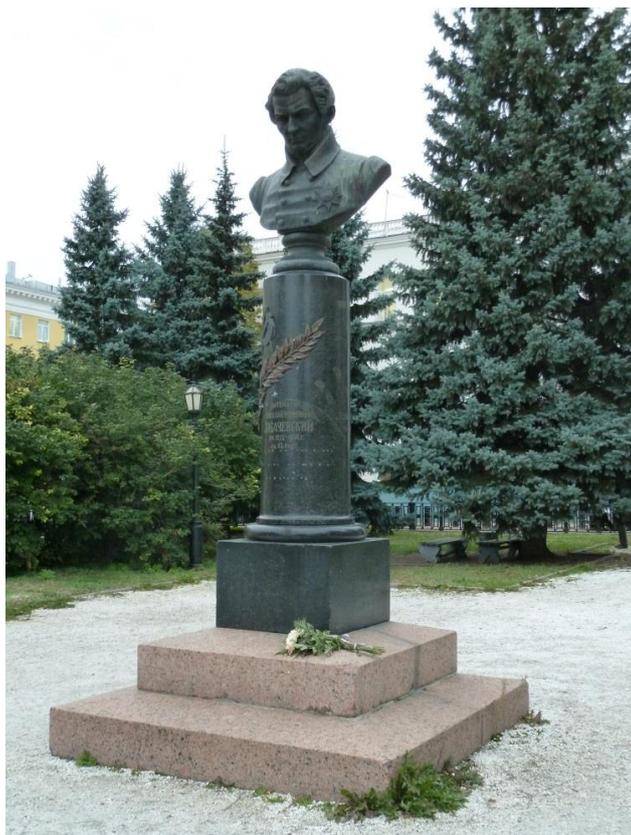


Рисунок 1. Памятник Н. И. Лобачевскому (Казань)

А. В. Васильев был участником первого, а также нескольких последующих Международных математических конгрессов. Проведению первого математического конгресса 1897 г. в Цюрихе предшествовали несколько лет организации и подготовки, инициированной Г. Кантором. Эта инициатива имела особое значение в условиях острого соперничества Германии и Франции – двух лидеров международного математического мира. Известно, что А. В. Васильев также принимал активное участие в этом процессе – судя по всему, Г. Кантор впервые озвучил идею международного конгресса в переписке с А. В. Васильевым (письмо от 4 июля 1894 года) [120]. В активное обсуждение этого вопроса были также вовлечены А. Пуанкаре, Ш. Лезан¹⁸, Э. Лемуан¹⁹ и др.

¹⁸ Шарль-Анж Лезан (1841-1920) – французский математик и политик, в 1888 году был президентом Французского математического общества, являлся одним из основателей французского математического журнала *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (1894), а также был одним из основателей педагогического журнала *L'Enseignement Mathématique* (1899).

¹⁹ Эмиль Лемуан (1840-1912) – французский математик и инженер, основатель Французского математического общества, также являлся одним из основателей французского математического журнала *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (1894).

[139]. В 1894 году Ш. А. Лезан и А. В. Васильев обращаются к Дж. Гальстеду²⁰ с просьбой выступить популяризатором идеи международных математических конгрессов в США и Мексике. Кроме того, они просят Дж. Гальстеда как члена Американского математического общества представить на очередном съезде общества следующий проект организации конгрессов: подготовительный съезд – в Казани в 1896 году, организационный конгресс – в Брюсселе в 1897 году, Первый международный математический конгресс – в Париже в 1900 году [133]. Важность съезда в Казани, намеченного на 1896 год, отмечает Ш. А. Лезан в письме к Г. Кантору от 22 сентября 1895 года: *«в 1896 году в Казань собираются поехать лишь немногие немецкие математики; хотя, тем не менее, эта встреча, предложенная господином Васильевым, может быть полезна для подготовки к Конгрессу 1900 года»* [121, с. 156]. В конечном итоге первый конгресс был собран в 1897 г. в нейтральной Швейцарии (в Цюрихе), а следующий – в Париже в 1900 г.

В 1898 году по рекомендации Э. Лемуана и Л. Лекорню²¹ А. В. Васильев был избран в члены Французского математического общества [147].

С 1897 года он являлся членом Немецкого математического общества [135].

Кроме того, 22 января 1899 г. по рекомендации Дж. Б. Гуччи²² и Ф. Гербальди²³ А. В. Васильев был принят в члены Математического кружка в Палермо [144].

Также А. В. Васильев входил в число членов Берлинского общества испытателей природы, Общества физических и естественных наук Бордо [145].

19 февраля 1885 года А. В. Васильев по предложению Н. И. Жуковского был избран действительным членом Московского Математического Общества [61].

²⁰ Джордж Брюс Гальстед (1853-1922) – американский математик, преподавал в Принстонском университете, затем – в Техасском университете в Остине. Математические интересы лежат в области неевклидовой геометрии.

²¹ Леон Лекорню (1854 – 1940) – французский физик и инженер. Профессор Университета Кан. С 1910 г. – член Французской академии наук по механике.

²² Джованни Батиста Гуччи (1855 – 1914) – итальянский математик, ученик Л. Кремоны, основатель и председатель (до 1914 г.) Математического кружка в Палермо. Математические работы сосредоточены в области алгебраической геометрии.

²³ Франческо Гербальди (1858 – 1934) – итальянский математик, профессор аналитической и проективной геометрии в Университете Палермо, позднее работал в Университете Павии.

А. В. Васильев являлся также членом математических обществ Харькова и Киева, Московского общества антропологии и этнографии и Нижегородского научного общества [145].

С 1897 года А. В. Васильев сотрудничал с голландским изданием «Revue semestrielle des publications mathématique». Наряду с А. В. Васильевым в тот период сотрудниками журнала были С. Дикштейн, Дж. Лория, Б. К. Млодзеевский, М. А. Тихомандрицкий и др.

С 1898 года А. В. Васильев являлся членом редакционного совета журнала «L'Enseignement mathématique»²⁴, а также автором нескольких статей в этом журнале: «Les idées d'Auguste Comte sur la philosophie des mathématiques» (1900) [162], «Le bicentenaire de la loi des grands nombres» (1914) [152], «Une nouvelle édition des ouvrages de N. J. Lobatchefsky» (1923) [154].

Помимо научной и преподавательской работы, А. В. Васильев вел также активную общественную деятельность. В 1880 г. он был выбран в гласные свияжского земского собрания и от этого собрания был послан гласным в казанское губернское земское собрание. По свидетельству А. В. Васильева, он *«все свободное от исполнения профессорских обязанностей время отдавал земской деятельности, обращая особое внимание на вопрос о народном образовании и вопросы экономические»* [50, с.138].

Для ближайшего знакомства с народным образованием А. В. Васильев в течение нескольких лет был представителем земства в Свияжском уездном училищном совете. Одной из целей его деятельности было увеличение числа школ в уезде, что помогло бы сделать образование более доступным населению. За время его работы число школ в Свияжском уезде возросло с 43 до 90, а число учащихся – с 1692 до 3100, благодаря чему Свияжский уезд по отношению числа школ и числа учащихся к населению занял одно из первых мест по России. Кроме того, деятельность А. В. Васильева в училищном совете была направлена на

²⁴ Кроме А. В. Васильева, от России в редакционный совет издания входил Н. В. Бугаев, а также такие видные математики Европы, как П. Аппель, М. Кантор, Г. Гальдеано, Ф. Клейн, Г. Миттаг-Леффлер, А. Пуанкаре, Ф. Тейшейра.

улучшение школьных помещений, устройство школьных садов, устройство повторительных занятий, организацию складов для продажи книг и другие вопросы.

В губернском земском собрании А. В. Васильев принимал участие во всех комиссиях по народному образованию, а именно, участвовал в устройстве воскресно-повторительных классов, образовании волостных училищных библиотек и фонда выдачи ссуд на постройку школьных зданий.

Среди экономических вопросов А. В. Васильева интересовали проблемы продовольственной системы, в связи с чем он на протяжении нескольких лет был членом ревизионной комиссии по продовольственному вопросу и составлял доклады. Эта работа также послужила стимулом для его участия вместе с Л. И. Грассом и Н. Ф. Анненским в разработке вопроса о страховых премиях при системе страхования посевов. Составленные им доклады способствовали изданию «Материалов для сравнительной оценки земельных угодий в уездах Казанской губернии», заключающих в себе экономическое описание губернии, а также учреждению продовольственно-экономической комиссии, целью которой было изучение экономического благосостояния населения. Однако, в силу того, что существенное внимание он уделял вопросу о расширении крестьянского землевладения, а это не соответствовало интересам большинства членов совета, он был вынужден в 1890 г. оставить земскую деятельность. Кроме того, А. В. Васильев длительное время состоял почетным мировым судьей Казанского и Свияжского уездов.

Также А. В. Васильев регулярно публиковал заметки на общественные темы в местных казанских изданиях: «Волжско-Камский вестник», «Казанский биржевой листок», «Волжский вестник».

В 1896 г. А. В. Васильев был выбран гласным Казанской Городской Думы, а в 1901 г. – снова гласным Свияжского Уездного и Казанского Губернского Земских Собраний. В 1904-1905 гг. он принимал активное участие в земских съездах, а в 1906 г. был избран членом Первой Государственной Думы от Казанской губернии.

1.3. Деятельность в Санкт-Петербурге

В начале 1906 года А. В. Васильев был избран от Казанской губернии членом Первой Государственной Думы, первое заседание которой состоялось в Петербурге 27 апреля 1906 года. А. В. Васильев принадлежал к партии конституционных демократов и был избран Думой одним из шести участников международной парламентской конференции в Лондоне. Там делегация из России должна была поддержать идею международного парламента, главным назначением которого было бы разрешение спорных политических вопросов мирным путем.

Деятельность Первой Думы была не долгой – 6 июля 1906 года она была распущена указом императора Николая II. В это время А. В. Васильев не прекращал состоять профессором физико-математического факультета Казанского университета, лишь числился на этот период в долгосрочной командировке – с 20 августа 1905 года по 20 августа 1906 года, и после роспуска Думы возвратился в Казань, чтобы продолжить научную и преподавательскую деятельность.

В октябре 1906 года декан физико-математического факультета Казанского университета Александр Михайлович Зайцев (профессор химии, член-корреспондент Петербургской Академии наук), подал в Совет факультета прошение о снятии с себя обязанностей декана в силу того, что он не обладает *«достаточным запасом сил и здоровья для одновременного исполнения обязанностей по должности декана и профессора по кафедре химии»* [79, оп. Совет, д. 11359, л. 1]. Выборы нового декана были проведены 31 октября 1906 года, и по их результатам 24 ноября 1906 года деканом физико-математического факультета был утвержден заслуженный профессор А. В. Васильев.

Однако в должности декана физико-математического факультета А. В. Васильев проработал недолго – лишь до февраля 1907 года, потому что 30 января 1907 года он, а также профессор медицинского факультета Николай

Александрович Миславский и профессор юридического факультета Андрей Антонович Пионтковский были избраны от Казанского университета выборщиками в реформированный Государственный Совет. В соответствии с процедурой избрания выборных членов Совета эти лица вместе с выборщиками от других императорских университетов и Академии Наук должны были собраться 7 февраля 1907 года в Петербурге для избрания 6 членов, которые будут представлять Академию наук и университеты в Государственном Совете. В число избранных членов вошел и А. В. Васильев, и с февраля 1907 года стал членом Государственного Совета (см. прил. Б, Рисунок 11). С 1908 г. А. В. Васильев состоял членом Финансовой комиссии, кроме того, входил в Комиссию по рассмотрению вопросов народного образования, а также Комиссию по законопроекту о волостном земстве. По своим политическим взглядам он относился к левой оппозиционной группе, возглавляемой профессором Петербургского университета, социологом Максимом Максимовичем Ковалевским. Отметим также, что в 1910–1914 гг. А. В. Васильев был членом Санкт-Петербургской городской Думы.

В связи с необходимостью постоянного пребывания в Санкт-Петербурге А. В. Васильев переводится из Казани в Санкт-Петербургский университет: с 1 июля 1907 года он состоит приват-доцентом на физико-математическом факультете. Здесь он читает на математическом отделении факультативные курсы «Теория групп» и «Теория иррациональных чисел», а также на химическом отделении – обязательные курсы «Основы высшей математики», «Аналитическая геометрия и введение в анализ» и факультативный курс «Введение в математическую химию». Также в этот период А. В. Васильев преподает в Педагогической академии, где ведет курс «Обзор важнейших вопросов философии математики». В декабре 1910 года А. В. Васильев по рекомендации Константина Александровича Поссе становится профессором на Высших (бестужевских) женских курсах [105].

В период с 1913 по 1915 гг. совместно с П. С. Юшкевичем А. В. Васильев выпускал серию сборников «Новые идеи в математике» [80]. Во вступлении к

первому тому А. В. Васильев сформулировал цель издания как ознакомление широкой аудитории с новыми математическими идеями и установление их связи с существующими теориями. В каждом сборнике работы объединены общей темой из числа таких, как «Пространство и время», «Учение о числе», «Принцип относительности с математической точки зрения», «Теория множеств Георга Кантора», «Математика и философия», «Начала геометрии». Авторами выступили известные европейские математики и философы науки: Э. Мах, А. Пуанкаре, П. Ланжевэн, Г. Минковский, М. Лауэ, Ф. Клейн, Г. Кантор, Б. Рассел, Г. Грассман, В. Вундт и др.

Наряду с В. В. Бобыниным и И. Ю. Тимченко А. В. Васильев был одним из основоположников фундаментальных историко-математических исследований в России. Вот некоторые из его трудов: «Из истории и философии понятия о целом положительном числе» (1891) [25], «Целое число. Исторический очерк» (1919) [48], «Математика. Вып. 1 (1725-1826-1863)» (1921) [29]. К этому списку примыкает также вышедшая в 1923 году книга «Пространство, время, движение» [43], в которой А. В. Васильев разворачивает впечатляющую панораму развития геометрических и физических представлений человечества, начиная с древнейших времен и заканчивая современными философскими концепциями, и, таким образом, подводит читателя к новейшим взглядам на связь между пространством и временем. О признании мировым научным сообществом заслуг А. В. Васильева в области истории математики свидетельствует избрание его в 1929 году членом-корреспондентом созданной в 1928 г. Международной академии истории науки.

Работая в Петербурге, А. В. Васильев продолжает практически ежегодно ездить за границу, принимая активное участие в научной жизни Европы, в частности, посещает конгресс немецких естествоиспытателей в Дрездене летом 1907 года, международный конгресс по математике весной 1908 года в Риме (где его избирают одним из вице-президентов), международный конгресс по философии в Гейдельберге в августе 1908 года, международный конгресс математиков в Кембридже летом 1912 года.

А. В. Васильев был избран председателем I-го Всероссийского съезда преподавателей математики, проходившего в Санкт-Петербурге с 27 декабря 1911 г. по 3 января 1912 г. В своей приветственной речи А. В. Васильев обратил внимание на чрезвычайную важность обмена педагогическим опытом в свете возрастающей актуальности этого направления в международном масштабе. В качестве председателя А. В. Васильев открыл первое заседание съезда речью «Математическое и философское преподавание в средней школе» [31], в которой познакомил присутствующих с современными европейскими взглядами на вопрос о необходимости обязательного преподавания основ математики и философии школьникам, а также высказал свое видение принципов преподавания этих дисциплин в средней школе.

В июне 1919 года А. В. Васильев становится профессором по кафедре математики в Педагогическом институте при Петроградском университете, а вскоре после этого – деканом физико-математического факультета института (в связи с избранием предыдущего декана, профессора зоологии Владимира Михайловича Шимкевича, ректором Петроградского Университета). Здесь А. В. Васильев читает курсы «Основы высшей арифметики», «Теория плоских чисел и геометрия (плоскостные и пространственные решетки)», «Основы высшей математики», «История математического естествознания», а также ведет педагогический семинар [102]. С 1 декабря 1919 года А. В. Васильев также является заведующим математическим кабинетом Педагогического Института.

В 1920 г. А. В. Васильев стал организатором воссоздания Петроградского физико-математического общества²⁵. Сначала общество существовало в форме математического кружка при Педагогическом институте, организованного А. В. Васильевым, а затем, с 14 мая 1921 г., как самостоятельное Петроградское физико-математическое общество. Главной задачей Общества было содействие научному общению всех лиц, интересующихся математикой и математическим образованием. При Обществе работала Педагогическая секция, членами которой

²⁵ Подробнее об организации Петроградского физико-математического общества и его деятельности в 1921-1923 гг. см. в п. 3.2. «А. В. Васильев и Петроградское физико-математическое общество».

были учителя средних учебных заведений и преподаватели ВУЗов. В письме к академику П. П. Лазареву 15 мая 1921 г. А. В. Васильев писал: *«Вчера Петроградское физико-математическое общество организовалось, т. е. выбран президиум (товарищи мои как председателя - Я. В. Успенский и Ю. А. Крутков, ученый секретарь - В. К. Фредерикс) и начинает свою деятельность 25 мая»* (цит. по [59, с. 320]). Одной из первоочередных задач Общества было восстановление и развитие научных связей с Московским Математическим обществом. Математики Москвы с готовностью откликнулись на эту инициативу – 1 октября 1921 г. Б. К. Млодзеевский, исполняя обязанности президента Московского Математического общества, писал А. В. Васильеву: *«прошу Вас принять выражение глубокого к Вам уважения и вместе с тем истинного удовольствия, что члены нашего общества могли принять участие в трудах нашего молодого собрата - Петроградского Физико-Математического общества»* [82, оп. 1, д. 89, л. 1].

В 1922 году Обществом было проведено специальное заседание, посвященное Д. Гильберту, на котором А. В. Васильев выступил с докладом «Гаусс, Гельмгольц, Гильберт»²⁶, отметив выдающееся влияние этих ученых на развитие математики в XIX столетии. В феврале 1923 года на заседании, посвященном памяти А. А. Маркова, А. В. Васильев и В. А. Стеклов выступили со вступительной речью, в которой охарактеризовали талант и оригинальность личности А. А. Маркова.

1.4. Деятельность в Москве

Революция 1917 г. и гражданская война принесли с собой множество перемен. Васильев, придерживающийся либерально-демократических взглядов, не мог, как прежде, продолжать активную научную деятельность, участвовать в международных научных съездах, гораздо сложнее стало поддерживать контакты с зарубежными математиками.

²⁶ Текст доклада не сохранился.

В 1923 году он переехал в Москву, где продолжил преподавательскую деятельность в Московском Университете. В фонде Московского университета ЦГАМ ([104, оп. 5, д. 116, л. 7]) содержится ходатайство А. В. Васильева, направленное в физико-математический факультет:

«Переезд по личным и семейным обстоятельствам из Петрограда в Москву побуждает меня просить факультет ходатайствовать о зачислении меня в число внештатных профессоров Московского университета. Надеюсь, что улучшение моего здоровья ²⁷ даст мне возможность и в Московском университете быть полезным делу преподавания чистой математики, которому я служил в течение сорока девяти лет в университетах Казанском и Петроградском.

Проф. А. Васильев.

20 ноября 1923 г.».

Ходатайство было поддержано предметной комиссией по математике (возглавляемой Д. Ф. Егоровым) и направлено в Правление I МГУ.

Среди архивных материалов Московского университета сохранилось дело «О разрешении А. В. Васильеву продолжать чтение курсов по кафедре математики на правах сверхштатного профессора» [4, оп. 1л, дело 292, л. 2]. В деле содержится документ следующего содержания:

«В отдел ВУЗ Главпрофобра

Вследствие представления Физ.-Мат. ф-та, основанного на постановлении предметной комиссии по математике, Правление I МГУ, согласно постановлению своему от 12.VI. с.г., просит отдел ВУЗ Главпрофобра возбудить на основании Положения о научных работниках ВУЗ ходатайство о разрешении достигшему предельного возраста и получающему пенсию б. профессору Ленинградского Университета А. В. Васильеву продолжать в I МГУ чтение курсов по кафедре математики на правах сверхштатного профессора без содержания.»

²⁷ По-видимому, в тот период А. В. Васильев уже страдал ишемической болезнью сердца, ставшей причиной его кончины в 1929 году.

Записка была написана, предположительно, в 1924 году и проясняет обстоятельства принятия профессора А. В. Васильева в число преподавателей университета. На момент написания этого документа А. В. Васильеву был 71 год, и он не мог претендовать на штатную должность, поэтому по постановлению Правления МГУ от 7 января 1926 г. был принят на сверхштатную должность для чтения планового курса «Основы арифметики и алгебры» во 2-ом триместре 1925–1926 академического года. А в феврале 1926 г. Правлением МГУ было удовлетворено ходатайство Физико-математического факультета о разрешении оплачивать А. В. Васильеву чтение данного курса.

Помимо работы в Московском университете А. В. Васильев принимал участие в заседаниях Общества испытателей природы, а также являлся председателем Московского научно-педагогического математического кружка²⁸ (в котором в феврале 1925 года было организовано празднование по поводу 50-летия его педагогической деятельности). Речь, произнесенная А. В. Васильевым в день празднования, впоследствии была опубликована в журнале «Математическое образование» [30]. В ней он отмечает отличительные черты современной математики – стремление к строгости и ясности ее оснований, развитие новых областей математики, ранее находившихся на периферии поля зрения ученых, и философско-историческую направленность математических исследований.

Также необходимо отметить активную деятельность А. В. Васильева в составе организованной Научно-исследовательским институтом математики и механики при Московском Университете редакционной Комиссии по изданию трудов Н. И. Лобачевского, приуроченному к столетию с момента открытия неевклидовой геометрии (председателем этой Комиссии был Д. Ф. Егоров, в нее также входили В. Ф. Каган, А. П. Котельников и Н. А. Глаголев). Комиссия была международной, для участия в ней иностранным ученым было выслано более 40 приглашений (например, известно, что свое согласие на участие в ее деятельности

²⁸ Московский математический научно-педагогический кружок – Педагогическое общество при Московском университете, организованное в 1906 г. по инициативе Б. К. Млодзеевского, Н. Е. Жуковского, Н. В. Бугаева. Первым председателем его был Б. К. Млодзеевский.

дали Ф. Клейн, Д. Гильберт, Ф. Энгель, М. Паш, Г. Вейль, Г. Миттаг-Леффлер). Однако к намеченному сроку издание осуществить не удалось – полное собрание сочинений Лобачевского было издано гораздо позже под редакцией В. Ф. Кагана в 1946–1951 гг.

В 1926 году А. В. Васильев принимает участие в организованном Казанским Университетом и Казанским физико-математическим обществом праздновании столетия открытия неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским: он выступает в Казани с торжественной речью «Идеи и заветы Лобачевского» [34]. В 1927 году, подводя своеобразный итог трудоемкого и кропотливого процесса изучения биографии и наследия Н. И. Лобачевского, А. В. Васильев завершает книгу «Жизнь и научное дело Лобачевского» [33] ²⁹.

Научная деятельность А. В. Васильева в этот период преимущественно была сосредоточена на переводах статей зарубежных авторов. В их трудах его особенно интересовало направление биологической психологии в контексте его связи с проблемой восприятия пространства. В 1926 году он послал доклад на международный философский конгресс в Бостоне ³⁰ «The acquisitions and enigmas of the Philosophy of Nature» [160]. В нем он затрагивает вопрос о том, что если рассмотреть культурного человека как результат длительной эволюции, то человеческие концепции восприятия пространства и времени тоже могут считаться результатом биологического синтеза. Этой же тематике посвящена его другая работа, вышедшая в 1929 году в журнале «Scientia», – «Development des concepts scientifiques de l'espace» [151], где А. В. Васильев касается проблемы полезности исследования психической жизни животных, как шага на пути изучения человеческого восприятия пространства. В письме к В. И. Вернадскому от 26 сентября 1926 г. А. В. Васильев пишет: *«Не удалось мне воспользоваться исключительно благоприятным случаем и попасть в Америку. Хлопоты о паспорте, беготня по библиотекам довели меня до серьезных сердечных*

²⁹ Книга была напечатана, однако весь ее тираж был уничтожен властями (вероятнее всего, по причине политической «неблагонадежности» ее автора; подробнее об этом см. в [18]). В 1992 г. она была восстановлена профессорами В. А. Бажановым и А. П. Широковым по сохранившемуся оттиску верстки.

³⁰ VI Международный философский конгресс проходил в Бостоне (США) 13-17 сентября 1926 г.

припадков³¹. Под влиянием отчасти Ваших статей, отчасти некоторых биологических вопросов, которых я коснулся в своем докладе для философского конгресса, в Узкое³², где надеюсь долечиться, я взял книгу Radl'я³³ *Geschichte der biologischen Theorien*³⁴» [6, оп. 3, д. 237, л. 10].

Интересен тот факт, что в это же время оканчивал школу и готовился к поступлению в ВУЗ внук А. В. Васильева Л. В. Крушинский, в котором с детства проявилось увлечение биологией. Интерес к биологии перерос впоследствии в серьезную научную работу в области генетики, и Л. В. Крушинский стал выдающимся биологом, членом-корреспондентом АН СССР.

В 1927 году А. В. Васильев принял участие во Всероссийском съезде математиков в Москве, где выступил с приветственной речью как председатель Московского научно-педагогического математического кружка и, кроме того, сделал доклад «Следует ли писать историю математики в России» [35]. В своем докладе он обратил внимание на то, что во множестве случаев математические работы российских ученых проходили незамеченными математиками других стран. Например, в английской брошюре «Русский дар миру», описывающей вклад русских ученых в мировую культуру, совсем не упоминается имя П. Л. Чебышева, а в отчете Д. Гильберта по теории алгебраических чисел отсутствует упоминание о работах Е. И. Золотарева. В связи с этим важным направлением деятельности он считает изучение оригинальных работ русских ученых, чему должно способствовать издание собраний сочинений ученых, чьи труды на долгое время определили вектор математических исследований. Затем А. В. Васильев останавливает внимание на проекте Академии наук по изданию истории наук в России, в котором он принимает участие в части составления

³¹ А. В. Васильев страдал ишемической болезнью сердца.

³² Узкое – усадьба на юго-западе современной территории Москвы, после революции 1917 г. в качестве санатория была передана Центральной комиссии по улучшению быта ученых, позднее – АН СССР.

³³ Emanuel Rádl (1873 – 1942) – чешский биолог, философ и историк науки.

³⁴ По-видимому, речь идет о книге Э. Радля «*Geschichte der biologischen Theorien*» (1905-1909), посвященной историческому и философскому анализу биологических концепций.

очерка по истории математики в России (см. подробнее п. 2.2. История математики в творчестве А. В. Васильева).

В 1928 году А. В. Васильев собирался посетить международный математический конгресс в Болонье, однако было необходимо получить разрешение, а также субсидию на поездку: *«Сегодня подал просьбу о командировке на математический конгресс в Болонье в сентябре. На съезде отдельная секция истории математики. Не поможет ли мне Академия по представлению Комиссии истории знаний получить командировку и субсидии, т. к. без последних я ехать не могу. С радостью был бы делегирован Вашей Комиссией и вероятно сделал бы доклад о математике в России»* (из письма к В. И. Вернадскому от 9 декабря 1927 года [6, оп. 3, д. 237, л. 12]). Кроме того, А. В. Васильев, судя по всему, обращался за помощью в этом вопросе к С. А. Чаплыгину: *«Моя командировка на Конгресс встретила большие препятствия, но благодаря вмешательству С. А. Чаплыгина я еще не потерял надежду на разрешение, но субсидии я от Наркомпроса очевидно не получу и вероятно и выдача паспорта будет стоить мне больших хлопот»* (из письма к В. И. Вернадскому от 5 мая 1928 года [6, оп. 3, д. 237, л. 13]). В итоге поездка не состоялась (по-видимому, главным образом, свою роль сыграла политическая «неблагонадежность» А. В. Васильева). В письме от 16 января 1929 года Н. Н. Лузин выражает сожаление по поводу отсутствия А. В. Васильева на конгрессе: *«На Конгрессе, в Bologna, не видя Вас, мы были сильнеешим образом огорчены и опечалены за Вас, не видя Вас в числе приехавших членов Конгресса. Сначала мы подумали, что Вам помешало нездоровье. Оказалось, что все было наоборот, и что именно сильно опечалившее нас нездоровье было обусловлено неприездом. Мы глубоко скорбим, что все так вышло»* [82, оп. 1, д. 88, л. 1].

А. В. Васильев скончался в 1929 году. В российских и иностранных научных изданиях была опубликована серия некрологов [125, 137, 140, 143]. В них А. В. Васильев характеризуется, как ученый широкого круга интересов, блестящий лектор и талантливый педагог.

А. В. Васильев был женат на Александре Павловне Максимович³⁵, дочери видного деятеля народного образования в тверской губернии, организатора земских школ – Павла Павловича Максимовича. У них было четверо детей – два сына и две дочери (см. прил. Б, Рисунок 12). Старший сын Николай оставил заметный след в истории логики, став творцом так называемой «воображаемой логики» (подробнее см. [9], [49]). Средний сын Сергей был крупным инженером-путейцем, близким другом А. Ф. Керенского; после Октябрьской революции он эмигрировал в Югославию, а затем – в США. Старшая дочь Елена вышла замуж и также уехала в США. Младшая дочь Анна жила в Москве и воспитала сына – известного советского биолога, члена-корреспондента АН СССР Л. В. Крушинского.

Школьным товарищем Л. В. Крушинского был советский математик, член-корреспондент АН СССР А. А. Ляпунов³⁶. Интересны воспоминания Л. В. Крушинского о семье А. А. Ляпунова: *«Мое знакомство с Алешей произошло в 1924 г. В Москву приехал и стал жить в нашей семье мой дед известный казанский математик профессор А. Васильев. Вскоре после своего приезда он навестил семью Ляпуновых, с которыми был знаком по Казани.*

Помню, как дед, придя от Ляпуновых, восторженно говорил об этой семье, в которой сохранились лучшие традиции русской интеллигенции... Дед говорил, что они с Алешей уже тогда вели беседу о математике... с 1924–1925 года Алеша начал приходить к деду и они вели беседы о математике» (цит. по [53]).

Могила А. В. Васильева находится в Москве на Введенском кладбище (участок №4), там же впоследствии были похоронены А. А. Крушинская, ее сын Л. В. Крушинский (внук А. В. Васильева) и его жена Н. А. Розанова.

³⁵ Брат супруги А. В. Васильева – Владимир Павлович Максимович (1850 – 1889) – также был видным математиком. Математическое образование он получил в Петербургском университете и Парижской политехнической школе. В докторской диссертации доказал теорему о невозможности выражения в квадратурах интеграла общего линейного дифференциального уравнения второго порядка.

³⁶ Ляпунов Алексей Андреевич (1911 – 1973) - советский математик, один из основоположников кибернетики, член-корреспондент АН СССР. Специалист в области теории функций вещественного переменного и математических вопросов кибернетики. Основные труды относятся к теории множеств, теоретическим вопросам программирования, математической лингвистике, математической биологии.

ГЛАВА 2. НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

А. В. ВАСИЛЬЕВА

2.1. Математические работы

2.1.1. Сочинение *pro venia legendi*

Осенью 1874 года А. В. Васильев представил физико-математическому факультету Казанского университета сочинение *pro venia legendi* «Об отделении корней совокупных уравнений».

Задача отделения корней системы уравнений заключается в том, чтобы найти число точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, \dots, t, u) = 0, \\ f_2(x, y, z, \dots, t, u) = 0, \\ \dots \\ f_n(x, y, z, \dots, t, u) = 0, \end{cases}$$

а также условию $f_0(x, y, z, \dots, t, u) < 0$, где f_i ($i = 0, \dots, n$) – алгебраические функции от n переменных.

С помощью функции f_0 ограничивается расположение корней в пространстве, что дает возможность находить их приближенные значения.

Вопросу об отделении корней для системы двух уравнений с двумя неизвестными были посвящены работы О. Коши «Calcul des indices des fonctions» (1837) [118], Ш.-Ф. Штурма и Ж. Лиувилля «Note sur un théorème de M. Cauchy relatif aux racines des équations simultanées» (1837) [149] и др. (подробнее об истории задачи отделения корней см. в п. 2.1.3 «Докторская диссертация»).

В общем виде задача отделения корней системы n уравнений с n неизвестными решена Л. Кронекером в работе «Über Systeme von Functionen mit mehreren Variabeln» (1869) [138].

Цель работы А. В. Васильева заключалась в изложении теории характеристик Л. Кронекера, а также в рассмотрении ее приложений. Необходимость такого изложения обусловлена тем, что в своем сочинении Л. Кронекер следовал весьма лаконичному стилю изложения, в силу чего некоторые доказательства

сформулированных им утверждений были опущены. Посвятив первую часть работы изложению результатов Л. Кронекера, во второй части А. В. Васильев демонстрирует их применение для вывода теорем О. Коши, Ш.-Ф. Штурма и Ж. Лиувилля, касающихся отделения корней систем двух уравнений с двумя неизвестными.

Итак, рассмотрим систему $n + 1$ функций n переменных $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$. Пользуясь геометрическим языком, поставленную задачу можно представить как нахождение числа точек пересечения n поверхностей $n - 1$ измерения, лежащих в пространстве, ограниченном $(n + 1)$ -ой поверхностью $n - 1$ измерения.

Через $[hk]$ обозначается кривая, которая получается, если положить равными 0 $n - 1$ функций системы (кроме функций f_h и f_k). С учетом совпадения линий при перемене индексов местами получается, что, таким образом, задается $\frac{n(n+1)}{2}$ кривых. Направление каждой кривой фиксируется исходя из условия, что для произвольной функции Φ знак дифференциала $d\Phi$ при перемещении в положительном направлении кривой должен совпадать со знаком функционального определителя ³⁷ функций $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_n$ (обозначенного Δ_k), в котором функция f_h заменена произвольной функцией Φ (в работе А. В. Васильева приводится подробное доказательство корректности данного определения положительного направления кривой, то есть независимости его от произвольно взятой функции Φ).

Относительно любой пары функций f_h и f_k пространство можно разделить на внешнее и внутреннее: во внешнем пространстве $f_h \cdot f_k > 0$, а во внутреннем $- f_h \cdot f_k < 0$. Все точки пересечения кривой $[hk]$ с поверхностью $f_h = 0$ подразделяются на два вида: точки, в которых кривая $[hk]$ переходит из внешнего

³⁷ Функциональным определителем системы функций f_1, f_2, \dots, f_n называется определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dz_1} & \dots & \frac{df_n}{dz_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_1}{dz_n} & \dots & \frac{df_n}{dz_n} \end{vmatrix} = |f_{gh}| \quad (f_{gh} = \frac{df_g}{dz_h})$$

пространства во внутреннее – точки входа, и точки, в которых кривая переходит из внутреннего пространства во внешнее – точки выхода (Рисунок 2).

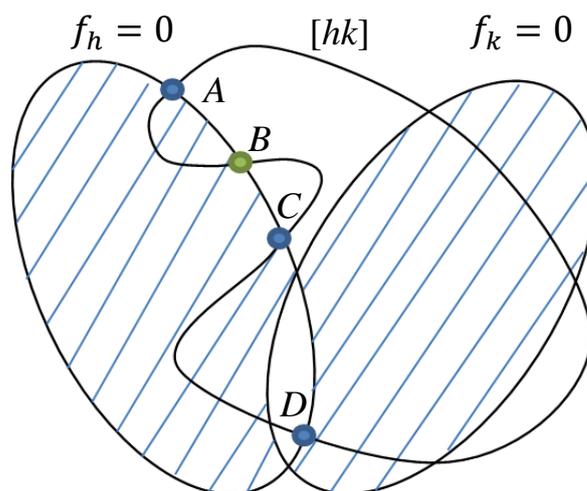


Рисунок 2. A, C, D - точки входа; B - точка выхода

Теперь проведенные построения позволяют ввести ключевое понятие теории – понятие характеристики Кронекера для системы функций, которая определяется как половина

разности между числом точек входа и точек выхода. Данная величина является характеристичной для заданной системы функций в силу того, что, как будет показано ниже, ее значение не зависит от выбора индексов h и k .

Доказательство независимости характеристики систем функций от выбора индексов h и k состоит из двух частей.

Утверждение 1. Характеристики, получаемые при рассмотрении кривой $[hk]$, совпадают между собой в случае, если h принимает все возможные значения, а k остается неизменным.

Доказательство строится на понятии характера точки. Характером точки $(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}, \dots, \zeta_n^{(k)})$, определяемой n уравнениями $f_i(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}, \dots, \zeta_n^{(k)}) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n$), называется единица, взятая с тем знаком, который имеет в этой точке функциональный определитель Δ_k (в предположении, что он не равен нулю). Относительно характера точки доказывается две леммы.

Лемма 1 утверждает, что алгебраическая сумма характеров всех точек пересечения кривой $[hk]$ с поверхностью $f_h = 0$ равна нулю. Доказательство ее опирается на свойства характера точки, непосредственно вытекающие из его определения.

Утверждение **леммы 2** заключается в том, что алгебраическая сумма характеров тех точек ζ^k , для которых $f_k < 0$, равна характеристике системы

функций $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$. Эта лемма доказывается с использованием леммы 1, а также других свойств характера точки.

Утверждение 2. Характеристики, получаемые при рассмотрении кривых $[hk]$ и $[kh]$, совпадают.

Идея доказательства этого утверждения состоит в рассмотрении системы функций $f_0, f_1, \dots, f_{h-1}, f_h \cdot f_k, f_{h+1}, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_n$, функциональный определитель которой равен $f_k \cdot \Delta_k - f_h \cdot \Delta_h$.

На основании этих двух утверждений может считаться доказанной теорема о постоянстве характеристики для данной системы функций.

Дальнейшее изложение посвящено установлению связи между характеристикой системы функций и задачей об отделении корней системы уравнений, задаваемой этими функциями.

Лемма. Характеристика системы функций $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)$ равна полуразности между числом точек ξ , представляющих общие решения совокупных уравнений $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$, для которых $\Delta_0 f_0 < 0$, и числом тех, для которых $\Delta_0 f_0 > 0$.

Доказательство справедливости этой леммы основано на интерпретации точек ξ как точек входа и выхода относительно поверхности $f_0 = 0$.

Следствие. Характеристика системы функций $(\Delta_0 f_0', f_1, f_2, \dots, f_n)$ равна полуразности между числом точек ξ , соответствующих общим решениям уравнений $f_1 = \dots = f_n = 0$, для которых $\Delta_0^2 f_0' < 0$ (т.е. $f_0' < 0$), и числом тех, для которых $\Delta_0^2 f_0' > 0$ (т.е. $f_0' > 0$).

Из этого утверждения вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема. Разность между характеристиками системы $(\Delta_0 f_0', f_1, f_2, \dots, f_n)$ и системы $(\Delta_0 f_0'', f_1, f_2, \dots, f_n)$ выражает число точек ξ , лежащих между двумя системами $f_0' = 0$ и $f_0'' = 0$ (то есть для которых $f_0' < 0$ и $f_0'' > 0$).

Таким образом, с помощью этой теоремы вопрос об отделении корней системы уравнений сводится к вычислению характеристики некоторой системы функций.

Дальнейшая цель работы А. В. Васильева будет заключаться в приложении этого результата к отделению корней системы двух уравнений.

Переформулированный результат для системы из двух функций от двух переменных выглядит следующим образом.

Теорема 1. Разность между числом общих решений уравнений $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, лежащих внутри некоторого контура $f_0 = 0$, для которых функциональный определитель $\frac{df_1}{dz_1} \frac{df_2}{dz_2} - \frac{df_2}{dz_1} \frac{df_1}{dz_2}$ больше 0, и числом тех решений, лежащих внутри того же контура, для которых он меньше 0, выражается характеристикой системы функций (f_0, f_1, f_2) .

В рассматриваемом частном случае двух функций понятие характеристики может быть заменено сходным по смыслу понятием интегрального указателя Коши (индекса Коши):

$$\mathbb{J}_{t=t_1} \frac{f_1}{f_2} = \begin{cases} +1, & \text{если при } t = t_1 \text{ } f_2(t) = 0 \text{ и } \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \text{ меняет знак с } + \text{ на } - \\ 0, & \text{если } \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \text{ не меняет своего знака} \\ -1, & \text{если при } t = t_1 \text{ } f_2(t) = 0 \text{ и } \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \text{ меняет знак с } - \text{ на } +. \end{cases}$$

Очевидно, что характеристика системы функций (f_0, f_1, f_2) может быть выражена посредством введенного понятия как $\frac{1}{2} \mathbb{J} \frac{f_1}{f_2}$ (при положительном направлении обхода контура $f_0 = 0$).

Таким образом, установлена справедливость **Теоремы 2** о том, что разность между числом общих решений уравнений $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, лежащих внутри некоторого контура $f_0 = 0$, для которых функциональный определитель $\frac{df_1}{dz_1} \frac{df_2}{dz_2} - \frac{df_2}{dz_1} \frac{df_1}{dz_2}$ больше 0, и числом тех решений, лежащих внутри того же контура, для которых он меньше 0, выражается половиной интегрального указателя от дроби $\frac{f_1}{f_2}$, взятого по контуру $f_0 = 0$ в положительном направлении (т. е. $\frac{1}{2} \mathbb{J} \frac{f_1}{f_2}$).

А. В. Васильев отмечает, что данная теорема была сформулирована Ш.-Ф. Штурмом и Ж. Лиувиллем в работе «Note sur un théorème de M. Cauchy relatif

aux racines des équations simultanées» (1837). Доказательство ее было дано Коши в сочинении «Calcul des indices des fonctions» (1837).

Полученные результаты находят свое применение, в частности, в задаче определения числа комплексных корней алгебраического уравнения для функции $f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$.

Теорема 3. Число общих решений совокупных уравнений $\varphi(x, y) = 0, \psi(x, y) = 0$, т. е. число комплексных корней уравнения $f(z) = 0$, лежащих внутри некоторого контура $f_0 = 0$, равно половине интегрального указателя от дроби $\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$, взятому по контуру в положительном направлении.

Упрощение формулировки теоремы 3 по сравнению с теоремой 2 происходит за счет справедливости для функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ условий Коши-Римана, обеспечивающих постоянство знака функционального определителя двух функций.

Из теоремы 2 может быть получена теорема, определяющая точное число корней системы уравнений, лежащих в заданном контуре, если верно, что внутри контура функции f_2 и $J = \frac{df_1}{dz_1} \frac{df_2}{dz_2} - \frac{df_2}{dz_1} \frac{df_1}{dz_2}$ не обращаются в 0 в одних и тех же точках. В этих условиях число общих решений уравнений $f_1 = 0, f_2 = 0$ внутри контура равняется числу общих решений уравнений $Jf_1 = 0, f_2 = 0$. Вычисление показывает, что функциональный определитель новой системы в точках $Jf_1 = 0, f_2 = 0$ всегда больше нуля.

Теорема 4. Число общих корней уравнений $f_1 = 0, f_2 = 0$, лежащих внутри некоторого контура $f_0 = 0$, равно половине интегрального указателя от дроби $\frac{Jf_1}{f_2}$, взятого по контуру в положительном направлении (J обозначает функциональный определитель функций f_1, f_2), если только выполнено условие, что внутри контура нет точек, соответствующих общим решениям уравнений $f_2 = 0$ и $J = 0$.

Оставляя за рамками работы теорию вычисления интегральных указателей, А. В. Васильев лишь замечает, что сложность практического применения данной

теоремы заключается в том, что числитель и знаменатель дроби не всегда могут быть выражены рациональными функциями одной независимой переменной.

Таким образом, для системы n уравнений вопрос об отделении корней сводится к вопросу о вычислении характеристики системы функций, который, как показано выше, может быть заменен вопросом о вычислении соответствующего интегрального указателя от частного двух функций.

Подводя итог, представленное сочинение А. В. Васильева можно охарактеризовать как развернутое изложение исследований Л. Кронекера по теории характеристик системы функций, сопровождающееся подробными доказательствами вспомогательных технических результатов (в частности, корректности определения направления кривой $[hk]$, леммы 1, леммы 2 в ходе доказательства независимости характеристики от выбора индексов h и k и др.).

Кроме того, сочинение дополнено демонстрацией приложения общей теории к решению задачи отделения корней в частном случае двух переменных (теоремы 1-4).

2.1.2. Магистерская диссертация

Вернувшись из заграничной командировки, в 1880 году Васильев представил физико-математическому факультету Казанского университета диссертацию на степень магистра «О функциях рациональных, аналогичных с функциями двоякопериодическими».

Во второй половине XIX века широкое развитие получает применение геометрических методов в вопросах теории аналитических функций. В первую очередь, речь идет о геометрических трудах Б. Римана, в частности, о его докторской диссертации «Основания общей теории функций одной комплексной переменной» (1851), в которой появляется понятие римановой поверхности, и аналитическая функция интерпретируется как конформное отображение одной поверхности на другую.

Важным этапом развития геометрической теории функций стало возникновение идеи алгебраизации геометрии, нашедшей отражение в «эрлангенской программе» Ф. Клейна («Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen», 1872).

Одним из направлений исследований в ключе идей Клейна стало изучение функций, инвариантных относительно подгрупп дробно-линейных преобразований комплексной плоскости. Среди таких работ отметим сочинение Р. Дедекинда «Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen» (1877) [122], посвященное функциям, неизменным при преобразованиях аргумента вида $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющими условию $ad - bc = 1$ (модулярная группа преобразований плоскости).

Другой важный класс подгрупп дробно-линейных преобразований составляют *конечные* подгруппы. Их классификации и геометрической интерпретации посвящены труды Ф. Клейна, К. Жордана, П. Гордана.

На пути исследований функций, инвариантных относительно дробно-линейных преобразований, возникает важное дифференциальное выражение, называемое «дифференциальным выражением Шварца» [68],

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\zeta''}{\zeta'} \right)^2,$$

остающееся неизменным при дробно-линейном преобразовании аргумента. Свойствами этого выражения Г. Шварц воспользовался в работе «Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt» (1873) [146] для решения вопроса о том, когда решение уравнения гипергеометрического ряда будет алгебраической функцией.

Исследованию условий алгебраической интегрируемости линейных дифференциальных уравнений второго порядка в общем виде посвящена работа Л. Фукса «Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie» (1876) [127].

Наиболее законченный вид теория функций, инвариантных относительно конечных подгрупп группы дробно-линейных преобразований, приобретает в сочинении Ф. Клейна «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени» (1884) [67]. Эта работа демонстрирует глубокую связь между теорией дробно-линейных преобразований и вопросами дифференциальных уравнений, а также теорией решения алгебраических уравнений.

Помимо фундаментального теоретического значения построенной теории, отметим выдающиеся результаты, найденные методами геометрической теории групп преобразований в структурной кристаллографии. Получение в 1890 г. Е. С. Федоровым (и в 1891 г. – А. Шенфлисом) 230 пространственных групп симметрий кристаллов стало одним из важнейших результатов в классической кристаллографии.

В рассматриваемой работе А. В. Васильев, следуя Л. Фуксу, формулирует цель исследования как выявление условий, при которых линейное дифференциальное уравнение второго порядка имело бы алгебраические решения.

В отчете о научной командировке, составленном для факультета, А. В. Васильев так обосновывает выбор темы исследований, затрагивающей вопросы теории дифференциальных уравнений: *«В особенности интересует меня одно разветвление теории – именно изучение тех условий и критериев, по которым можно судить, имеет ли известное дифференциальное линейное уравнение алгебраические интегралы или нет. Этот вопрос должен предшествовать решению всех других вопросов о дифференциальных линейных уравнениях, так как его решение выделило бы самые простые дифференциальные уравнения, удовлетворяющиеся не трансцендентными, но алгебраическими функциями»* [79, оп. Совет, д. 7525, л. 7].

Обратимся непосредственно к содержанию работы. Условно она может быть поделена на две части. В первой части А. В. Васильев пользуется алгебраическими методами для изучения конечных групп линейных преобразований. К этой части относятся §1 – «Общая теория линейных

преобразований», §2 – «Конечные группы линейных преобразований», §3 – «Геометрическое значение линейных преобразований», §4 – «Рациональные функции, не изменяющиеся от конечных групп линейных преобразований». Вторая часть преимущественно посвящена теории дифференциальных уравнений, в терминах которой А. В. Васильев интерпретирует результаты, полученные в первой части работы. Ко второй части относятся §5 – «Обратные функции и дифференциальные уравнения третьего порядка, интегралами которых служат обратные функции» и §6 – «Связь дифференциальных уравнений третьего порядка с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка».

В первой главе А. В. Васильев вводит понятие дробно-линейного преобразования, композиции преобразований, периодического преобразования.

Вторая глава посвящена понятию группы преобразований, которая определяется как совокупность преобразований, обладающая тем свойством, что *«результат последовательного применения двух каких-либо преобразований находится между преобразованиями той же совокупности»*³⁸ [38, с. 8]. Со ссылкой на результаты Ф. Клейна, П. Гордана и К. Жордана А. В. Васильев дает классификацию конечных групп дробно-линейных преобразований:

1. Группа n преобразований, представимых в виде $\eta' = \eta, \eta' = \varepsilon\eta, \eta' = \varepsilon^2\eta, \dots, \eta' = \varepsilon^{n-1}\eta$, где $\varepsilon^n = 1$.
2. Группа $2n$ преобразований, представимых в виде

$$\eta' = \eta, \eta' = \varepsilon\eta, \eta' = \varepsilon^2\eta, \dots, \eta' = \varepsilon^{n-1}\eta,$$
$$\eta' = -\frac{1}{\eta}, \eta' = -\frac{\varepsilon}{\eta}, \eta' = -\frac{\varepsilon^2}{\eta}, \dots, \eta' = -\frac{\varepsilon^{n-1}}{\eta},$$

где $\varepsilon^n = 1$. Каждое преобразование этой группы может быть выражено с помощью двух основных преобразований: $\eta' = \varepsilon^s\eta$ (где s взаимно просто с n) и $\eta' = -\frac{1}{\eta}$.

3. Группа из 12 преобразований, представимых в виде

³⁸ Существование нейтрального элемента группы и обратного к каждому элементу группы явным образом не оговаривается, но, очевидно, подразумевается.

$$\begin{aligned} \eta' &= \pm\eta, \eta' = \pm\frac{1}{\eta}, \eta' = \pm i\frac{1+\eta}{1-\eta}, \eta' = \pm i\frac{1-\eta}{1+\eta}, \eta' = \pm i\frac{i+\eta}{i-\eta}, \eta' \\ &= \pm i\frac{i-\eta}{i+\eta}. \end{aligned}$$

4. Группа из 24 преобразований, представимых в виде

$$\eta' = i^\rho \eta, \eta' = \frac{i^\rho}{\eta}, \eta' = i^\rho \frac{1+\eta}{1-\eta}, \eta' = i^\rho \frac{1-\eta}{1+\eta}, \eta' = i^\rho \frac{i+\eta}{i-\eta}, \eta' = i^\rho \frac{i-\eta}{i+\eta},$$

где $\rho = \{0, 1, 2, 3\}$.

5. Группа из 60 преобразований, представимых в виде

$$\eta' = \varepsilon^\mu \eta, \eta' = -\frac{\varepsilon^\mu}{\eta}, \eta' = \varepsilon^\mu \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\rho}{\varepsilon^{-\rho}\eta - (\varepsilon - \varepsilon^3)}, \eta' = \varepsilon^\mu \frac{-\varepsilon^{-\rho}\eta + (\varepsilon + \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\rho},$$

где $\mu = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\rho = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\varepsilon^5 = 1$.

Затем А. В. Васильев вводит понятие порядка конечной группы и доказывает теорему о том, что порядок подгруппы является делителем порядка группы.

Следующий параграф посвящен выяснению геометрического смысла представленных групп преобразований. Для этого используется стереографическая проекция комплексной плоскости на поверхность шара, касающегося плоскости OXY в начале координат, расположенного в верхней полуплоскости и имеющего радиус $\frac{1}{2}$. Комплексная величина $\eta = x + iy$ будет представлена на шаре пересечением с его поверхностью луча, идущего от точки $(0, 0, 1)$ к точке $(x, y, 0)$. Таким образом, преобразования комплексной плоскости можно рассматривать как движение точек поверхности шара в трехмерном пространстве. Вопросу классификации конечных групп движений пространства с неподвижной точкой посвящена работа К. Жордана «Memoire sur les groupes de mouvements» (1868) [136]. Согласно полученным в ней результатам эти группы подразделяются на следующие типы:

1. Группа вращений вокруг постоянной оси A на углы $\frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$.

2. Группа, состоящая из вращений вокруг постоянной оси A на углы $\frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$, объединенных с вращением на π вокруг оси, перпендикулярной A (группа вращений диэдра).
3. Группа вращений тетраэдра.
4. Группа вращений октаэдра.
5. Группа вращений икосаэдра.

Используя интерпретацию комплексной плоскости как поверхности шара, Васильев с помощью непосредственной проверки показывает, что указанные группы дробно-линейных преобразований плоскости совпадают с конечными группами движений пространства с неподвижной точкой.

На следующем этапе А. В. Васильев находит инвариантные функции для рассмотренных групп преобразований.

Октаэдрическая группа. 24 преобразования октаэдрической группы переводят друг в друга 6 вершин правильного октаэдра. Без ограничения общности, их можно поместить в точки $0, \infty, +1, -1, +i, -i$, тогда при преобразованиях октаэдрической группы не меняет своего вида уравнение $\eta(1 - \eta^4) = 0$. Представив правую часть в однородной форме при помощи преобразования $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, А. В. Васильев получает бинарную форму $F = \eta_1\eta_2(\eta_1^4 - \eta_2^4)$. Пользуясь теорией ковариантов бинарных форм, он находит еще две формы, инвариантные (с точностью до постоянного множителя) относительно рассматриваемых преобразований: $H = \eta_1^8 - 14\eta_1^4\eta_2^4 + \eta_2^8$ (гессиян формы F) и $T = \eta_1^{12} - 33\eta_1^4\eta_2^4(\eta_1^4 + \eta_2^4) + \eta_2^{12}$ (функциональный определитель форм F и H). Если нули исходной формы представляли собой вершины октаэдра, то нули второй формы будут представлять 8 вершин куба (соответствующих точкам пересечения с поверхностью шара осей симметрии октаэдра, проходящих через центры граней), а нули третьей – 12 точек, соответствующих осям симметрии, проходящим через середины ребер октаэдра.

Тетраэдрическая группа. Вершины правильного тетраэдра могут быть помещены в точки $\frac{1+i}{\sqrt{3}-1}, \frac{1-i}{\sqrt{3}+1}, \frac{-1+i}{\sqrt{3}+1}, \frac{-1-i}{\sqrt{3}-1}$, которые переводятся друг в друга 12 преобразованиями тетраэдрической группы. Таким образом, при этих преобразованиях не изменяет своего вида уравнение $\eta^4 + 2\sqrt{-3}\eta^2 + 1 = 0$. Применяя однородное преобразование переменной, Васильев преобразует правую часть уравнения в бинарную форму $f = \eta_1^4 + 2\sqrt{-3}\eta_1^2\eta_2^2 + \eta_2^4$. Пользуясь теорией ковариантов бинарных форм, он находит еще две формы, инвариантные (с точностью до постоянного множителя) относительно рассматриваемых преобразований: $h = \eta_1^4 - 2\sqrt{-3}\eta_1^2\eta_2^2 + \eta_2^4$ (гессиан формы f) и $t = \eta_1\eta_2(\eta_1^4 - \eta_2^4)$ (функциональный определитель форм f и h). Вторая форма будет соответствовать осям, соединяющим центры граней тетраэдра, а третья – осям, соединяющим середины противоположных ребер тетраэдра.

Икосаэдрическая группа. Вершины правильного икосаэдра могут быть помещены в точки $0, \infty, (\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^\nu, (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^\nu$, где $\nu = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Эти точки являются корнями уравнения $\eta(\eta^{10} + 11\eta^5 - 1) = 0$. Представляя правую часть в однородной форме, А. В. Васильев получает бинарную форму $F = \eta_1\eta_2(\eta_1^{10} + 11\eta_1^5\eta_2^5 - \eta_2^{10})$. Пользуясь теорией ковариантов бинарных форм, он находит еще две формы, инвариантные (с точностью до постоянного множителя) относительно рассматриваемых преобразований: $H = -(\eta_1^{20} + \eta_2^{20}) + 228(\eta_1^5\eta_2^{15} - \eta_1^{15}\eta_2^5) - 494\eta_1^{10}\eta_2^{10}$ (гессиан формы F) и $T = (\eta_1^{30} + \eta_2^{30}) + 522(\eta_1^{25}\eta_2^5 - \eta_1^5\eta_2^{25}) - 10005(\eta_1^{20}\eta_2^{10} - \eta_1^{10}\eta_2^{20})$ (функциональный определитель форм F и H). Вторая форма будет соответствовать осям, соединяющим центры граней икосаэдра, а третья – осям, соединяющим середины взаимно-противолежащим ребер икосаэдра.

Полученные результаты позволяют записать инвариантные функции для рассмотренных групп преобразований:

- (1) $\eta^n = x$ для группы вращений на постоянный угол;
- (2) $\eta^n + \eta^{-n} = x$ для диэдрической группы;

(3) $(1 - 2\sqrt{-3}\eta^2 - \eta^4)^3 - x \cdot (1 + 2\sqrt{-3}\eta^2 - \eta^4)^3 = 0$ для тетраэдрической группы;

(4) $(1 + 14\eta^4 + \eta^8)^3 - x \cdot 108 \cdot \eta^4(1 - \eta^4)^4 = 0$ для октаэдрической группы;

(5) $(-(\eta^{20} + 1) + 228(\eta^{15} - \eta^5) - 494\eta^{10})^3 - x \cdot 1728 \cdot \eta^5(\eta^{10} + 11\eta^5 - 1)^5 = 0$ для икосаэдрической группы.

Вообще, замечает А. В. Васильев, применяя к произвольной точке все преобразования какой-либо группы, можно получить класс точек, переходящих друг в друга под действием преобразований группы. Геометрически это соответствует разбиению поверхности шара осями симметрии рассматриваемых правильных многогранников на сферические треугольники (24 для тетраэдра, 48 для октаэдра, 120 для икосаэдра) – под действием преобразований группы точка, принимая все возможные значения из класса, перемещается между соответствующими треугольниками. Поэтому каждому фиксированному значению инвариантной функции соответствует один класс точек, и, наоборот, целому классу точек соответствует единственное значение функции. Для обозначения инвариантных функций для каждой группы преобразований вводится обозначение $x = v_i(\eta)$, $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда любая функция $F(v_i(\eta))$ так же будет инвариантна относительно преобразований соответствующего типа. Кроме того, в случае если F – дробно-линейная функция, то каждому фиксированному значению F будет соответствовать единственный класс точек.

На следующем этапе А. В. Васильев ставит цель найти дифференциальные уравнения 3-го порядка, которым будут удовлетворять функции $\eta(x)$. Для этого он исследует свойства функции

$$\Psi(\eta, x) = \frac{d^2}{dx^2} \ln \frac{d\eta}{dx} - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \ln \frac{d\eta}{dx} \right)^2,$$

установив относительно нее несколько утверждений (которые проверяются непосредственным вычислением).

Теорема 1. Если $\eta(x)$ и $\eta_1(x)$ связаны между собой соотношением $\eta_1 = \frac{C_1\eta + C_2}{C_3\eta + C_4}$, где C_1, \dots, C_4 – постоянные коэффициенты, то $\Psi(\eta_1, x) = \Psi(\eta, x)$.

Теорема 2. Функция $\Psi(\eta, x)$ может быть представлена в виде

$$\Psi(\eta, x) = \frac{2 \frac{d\eta}{dx} \frac{d^2\eta}{dx^2} - 3 \left(\frac{d^2\eta}{dx^2} \right)^2}{2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2}.$$

Теорема 3. Функция $\Psi(\eta, x)$ может быть представлена в виде

$$\Psi(\eta, x) = - \frac{2}{\sqrt{\frac{dx}{d\eta}}} \frac{d^2}{dx^2} \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}.$$

Исследуя поведение обратной функции $\eta(x)$ в особых точках ($x = 0$, $x = \infty$ для группы вращений, $x = \pm 2$, $x = \infty$ для диэдрической группы, $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ – для тетраэдрической, октаэдрической и икосаэдрической групп), а также пользуясь геометрическими свойствами соответствующих этим функциям преобразований, А. В. Васильев доказывает, что $\eta(x)$, определяемая уравнениями (1)-(5) будет удовлетворять уравнению следующего вида:

$$\Psi(\eta, x) = \frac{1 - \mu^2}{x^2} + \frac{1 - \nu^2}{(1 - x)^2} - \frac{\mu^2 - \lambda^2 + \nu^2 - 1}{x(1 - x)},$$

где величины λ , μ , ν соответственно имеют значения $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1$ – для уравнения (1), $\frac{1}{n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ – для уравнения (2), $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ – для уравнения (3), $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ – для уравнения (4), $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ – для уравнения (5).

Далее А. В. Васильев обращает внимание, что полученные дифференциальные уравнения третьего порядка имеют существенное значение в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Чтобы установить связь между ними, А. В. Васильев доказывает ряд теорем.

Теорема 1. Если y_1 и y_2 – два частных решения линейного дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$, то $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ удовлетворяет уравнению $\Psi(\eta, x) = -2P$.

Это утверждение доказывается непосредственной проверкой с применением результата теоремы 2 предыдущего параграфа.

Теорема 2. Если y_1 и y_2 – два частных решения линейного дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$, то $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ удовлетворяет уравнению $\Psi(\eta, x) = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}$.

Для доказательства этого факта А. В. Васильев применяет подстановку $y = e^{-\frac{1}{2}\int p dx}$, с помощью которой исходное уравнение приводится к виду, рассмотренному в теореме 1.

Далее со ссылкой на Э. Гейне он формулирует теорему о том, что если частное двух решений y_1 и y_2 линейного дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$ является алгебраической функцией, и, кроме того, $e^{-\frac{1}{2}\int p dx}$ – также алгебраическая функция, то и общее решение данного дифференциального уравнения есть алгебраическая функция.

Доказательство ее в значительной степени основано на формуле $y_2 dy_1 - y_1 dy_2 = C e^{-\int p dx}$, опубликованной Н. Абелем в работе «Ueber einige bestimmte Integrale» [113].

Следуя работе Г. Шварца «Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt» [146], А. В. Васильев обобщает полученный результат на случай замены x рациональной функцией $R(t)$, формулируя в окончательном виде утверждение: если линейное дифференциальное уравнение второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$ таково, что $2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}$ может быть представлено в виде $\Psi((R(t), t) + R'(t)^2 \left(\frac{1-\mu^2}{2R(t)^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-R(t))^2} - \frac{\mu^2-\lambda^2+\nu^2-1}{2R(t)(1-R(t))} \right)$, а также $e^{-\int p dx}$ – алгебраическая функция, то решения данного уравнения будут являться алгебраическими функциями.

Кроме того, А. В. Васильев показывает, что, обратно, если общее решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$ есть алгебраическая функция, то частное двух решений $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ должно удовлетворять одному из уравнений (1)-(5) (где $x = R(t)$).

В качестве примера А. В. Васильев приводит уравнение гипергеометрического ряда $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(x-1)} \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} y = 0$, для которого полученные результаты позволяют заключить, что его решение будет алгебраической функцией в случае, если

$$\begin{aligned}(1 - \gamma)^2 &= \mu^2, \\ (\gamma - \alpha - \beta)^2 &= \nu^2, \\ (\alpha - \beta)^2 &= \lambda^2.\end{aligned}$$

Таким образом, вопрос о том, является ли алгебраической функцией решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$, сводится к вопросу о существовании такой рациональной функции $R(t)$, чтобы выражение $\Psi((R(t), t) + R'(t)^2 \left(\frac{1-\mu^2}{2R(t)^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-R(t))^2} - \frac{\mu^2-\lambda^2+\nu^2-1}{2R(t)(1-R(t))} \right))$ было равно $2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}$. Кроме того, все уравнения, удовлетворяющие этому условию, могут быть классифицированы в соответствии с пятью типами (в зависимости от того, какому из уравнений (1)-(5) будет удовлетворять частное двух их решений).

Подводя итог, отметим, что данная работа, несмотря на компилятивный характер изложения, посвящена очень современному сюжету, так как в основе ее лежит алгебраический подход к изучению геометрических свойств пространства – подход, декларированный Ф. Клейном в 1872 году в его знаменитом выступлении «Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen»³⁹ («эрлангенская программа»). В этом смысле работа А. В. Васильева имеет существенное значение как один из источников изложения современных геометрических исследований, на что указывает Ф. Клейн [67, с. 150], приводя ссылку на магистерскую диссертацию А. В. Васильева в числе работ, достаточно полно отражающих исследования по теории конечных групп дробно-линейных

³⁹ Заметим, что «эрлангенская программа» была впервые переведена на русский язык в 1895 году учеником А. В. Васильева – Д. М. Синцовым («Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», Известия Казанского Физико-математического общества, т. 5).

преобразований плоскости и ее связи с вопросами теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ссылку на магистерскую диссертацию А. В. Васильева также приводит С. Е. Савич в работе «О линейных обыкновенных дифференциальных уравнениях с правильными интегралами» (1892) [94], указывая на нее как на одну из немногих работ русских математиков ⁴⁰, относящихся к интегрированию линейных дифференциальных уравнений.

Кроме того, ссылка на диссертацию А. В. Васильева возникает в книге Л. К. Лахтина «Алгебраические уравнения, разрешимые в гипергеометрических функциях» (1893) [72] при обсуждении вопросов, касающихся функций, инвариантных относительно дробно-линейных преобразований.

2.1.3. Докторская диссертация

Продолжением исследований, начатых в работе *pro venia legendi*, стала докторская диссертация А. В. Васильева «Теория отделения корней систем алгебраических уравнений» [46], в основу которой также легла теория характеристик Л. Кронекера.

На этот раз А. В. Васильев ставит своей целью подробное изложение сочинения Л. Кронекера «Über Systeme von Functionen mit mehreren Variabeln» (1869).

Теория характеристик систем функций, ставшая предметом сочинения Л. Кронекера, была построена для решения в общем многомерном случае классической алгебраической задачи об отделении корней систем уравнений многих переменных. Плодотворный аналитический аппарат теории характеристик вскоре нашел применение и в других зарождающихся в тот период областях математики.

⁴⁰ Помимо работы А. В. Васильева, С. Е. Савич также отмечает работы А. А. Маркова «Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique» (1886-1887) [141], М. А. Тихомандрицкого «О гипергеометрических рядах» (1876) [97], В. А. Анисимова «Основания теории линейных дифференциальных уравнений» (1889) [1].

Выявленная в исследованиях Л. Кронекера связь между характеристикой системы функций и числом завиваний поверхности вокруг точки в пространстве была положена А. Пуанкаре в основу понятия индекса замкнутой поверхности и использовалась им в работах по теории устойчивости для описания количества и типов особых точек поверхностей в пространстве («О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1881-1886) [91]).

В дальнейшем в результате исследований Л. Брауэра [116], Х. Хопфа [134] понятие индекса получило развитие в теории векторных полей, где возникло топологическое понятие индекса особой точки векторного поля [92]. Теория векторных полей в современных математических исследованиях играет существенную роль как в топологии, так и в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Интересно также, что в 1930-е годы с новой точки зрения на исследования по теории отделения корней взглянул казанский математик и механик Н. Г. Четаев, посвятивший работы [107, 108] теории характеристик Л. Кронекера и применению ее для решения задачи обращения теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия, то есть доказательства неустойчивости положения равновесия в случае, когда для него силовая функция не имеет максимума. Созданное Н. Г. Четаевым и его учениками научное направление получило название Казанская школа теории устойчивости.

Таким образом, теория характеристик Л. Кронекера оказалась перспективной и плодотворной областью математики, получившей развитие не только в направлении алгебраических исследований, но и в других ее разделах.

Работу А. В. Васильева предваряет обширный исторический очерк, посвященный задаче отделения корней уравнений.

Первые попытки исследований относительно вида и числа корней уравнения $f(x) = 0$, основанные на изучении геометрических свойств кривой $y = f(x)$, стали возможны после того, как в 1637 г. французским ученым Р. Декартом была показана связь геометрических объектов и аналитических выражений [123].

А. В. Васильев указывает, что первый систематический результат в этой области, опирающийся на свойства параболической кривой, был получен шотландским математиком Дж. Стирлингом. Он заметил, что для того, чтобы все корни уравнения были вещественными, необходимо, чтобы вершины кривой, лежащие выше оси x , чередовались с вершинами, лежащими ниже ее. Однако неудобство этого способа состоит в необходимости вычислять все корни уравнения $f'(x) = 0$, что не всегда возможно.

Исследования в том же направлении проводили аббат Ж. П. Гуа де Мальв [131], а также Ж. Б. Фурье [128].

Следующим этапом стали исследования О. Коши [117], в которых рассматривался вопрос о числе корней уравнения, попадающих между заданными абсциссами a и b , а именно, результат о том, что $r = A - B + \varepsilon$, где r – искомое число корней, A – число максимумов, попадающих на отрезок (взятое с соответствующим знаком), B – число минимумов, попадающих на отрезок (взятое с соответствующим знаком), ε – константа, равная 0, +1 или –1 в зависимости от того, удаляется или приближается функция к оси x на концах отрезка. С использованием этой формулы О. Коши получает результаты относительно точного числа положительных и отрицательных корней функции, сводя задачу к построению некоторого ряда функций от коэффициентов уравнения и определению числа положительных и отрицательных значений в этом ряду.

В 1829 г. выходит работа Ш. Ф. Штурма [148], в которой разрешается задача об определении точного числа корней уравнения (результат его известен как теорема Штурма).

Так как метод Коши основывается на нахождении максимумов и минимумов функции, то есть корней ее производной, то задача может быть рассмотрена как задача о связи между точками пересечения с осью x двух кривых: $y = f(x)$ и $y = f_1(x)$, что приводит нас к рассмотрению знака частного $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ или, используя терминологию Коши, интегрального указателя Коши $\mathcal{J} \frac{f(x)}{f_1(x)}$, который меняет свой знак при переходе через 0 функции $f_1(x)$. В предположении, что $f_1(x)$ есть

производная $f'(x)$, вычисление интегрального указателя может быть сведено к применению алгоритма Штурма.

Метод шкалы вставления Сильвестра [150] также опирается на исследование порядка чередования корней $y = f(x)$ и $y = f_1(x)$, то есть, говоря геометрическим языком, изучает вопрос о переплетении этих кривых.

Употребляя терминологию Л. Кронекера, можно сказать, что этот метод может быть сведен к изучению характеристики системы функций $f(x) = y, f_1(x) = y, y = 0$.

В 1799 г. К. Ф. Гаусс в своей докторской диссертации опубликовал геометрическое доказательство существования, по крайней мере, одного корня уравнения $f(z) = z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots + A_m = 0$, используя представление этого уравнения в полярных координатах. А именно, для доказательства проводится круг достаточно большого радиуса, после чего, исследуя взаимное положение на нем точек $U(x, y) = 0$ и $T(x, y) = 0$, делается вывод о необходимом пересечении этих кривых между собой (здесь $f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$). Спустя 50 лет К. Ф. Гаусс, модифицируя то же доказательство, получает результат о существовании m корней у данного уравнения.

Таким образом, в этой задаче К. Ф. Гаусс использует одну и ту же идею – по значениям, принимаемым полиномами $U(x, y)$ и $T(x, y)$ на границе круга, делается вывод относительно значений, принимаемых ими внутри круга, то есть задача сводится к изучению вопроса о взаимном расположении на плоскости трех кривых – двух полиномов и окружности.

Исследования Коши (1831) приводят к результату о том, что число корней уравнения $f(z) = 0$, заключающихся внутри некоторого контура, равно

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

где интеграл берется по рассматриваемому контуру в положительном направлении.

Второй результат гласит, что сумма значений, принимаемых функцией $F(z)$ для всех корней уравнения $f(z) = 0$, лежащих внутри некоторого контура, представляется интегралом

$$\frac{1}{2\pi i} \int F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

взятым по контуру в положительном направлении.

Первая из этих формул, являющаяся частным случаем второй, вытекает из теории интегральных указателей О. Коши.

Для системы двух уравнений с двумя неизвестными $u = 0, v = 0$ Ш. Ф. Штурм и Ж. Лиувиль (1837) [149] доказали теорему о том, что разность между числом тех корней, где $w > 0$ и тех, где $w < 0$, выражается половиной интегрального указателя дроби $\frac{u}{v}$, взятого по контуру, в котором лежат и те, и другие точки (здесь w - функциональный определитель двух функций).

В 1869 г. Л. Кронекер распространил эту теорию на случай n измерений, обобщив, таким образом, все полученные ранее результаты в этом направлении. Однако мемуар Л. Кронекера очень сжат по своей форме, и поэтому основной целью диссертации А. В. Васильева являлось подробное изложение теории Л. Кронекера и ее связи с предшествующими работами.

Первая глава посвящена понятию протяженности (поверхности) в пространстве n измерений. Здесь вводятся основные понятия, необходимые для дальнейшего изложения – точка, плоскость и т. д. в многомерном пространстве, а также некоторые другие понятия аналитической геометрии.

Затем выводятся формулы, связывающие площадь проекции фигуры на наклонную плоскость с площадью фигуры на исходной плоскости через коэффициенты уравнений этих плоскостей.

Вводится также понятие касательной плоскости к поверхности n -го порядка в точке (как линейная часть разложения уравнения поверхности в ряд Тейлора в данной точке). Для элемента dS поверхности $F_0(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ выводится следующая формула:

$$dS = c_1 d\sigma_1 + c_2 d\sigma_2 + \dots + c_n d\sigma_n,$$

где $c_i = \frac{F_{0i}}{\sqrt{(F_{01})^2 + \dots + (F_{0n})^2}}$, а через $d\sigma_i$ обозначены определители

$$(-1)^{n+i-1} \begin{vmatrix} d_1 z_1 & \dots & d_1 z_{i-1} & d_1 z_{i+1} & \dots & d_1 z_n \\ d_2 z_1 & \dots & d_2 z_{i-1} & d_2 z_{i+1} & \dots & d_2 z_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1} z_1 & \dots & d_{n-1} z_{i-1} & d_{n-1} z_{i+1} & \dots & d_{n-1} z_n \end{vmatrix}$$

для $(n-1)$ точек $(z_1 + d_1 z_1, z_2 + d_2 z_1, \dots, z_n + d_1 z_n), \dots, (z_1 + d_{n-1} z_1, z_2 + d_1 z_2, \dots, z_n + d_{n-1} z_n)$, бесконечно близких к точке (z_1, z_2, \dots, z_n) .

В следующем пункте выводятся формулы для выражения одного элемента поверхности через другой, если первая поверхность получена из второй некоторым преобразованием координат. Пусть

$$x_1 = F_1(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

$$x_2 = F_2(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

...

$$x_n = F_n(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Тогда, обозначив через dS элемент поверхности $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, можно получить следующее выражение для элемента ds соответствующей поверхности $F_0(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$:

$$dS = \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1' & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ c_2' & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n' & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix} ds,$$

где $F_{ik} = \frac{dF_i}{dz_k}$, $c_i' = \frac{\frac{d\Phi}{dx_i}}{\sqrt{(\frac{d\Phi}{dx_1})^2 + \dots + (\frac{d\Phi}{dx_n})^2}}$. Доказательство основано на применении

формул для элемента поверхности dS , полученных в предыдущем пункте.

Относительно этой формулы А. В. Васильев отмечает, что в сочинении Л. Кронекера она используется без доказательства. Кроме того, в работе К. Неймана «Ueber correspondirende Flächenelemente» (1877) [142] эта формула доказывается для случая $n = 3$. Таким образом, в работе А. В. Васильева, по-видимому, впервые она доказана для общего случая n -мерного пространства.

Полученные результаты используются для рассмотрения числа завиваний кривой (поверхности) вокруг точки в пространстве. Число завиваний кривой вокруг точки (без ограничения общности, в качестве центра рассматривается начало координат) определяется с помощью геометрического построения как интеграл $\frac{1}{2\pi} \int d\sigma$, в котором интегрирование производится по всем точкам рассматриваемой кривой (см. Рисунок 3).

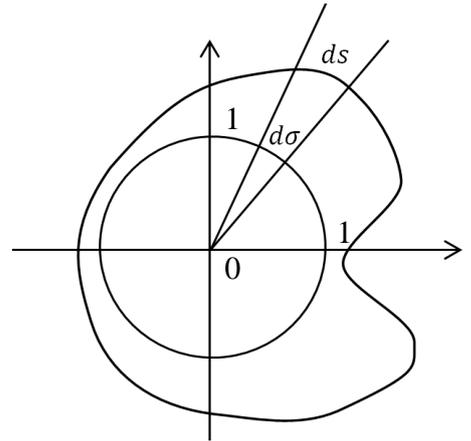


Рисунок 3. Определение числа завиваний кривой вокруг точки

Геометрический подход дает возможность распространить это понятие на многомерное пространство. Число завиваний $(n - 1)$ -мерной поверхности вокруг начала координат может быть аналогично представлено с использованием сферической поверхности $(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 = 1$. В окончательном виде число завиваний поверхности $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ вокруг точки выражается следующим образом:

$$-\frac{1}{\omega} \int \frac{\sum \Phi_k x_k}{\sqrt{\sum (\Phi_k)^2} \sqrt{\sum (x_k)^2}} dS,$$

где $\omega = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ (площадь поверхности единичной гиперсферы).

В случае если поверхность $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ преобразуется в поверхность $F_0(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ по закону преобразования координат

$$x_1 = F_1(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

$$x_2 = F_2(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

...

$$x_n = F_n(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

то выражение числа завиваний полученной поверхности приобретает вид

$$-\frac{1}{\omega} \int \frac{1}{\mathfrak{S}S^n} \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix} ds,$$

где $S = \sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2 + \dots + (F_n)^2}$, $\mathfrak{S} = \sqrt{(F_{01})^2 + (F_{02})^2 + \dots + (F_{0n})^2}$.

Вторая глава непосредственно посвящена изложению теории характеристик. Здесь А. В. Васильев, преимущественно, повторяет содержание своей работы *pro venia legendi*, вводя понятие характеристики системы n функций от n переменных и доказывая ее основные свойства. Помимо этого, он формулирует еще несколько дополнительных утверждений, например: характеристика системы $(F_0, a_{11} F_1 + a_{12} F_2, + \dots + a_{1n} F_n, \dots, a_{n1} F_1 + a_{n2} F_2, + \dots + a_{nn} F_n)$, где a_{ij} – вещественные постоянные, равна характеристике системы $(F_0, F_1, F_2, \dots, F_n)$, взятой с тем знаком,

который имеет определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Кроме того, обосновывается утверждение о том, что характеристика исходной системы $(F_0, F_1, F_2, \dots, F_n)$ не изменится, если произвести замену функции F_i на $F_i - \lambda_i \sqrt{(F_h)^2 + (F_k)^2}$. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что в определении характеристики системы функций значение имеют лишь знаки функций и функциональных определителей, которые при такой замене остаются неизменными.

Далее с помощью геометрических рассуждений А. В. Васильев обосновывает связь между понятием характеристики и числом завиваний гиперповерхности вокруг точки в пространстве. Проведенные рассуждения позволяют получить выражение для характеристики исходной системы функций посредством кратного интеграла:

$$-\frac{1}{\omega} \int \frac{1}{\mathfrak{S} \cdot S^n} \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}.$$

Третья глава работы посвящена выводу формулы Л. Кронекера для алгебраических сумм всех значений, которые принимает заданная функция $\mathfrak{F}(z_1, z_2, \dots, z_n)$, когда в нее подставлены значения z , определенные условиями $F_0 < 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, \dots , $F_n = 0$. Дальнейшие рассуждения существенным образом опираются на теорию потенциала в n -мерном пространстве.

А. В. Васильев определяет потенциал в пространстве n измерений следующим образом:

$$U(\xi) = \frac{1}{n-2} \int_{\Phi(x_1, \dots, x_n) < 0} \frac{K(x_1, x_2, \dots, x_n)}{(\sum (x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n-2}{2}}} dx_1 \dots dx_n,$$

где $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является однозначной непрерывной функцией координат x_1, x_2, \dots, x_n , либо определяется преобразованием координат $x_1 = F_1(z_1, z_2, \dots, z_n), x_2 = F_2(z_1, z_2, \dots, z_n), \dots, x_n = F_n(z_1, z_2, \dots, z_n)$, а функции F_1, F_2, \dots, F_n также однозначны и непрерывны.

Затем, пользуясь переходом к сферическим координатам, А. В. Васильев показывает, что потенциал принимает конечное и определенное значение во всех точках пространства.

Для решения поставленной задачи используется нахождение оператора Лапласа для потенциала. Сначала находится первая частная производная:

$$\frac{dU}{d\xi_i} = \int_{\Phi(x_1, \dots, x_n) < 0} \frac{K(x_1, x_2, \dots, x_n)(x_i - \xi_i)}{(\sum (x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}} dx_1 \dots dx_n.$$

С помощью перехода к сферическим координатам доказывается, что первая частная производная также будет иметь определенное и конечное значения как для точек, лежащих вне, так и внутри области интегрирования.

Для второй частной производной для точек $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, лежащих вне области интегрирования, будет верна формула

$$\frac{d^2U}{d\xi_i^2} = \int_{\Phi(x_1, \dots, x_n) < 0} K(x_1, x_2, \dots, x_n) \left[\frac{n(x_i - \xi_i)^2}{(\sum (x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}+1}} - \frac{1}{(\sum (x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}} \right] dx_1 \dots dx_n.$$

В случае если точка $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ лежит внутри области интегрирования, вторая часть подынтегрального выражения не ограничена. Поэтому для вычисления вторых производных используется подход, примененный ранее К. Ф. Гауссом в работе «Allgemeine Lehrsätze...» (1840) [130] для потенциала в трехмерном пространстве. Согласно основной идее данного подхода, при вычислении предела отношения приращения функции к приращению аргумента смещение аргумента заменяется смещением области интегрирования.

Изложим ход рассуждений А. В. Васильева в процессе вычисления второй производной. Если Φ – исходная область интегрирования, то Φ' – область, получившаяся из исходной при замене аргумента $(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n)$ на $(\xi_1, \dots, \xi_i + e, \dots, \xi_n)$. Обозначим

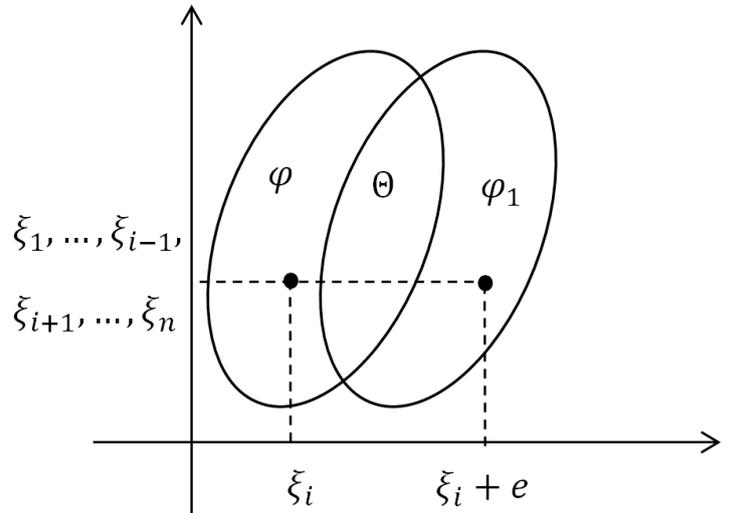


Рисунок 4. Смещение области интегрирования

через Θ область пересечения Φ и Φ' , через φ' – разность между Φ' и Θ , через φ – разность между Φ и Θ (см. Рисунок 4). Затем найдем предел отношения приращения первой производной к приращению аргумента:

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\Delta \frac{dU}{d\xi_i}}{e} &= \int_{\Theta} \frac{K(x_1, \dots, x_i + e, \dots, x_n) - K(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{e} \frac{(x_i - \xi_i) dx_1 \dots dx_n}{(\sum (x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}} \\ &+ \frac{1}{e} \int_{\varphi'} \frac{K(x_1, \dots, x_n)(x_i - \xi_i)}{(\sum (x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}} dx_1 \dots dx_n - \frac{1}{e} \int_{\varphi} \frac{K(x_1, \dots, x_n)(x_i - \xi_i)}{(\sum (x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}} dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{\Phi(x_1, \dots, x_n) < 0} \frac{\frac{dK(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dx_i} (x_i - \xi_i)}{(\sum (x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}} dx_1 \dots dx_n \\ &- \int_{\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0} \frac{K(x_1, x_2, \dots, x_n)(x_i - \xi_i)}{(\sum (x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}} dS, \end{aligned}$$

где dS – элемент поверхности $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$ (предельный переход сопровождается подробным обоснованием).

Используя полученный результат, можно записать выражение для оператора Лапласа для потенциала в рассматриваемой области интегрирования:

$$\Delta^2 U = \sum \frac{d^2 U}{d\xi_i^2} = \int_{\Phi(x_1, \dots, x_n) < 0} \frac{\frac{dK}{dx_1} (x_1 - \xi_1) + \dots + \frac{dK}{dx_n} (x_n - \xi_n)}{(\sum (x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}} dx_1 \dots dx_n -$$

$$- \int_{\Phi(x_1, \dots, x_n)=0} K(x_1, \dots, x_n) \frac{\frac{d\Phi}{dx_1}(x_1 - \xi_1) + \dots + \frac{d\Phi}{dx_n}(x_n - \xi_n)}{\frac{\mathfrak{S}}{(\sum(x_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}}} dS.$$

На следующем этапе аргументы функции $K(x_1, \dots, x_n)$ рассматриваются как функции от переменных z_1, z_2, \dots, z_n : $x_1 = F_1(z_1, z_2, \dots, z_n), x_2 = F_2(z_1, z_2, \dots, z_n), \dots, x_n = F_n(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

В этом случае полученная выше формула преобразуется к виду

$$\Delta^2 U = - \int_{F_0(z_1, \dots, z_n) < 0} \frac{\mathfrak{R}_1}{(\sum(F_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}} dz_1 \dots dz_n + \int_{F_0(z_1, \dots, z_n) = 0} \frac{\mathfrak{F}R_1}{(\sum(F_k - \xi_k)^2)^{\frac{n}{2}}} ds,$$

где $\mathfrak{R}_1 = \begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \dots & \mathfrak{F}_n \\ F_1 - \xi_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 - \xi_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n - \xi_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$

(здесь $\mathfrak{F}(z_1, z_2, \dots, z_n) = K(F_1(z_1, z_2, \dots, z_n), \dots, F_n(z_1, z_2, \dots, z_n))$, через \mathfrak{F}_i обозначены $\frac{d\mathfrak{F}}{dz_i}$),

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{(F_{01})^2 + \dots + (F_{0n})^2}} \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 - \xi_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 - \xi_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n - \xi_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}.$$

При $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (0, 0, \dots, 0)$ формула примет вид

$$\Delta^2 U|_{\xi=0} = - \int_{F_0(z_1, \dots, z_n) < 0} \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}^n} dz_1 \dots dz_n + \int_{F_0(z_1, \dots, z_n) = 0} \frac{\mathfrak{F}R}{\mathfrak{S}^n} ds = -V + W,$$

где $\mathfrak{R} = \begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \dots & \mathfrak{F}_n \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}, R = \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}.$

Область $F_0(z_1, \dots, z_n) < 0$ может быть разбита на более мелкие составляющие таким образом, чтобы в каждом из них находилось либо одно, либо ни одного решения системы уравнений $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_n = 0$.

Для подобластей, которые не содержат внутри себя корней рассматриваемой системы, оператор Лапласа будет равен нулю (см. выше).

Для остальных областей, содержащих внутри один из корней ζ_i , показано, что соответствующий интеграл V в этой области обращается в нуль, а интеграл W при измельчении разбиения областей стремится к пределу $\mathfrak{F}(\zeta_i) \int \frac{R}{s^n} ds$, что, согласно замечанию, сделанному выше, совпадает с величиной $-\omega \cdot \text{sign}(\Delta_0(\zeta_i)) \cdot \mathfrak{F}(\zeta_i)$.

Таким образом, доказана справедливость формулы Кронекера, выражающей алгебраическую сумму значений, принимаемых функцией $\mathfrak{F}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ в точках, лежащих внутри области $F_0 = 0$ и являющихся решениями системы $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_n = 0$:

$$-\omega \sum \text{sign}(\Delta_0(\zeta_i)) \cdot \mathfrak{F}(\zeta_i) = -V + W.$$

Отметим, что из проведенного рассуждения вытекает, что рассматриваемая функция $\mathfrak{F}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ должна удовлетворять условиям конечности и непрерывности внутри области $F_0(z_1, \dots, z_n) < 0$, кроме того, предполагается, что на границе $F_0(z_1, \dots, z_n) = 0$ не лежит ни одной из точек ζ_i .

Последнюю главу своей работы А. В. Васильев посвящает применению полученных результатов к случаям $n = 2$ и $n = 3$.

Для системы $x - \xi = 0, y - \eta = 0, z - \zeta = 0$, решением которой является единственная точка (ξ, η, ζ) , формула предыдущей главы дает

$$\mathfrak{F}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{F_0 < 0} \frac{d\mathfrak{F}}{r^2} dr + \frac{1}{4\pi} \int_{F_0 = 0} \frac{\mathfrak{F} \cos(nr)}{r^2} ds,$$

где r – расстояние между точками (ξ, η, ζ) и (x, y, z) .

В частном случае $\mathfrak{F} = 1$ получается формула Гаусса, по которой интеграл $\int_{F_0 = 0} \frac{\cos(nr)}{r^2} ds$ будет равен 0 или 4π в зависимости от того, лежит ли точка (ξ, η, ζ) внутри или вне поверхности $F_0 = 0$. Этот интеграл носит название телесного угла или угла зрения и может быть интерпретирован как угол, под которым из фиксированной точки видна внутренняя сторона поверхности.

Другой частный случай рассматривается для применения формулы нахождения числа корней, находящихся в заданной области. В качестве функций системы принимаются частные производные функции $F(x, y, z)$: $F_1 = \frac{dF}{dx}$, $F_2 = \frac{dF}{dy}$, $F_3 = \frac{dF}{dz}$, а в качестве F_0 рассматривается сама функция F . Тогда число корней указанной системы, лежащих внутри области $F(x, y, z) = 0$ описывается формулой

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{F=0} \frac{1}{\rho\rho'} ds,$$

где ρ и ρ' – главные радиусы кривизны поверхности.

Для $n = 2$ А. В. Васильев приводит соответствующие формулировки теорем об отделении корней для двумерного случая, а затем обосновывает возможность использования для вычисления характеристики интегрального индекса Коши (см. п. 2.1.1 «Сочинение pro venia legendi»).

К тому же случаю $n = 2$ он далее применяет теоремы, полученные в третьей главе.

В частном случае системы $x - \xi = 0, y - \eta = 0$ для точки (ξ, η) эти формулы дают

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\xi, \eta) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{F_0 < 0} \frac{(x - \xi) \frac{d\mathfrak{F}}{dx} + (y - \eta) \frac{d\mathfrak{F}}{dy}}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} dx dy \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{F_0 = 0} \mathfrak{F}(x, y) \frac{(x - \xi) \cos(nx) + (y - \eta) \cos(ny)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} ds. \end{aligned}$$

Кроме того, полученные в работе результаты находят применение в вопросе нахождения числа корней комплексного уравнения. В силу справедливости условий Коши-Римана для дифференцируемой функции комплексного переменного функциональный определитель функций $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ будет всегда неотрицателен (здесь $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ – вещественная и мнимая части рассматриваемой комплексной функции). Поэтому, в силу теоремы о применении интегрального индекса Коши к вопросу о нахождении числа корней системы

уравнений получается, что число решений комплексного уравнения $F_1(x, y) + iF_2(x, y) = 0$, лежащих внутри некоторого контура $F_0 = 0$, определяется величиной интегрального индекса Коши для дроби $\frac{F_1}{F_2}$.

Затем А. В. Васильев демонстрирует, как результаты Л. Кронекера могут быть применены для вывода формулы Коши

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - \xi} dz.$$

Завершая изложение, А. В. Васильев рассматривает способы приложения упомянутых в историческом очерке методов отделения корней к задаче об определении числа корней одного алгебраического уравнения и подчеркивает их взаимосвязь.

Таким образом, представленная работа является развернутым изложением результатов Л. Кронекера, а также дополнением к его сочинению с той точки зрения, что она содержит доказательства некоторых результатов, использованных, но не обоснованных в работе Л. Кронекера. Благодаря этому с появлением работы А. В. Васильева рассмотренный сюжет приобрел законченный характер, а сама работа может расцениваться как подробное изложение этой теории.

Среди дополнений, произведенных А. В. Васильевым, отметим указание условий применимости теоремы о суммировании Л. Кронекера, а именно, тот факт, что функция $\mathfrak{F}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ должна удовлетворять требованиям конечности и непрерывности внутри области $F_0(z_1, \dots, z_n) < 0$, не сформулированный явным образом в сочинении Л. Кронекера.

Кроме того, в работе А. В. Васильева, по-видимому, впервые доказана для общего случая n -мерного пространства формула для выражения одного элемента поверхности через другой, если первая поверхность получена из второй некоторым преобразованием координат. Относительно этой формулы А. В. Васильев отмечает, что в сочинении Л. Кронекера она используется без доказательства. Кроме того, в работе К. Неймана «Ueber correspondirende Flächenelemente» (1877) эта формула доказывается для случая $n = 3$.

Приведем фрагмент отзыва о данной работе одного из оппонентов Ф. М. Суворова: «... автор приступил к своей работе после глубокого и многолетнего изучения литературы вопроса, и, воспользовавшись развитием новых геометрических теорий об идеальных протяженностях с каким угодно числом измерений, успел в ясной и удобопонятной форме изложить одну из самых существенных математических теорий, дав вполне убедительные доказательства теорем, предложенных Кронекером без доказательства ⁴¹. Без работы А. В. Васильева мемуар не может получить должного распространения, так как приложение теорем, данных без доказательства, всегда встречает затруднения в определении точных условий, при которых данная теорема применима ⁴². На этом основании труд автора имеет значение не только в русской математической литературе, как первое сочинение (кроме *pro venia legendi*) по теории отделения корней совместных алгебраических уравнений, но и в общей математической литературе, и, по всей вероятности, в случае перевода ее на один из западно-европейских языков, будет встречена с живым интересом ⁴³» [79, оп. Совет, д. 7295, л. 4].

Востребованность работы А. В. Васильева подтверждается также тем, что изложенные в ней результаты стали использоваться в работах других авторов. Н. Н. Зинин в работе «Различные приемы приведения кратных интегралов и главнейшие приложения этих приемов» (1892) [60] опирается на полученные Л. Кронекером и изложенные А. В. Васильевым результаты, касающиеся функции потенциала в пространстве n измерений.

Отметим также, что особую глубину сочинению придает исторический характер изложения материала. В ходе работы А. В. Васильев демонстрирует, как

⁴¹ Речь идет, главным образом, о формуле для выражения одного элемента поверхности через другой, если первая поверхность получена из второй некоторым преобразованием координат, использованной в общем виде Л. Кронекером, и доказанной для случая $n = 3$ К. Нейманом.

⁴² Говоря о точных условиях применимости теорем, Ф. М. Суворов, по-видимому, имеет в виду сформулированные А. В. Васильевым условия, которым должна удовлетворять функция $\mathfrak{F}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ для того, чтобы для нее была справедлива формула Кронекера.

⁴³ Насколько нам известно, А. В. Васильеву не удалось издать перевод ни самой работы, ни ее фрагментов на каком-либо европейском языке.

на основе множества накопившихся частных примеров задач, разрешаемых преимущественно аналитическим путем, в конечном итоге была построена законченная обобщающая теория, охватывающая все известные ранее факты, касающиеся отделения корней систем алгебраических уравнений. Интересно то, что в ее основе лежали соображения геометрического характера. Этот подход полностью соответствовал духу математических исследований конца XIX века, когда в различных отраслях науки все чаще наблюдалось плодотворное взаимное проникновение методов и концепций.

Анализ математических работ А. В. Васильева позволяет сделать вывод о том, что его научная деятельность существенным образом способствовала проникновению новых концепций и понятий в русскую математическую литературу. В своих исследованиях он останавливался на таких современных теориях, как теория характеристик Л. Кронекера, теория коннексов А. Клебша, применение теории групп к вопросам решения дифференциальных уравнений.

2.2. История математики в творчестве А. В. Васильева

Одним из главных направлений творчества А. В. Васильева стала история математики. Отправной точкой послужил глубокий интерес к творчеству Н. И. Лобачевского. Внук И. М. Симонова, коллеги Н. И. Лобачевского, выходец из среды казанской профессуры, А. В. Васильев рос как ученый в период, когда возрастало признание заслуг великого геометра. И совершенно неудивительно поэтому, что творчество Н. И. Лобачевского и сама личность стали объектами его живого интереса ⁴⁴.

Первой работой А. В. Васильева, посвященной жизни и творчеству Н. И. Лобачевского, стало издание полного собрания его геометрических

⁴⁴ Необходимо отметить, что деятельности Н. И. Лобачевского посвящали ранее работы А. Ф. Попов [88], Э. П. Янишевский [112]. Эти работы, однако, были направлены, главным образом, на описание административной деятельности Н. И. Лобачевского и не ставили своей целью анализ его научных работ.

сочинений [73], вышедшего в двух томах в 1883-1886 гг. В предисловии к нему А. В. Васильев дал очерк жизни и деятельности великого геометра. Существенное место он отвел студенческим годам Н. И. Лобачевского и первым годам после получения диплома кандидата, а также влиянию, которое оказал на Н. И. Лобачевского М. Бартельс, будучи его преподавателем и наставником. Неожиданные геометрические результаты, к которым пришел Н. И. Лобачевский, не встретили понимания среди большинства российских и европейских математиков. А. В. Васильев описывает, как, несмотря на это, Н. И. Лобачевский продолжал публиковать свои работы, признание которых пришло лишь после его смерти. А. В. Васильев рассматривает также работы Б. Римана, Г. Гельмгольца, Дж. Батталини, Э. Бельтрами, Ж. Гуэля и др., которые способствовали развитию идей неевклидовой геометрии. В 1884 году вышла работа «О возможном влиянии Гаусса на геометрические идеи Лобачевского» [36], в которой А. В. Васильев указал на возможную роль М. Бартельса в ознакомлении Н. И. Лобачевского с проблематикой параллельных, в которую его самого мог ввести К. Ф. Гаусс, живо ею интересовавшийся ⁴⁵. Этот очерк, а также предисловие к первому тому собрания геометрических сочинений Н. И. Лобачевского, положили начало исследованию жизни и творчества Н. И. Лобачевского, и также истории возникновения и развития идей неевклидовой геометрии.

Следующий цикл работ А. В. Васильева, посвященных Н. И. Лобачевскому, был вызван празднованием столетия великого геометра. В первую очередь, здесь необходимо отметить речь, произнесенную А. В. Васильевым на торжественном заседании Казанского физико-математического общества «Николай Иванович Лобачевский» (1894) [32], переведенную на несколько европейских языков [124, 126, 129, 132]. Она содержит сведения об истории Казанского университета, биографии Н. И. Лобачевского и имеет целью привлечение внимания российской и мировой общественности к творчеству Н. И. Лобачевского.

Кроме торжественной речи, в этот период А. В. Васильев публикует работы, касающиеся научной деятельности Н. И. Лобачевского – «Lobachevsky as

⁴⁵ Позднее в [33] А. В. Васильев отвергает эту гипотезу на основании материалов, предоставленных Ф. Энгелем.

algebraist and analyst» (1894) [161], «Lobatschefsckij's Ansichten uber die Theorie der Parallellinien vor dem Jahre 1826» (1897) [157]. Остановимся на них подробнее.

Статья «Lobachevsky as algebraist and analyst» посвящена негеометрическим трудам Н. И. Лобачевского, а именно, его работам по алгебре ⁴⁶ и анализу. В частности, А. В. Васильев обращает внимание на исследования Н. И. Лобачевского 1813 г. и 1830 г., касающиеся уравнения $x^n - 1 = 0$ в случае, когда $n = 4k + 1$ и $n = 8k + 1$ соответственно. Существенное место уделяет он также курсу алгебры Н. И. Лобачевского «Алгебра или исчисление конечных» (1833), важнейшее достоинство которого видит в строгости используемых определений и проводимых доказательств. А. В. Васильев обращает особое внимание на приводимые Н. И. Лобачевским определения тригонометрических функций посредством рядов

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \text{ и } \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots,$$

вызванные необходимостью введения тригонометрических функций в неевклидовой геометрии, где не было возможности пользоваться привычными геометрическими определениями. А. В. Васильев отмечает, что вывод Н. И. Лобачевским основных свойств тригонометрических функций, использующий представления в форме рядов, вероятно, был одним из первых в своем роде.

Кроме того, Н. И. Лобачевскому принадлежит оригинальный признак сходимости рядов (который встречается в «Алгебре», а также в работе «Об исчезании тригонометрических строк» (1834)). Согласно этому признаку, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ (где $f(n)$ – положительная, невозрастающая функция) сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{2^n}$, в котором величины p_n определяются неравенствами $f(p_n) \geq \frac{1}{2^n}, f(p_n + 1) < \frac{1}{2^n}$.

А. В. Васильев также обратил внимание на то, что Н. И. Лобачевским в работе «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и т. д.» (1835) было

⁴⁶ Алгебраическим результатам Н. И. Лобачевского посвящена также работа А. В. Васильева «Algebra di Lobachevsky» (1923) [156].

впервые акцентировано внимание на различии между непрерывностью («постепенностью») и дифференцируемостью («непрерывностью») функций: *«Функция $f(x)$ называется постепенной, когда приращения в ней уменьшаются до 0 вместе с приращениями переменного, непрерывной – когда содержание этих приращений с их уменьшением переходит нечувствительно в другую функцию, которая будет дифференциальным множителем»* (цит. по [33, с. 181]).

В работе «Lobatschefskij's Ansichten uber die Theorie der Parallellinien vor dem Jahre 1826» [157] А. В. Васильев выделяет три этапа формирования взглядов Н. И. Лобачевского на теорию параллельных прямых. Первый – попытки доказательства пятого постулата, которые сохранились в записях лекций, читанных Н. И. Лобачевским в 1815-1817 гг. Затем Н. И. Лобачевский приходит к выводу, что все данные ранее доказательства не являются строгими, и потому пятый постулат не может считаться доказанным (об этом он пишет в своем учебнике по геометрии (1823 г.), который в тот период не был издан, но сохранился в архиве Казанского университета). Окончательное видение проблемы параллельных прямых Н. И. Лобачевский представил в 1826 г. в работе «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» (рукопись не сохранилась)⁴⁷.

Итогом многолетних исследований биографии и творчества Н. И. Лобачевского А. В. Васильевым и другими учеными стала книга «Жизнь и научное дело Н. И. Лобачевского» (1927). Она не увидела свет при жизни А. В. Васильева – отпечатанный тираж так и не поступил в продажу, а после смерти А. В. Васильева был уничтожен (по-видимому, сыграла роль политическая «неблагонадежность» А. В. Васильева). В 1992 г. книга была издана В. А. Бажановым и А. П. Широковым по сохранившемуся оттиску верстки в научно-биографической серии РАН под названием «Николай Иванович Лобачевский (1792-1956)» [33].

⁴⁷ Отметим также, что существует иная точка зрения по поводу сочинения «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных», представленная Г. Е. Изотовым в работе [63].

В этой работе А. В. Васильев, в частности, более подробно останавливается на негеометрических интересах Н. И. Лобачевского⁴⁸. Так, он обращает внимание на то, что в работе «Об исчезновении тригонометрических строк» (1834) Н. И. Лобачевский одним из первых в XIX веке⁴⁹ сформулировал общее определение функции как соответствия, традиционно связывавшееся с именем П. Лежен-Дирихле, давшего его в 1837 году: *«общее понятие требует, чтобы функцией x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной... Итак, под названием функции должно вообще разуметь число, которого постепенные изменения даны и зависят от изменений другого, хотя бы совершенно неизвестным образом.»* (цит. по [33, с. 179]).

Необходимо так же обратить внимание на главу «Лобачевский как мыслитель», в которой А. В. Васильев анализирует философские воззрения Н. И. Лобачевского, указывая на их связь со взглядами классиков мировой науки – Ф. Бэкона, Г. Галилея, Р. Декарта, И. Ньютона (подробнее о вкладе А. В. Васильева в исследование философских взглядов Н. И. Лобачевского см. в [18]).

После смерти А. В. Васильева деятельность по изучению биографии Н. И. Лобачевского и по пропаганде его математических результатов была продолжена В. Ф. Каганом (1869–1953), известным геометром, профессором Московского университета, который вместе с А. В. Васильевым входил в редакционную комиссию по изданию трудов Н. И. Лобачевского, приуроченному к столетию с момента открытия неевклидовой геометрии (подробнее см. п. 1.4).

Воспитанник петербургской математической школы, А. В. Васильев положил начало исследованию ее истории. В этой связи отметим его работы, посвященные

⁴⁸ В более сжатой форме А. В. Васильев останавливается на понятии функции у Н. И. Лобачевского в своих работах [28, 32].

⁴⁹ На самом деле, общая трактовка понимания функции появляется уже у Л. Эйлера в его «Дифференциальном исчислении» (1755).

творчеству П. Л. Чебышева: «P. L. Tchebychef et son oeuvre scientifique» (1898) [153], «P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen» (1900) [158]. В работах, посвященных научным трудам П. Л. Чебышева, А. В. Васильев выделяет несколько направлений исследований: теория чисел (в первую очередь, результаты, касающиеся поведения функции распределения простых чисел), теория приближения функций (введение тригонометрических полиномов Чебышева, приложение теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, к черчению географических карт, а также результаты, касающиеся теории интерполяции функций), теория вероятностей (метод моментов для определения распределения случайных величин, доказательство центральной предельной теоремы), интегрирование иррациональных дифференциалов.

Эти исследования стали началом большой работы по изучению истории математики в России, инициированной Академией наук в 1915 году в рамках общего проекта по истории российской науки. В 1916 году была организована Комиссия по изданию труда «Русская наука» под председательством академика А. С. Лаппо-Данилевского. Этот проект был в дальнейшем включен в план работ Комиссии по истории знаний (см. [58, 69]), созданной в 1921 году под председательством В. И. Вернадского (А. В. Васильев входил в редакционную коллегию Комиссии). Первая часть раздела «Математика», написанная А. В. Васильевым [29], была издана в 1921 году тиражом 1000 экземпляров [35]. А. В. Васильеву и В. Я. Успенскому было поручено написание 2-го выпуска очерка «Математика». К сожалению, эта задача из-за сложных экономических и политических условий осталась неосуществленной, как, впрочем, и весь проект «Русской науки»: о нем напоминают лишь несколько изданных очерков об отдельных направлениях науки в России.

Очерк А. В. Васильева содержит две главы. Первая глава (1725-1826 гг.) посвящена образованию Академии наук, а также научной деятельности первых академиков (Я. Германа, Н. Бернулли, Д. Бернулли, Х. Гольдбаха, Л. Эйлера) и их учеников (А. И. Лекселя, Н. И. Фусса, Г. В. Крафта, И. А. Эйлера,

С. Я. Румовского). Кроме того, рассматривается деятельность Ф. И. Шуберта и С. Е. Гурьева.

Вторая глава (1826-1863 гг.) посвящена первым выдающимся достижениям ученых, россиян по происхождению, выросших и получивших образование на русской почве, – гениального Н. И. Лобачевского, создателя неевклидовой геометрии, изменившей идеологию математики XIX века, М. В. Остроградского, ставшего классиком математического анализа, и, наконец, крупнейшего российского математика второй половины XIX века П. Л. Чебышева.

Очерк А. В. Васильева стал первым обобщающим трудом в области истории математических исследований в России [111].

Важность историко-математических исследований А. В. Васильев понимал и пропагандировал. Этой проблеме посвящен его доклад на Всероссийском съезде математиков в Москве в 1927 г. «Следует ли писать историю математики в России» [35].

Спектр историко-математических интересов А. В. Васильева не ограничивался историей отечественной математики. Среди его работ присутствуют статьи и очерки по истории отдельных разделов математики.

Природе понятия числа посвящена работа «Из истории и философии понятия о целом положительном числе» (1891) [25] (подготовленная А. В. Васильевым к открытию Казанского физико-математического общества 28 октября 1890 года). В ней он рассматривает особенности счета у народов различных культур и показывает, как понятие о ряде чисел естественным образом приводит к арифметическим аксиомам.

Истории математического анализа посвящен «Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых» (1906) [26], в котором А. В. Васильев прослеживает развитие методов дифференциального и интегрального исчисления, начиная с вычисления площадей простейших фигур египтянами и греками и заканчивая творчеством Г. В. Лейбница и И. Ньютона.

Отдельное место среди работ А. В. Васильева по истории математики занимает вышедшая в Петрограде в 1919 г. книга «Целое число. Исторический

очерк» (1919) [48]⁵⁰. В ней автор рассматривает процесс развития понятия о числе и счете, начиная с культуры древних египтян, индусов, вавилонян и перехода к научным знаниям у греков. Затем он описывает развитие алгебраических исследований в трудах Диофанта, Фибоначчи, Ф. Виета и др. Дальнейшее изложение посвящено работам Л. Эйлера, П. Ферма, Ж. Л. Лагранжа, А. М. Лежандра, К. Ф. Гаусса. В заключительной части книги А. В. Васильев рассматривает основу современной ему высшей арифметики – учение о классах, а также подробнее останавливается на трудах Э. Куммера, Л. Кронекера, Р. Дедекинда. Завершая свое сочинение, А. В. Васильев обращает внимание на исключительно важную связь теории чисел с науками о природе – в частности, химией и кристаллографией.

Ценность этой работы заключается в том, что она была одним из первых трудов по истории теории чисел, подводящих читателя к новейшим исследованиям по теории чисел, относящимся ко второй половине XIX века. Эта книга до сих пор входит в список литературы, рекомендованной студентам механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, изучающим историю математики.

Здесь же остановимся на издаваемой под редакцией А. В. Васильева серии сборников «Новые идеи в математике», которые хотя и не относятся напрямую к истории математики, однако историческая компонента в составляющих их очерках зачастую очень велика: во многих из них «новые идеи» даются в широком историческом контексте, позволяющем читателю проследить сам процесс их зарождения (см., например, Б. Рассел «Новейшие работы о началах математики», В. Вундт «Числа и их символы» и др.). Чтобы дать представление о содержании этих сборников, приведем список включенных в них сочинений (в скобках указан год издания оригинального сочинения).

Сборник 1. Математика. Метод, проблемы и значение ее (1913)

В. Вундт. Общее учение о математическом методе (1907)

⁵⁰ Отметим, что экземпляры книги А. В. Васильева «Целое число» содержались в личных библиотеках В. И. Ленина [16] и В. Хлебникова [7].

Г. Грассман. Чистая математика и учение о протяженности (1844)

Б. Рассел. Новейшие работы о началах математики (1901)

А. Принсгейм. Ценность и мнимая неценность математики (1904)

Сборник 2. Пространство и время I (1913)

В. Вундт. Пространство и время (1893)

Э. Мах. Время и пространство.

А. Пуанкаре. Пространство и время (1912)

П. Ланжевэн. Эволюция пространства и времени (1911)

Л. Геффтер. О четырехмерном мире (1912)

Сборник 3. Пространство и время II (1913)

А. Пуанкаре. Почему пространство имеет три измерения.

Ж. Адамар. Анализ положения и его роль в математике.

К. Шварцшильд. О допустимой мере кривизны пространства.

П. Гарцер. Звезды и пространство. (1908)

М. Фришейзен-Келер. Проблема времени (1913)

Сборник 4. Учение о числе (1914)

В. Вундт. Числа и их символы (1880-1883)

Ж. Таннери и Ж. Мольк. Основные принципы арифметики (1904-1909)

Сборник 5. Принцип относительности в математике (1914)

Г. Минковский. Пространство и время (1909)

М. Лауэ. Принцип относительности (1911)

Э. Гентингтон. Новое приближение к теории относительности (1912)

Р. Д. Кармикаэль. О теории относительности: анализ ее постулатов (1912)

Ф. Клейн. О геометрических основаниях лорентцовой группы (1910)

Сборник 6. Учение о множествах Г. Кантора I (1914)

Г. Кантор. Основы общего учения о многообразиях (1883)

Г. Кантор. О различных точках зрения на актуально-бесконечное (1886)

Г. Кантор. К учению о трансфинитном (1887-1888)

Сборник 7. Принцип относительности с математической точки зрения II (1914)

К. Кайе. Уравнения принципа относительности и геометрия.

В. Варичак. О неевклидовом истолковании теории относительности (1912)

Г. Тимердинг. Об одном простом геометрическом образе четырехмерного мира Минковского (1912)

А. Бриллюэ. Принцип относительности (1912)

Н. Умов. Единообразный вывод преобразований, совместных с принципом относительности (1910)

Н. Умов. Условия инвариантности уравнения волны (1910)

Сборник 8. Математика и философия I (1914)

Л. Нельсон. Замечания о не-эвклидовой геометрии и происхождении математической достоверности (1905)

О. Гельдер. Наглядное представление и мышление геометрии (1899)

Ф. Клейн, А. Гофлер. Пограничные вопросы математики и философии (1906)

Сборник 9. Начала геометрии I (1914)

Ф. Энриквес. Начала геометрии (1907)

Сборник 10. Математика и философия II ⁵¹ (1915)

А. Пуанкаре. Математика и логика (1905)

Л. Кутюра. В защиту логики (ответ г. Пуанкаре) (1906)

А. Пуанкаре. Математика и логика (1906)

В подготовке этих сборников большую роль играл известный философ П. С. Юшкевич ⁵² (1873 – 1945), во многих случаях выступавший переводчиком.

В 1922 году была издана книга А. В. Васильева, посвященная теории относительности и ее истории «Пространство, время, движение» (1922) [43] ⁵³. Она являлась одним из первых сочинений по истории теории относительности, а также по основам общей теории относительности. Как отмечается в работе В. П. Визгина [52], эта книга является одной из лучших научно-популярных книг, посвященных этому вопросу, и содержит глубокий историко-научный анализ СТО и ОТО. Среди других изданий по теории относительности того времени отметим книгу Г. Вейля «Пространство. Время. Материя» (1918). За изданием книги А. В. Васильева на русском языке в Петрограде в 1922 г. последовал

⁵¹ Этот сборник был переиздан в 2007 году издательством URSS под названием «Математика и логика» (А. Пуанкаре, Л. Кутюра. Математика и логика. 2-е изд. - М.: ЛКИ, 2007. - 152 с.).

⁵² П. С. Юшкевич уже в советские годы перевел многие известные сочинения по истории науки (например, книгу Ф. Даннемана «История естествознания. Естественные науки в их взаимодействии и развитии. Т. 2, 3), особенно, математики (Г. Г. Цейтен «История математики в XVI и XVII веках»). В значительной мере его внимание к истории математики, как области исследования, можно объяснить влиянием деятельности его сына – крупнейшего историка математики XX века А. П. Юшкевича (1906 – 1993).

⁵³ Отметим, что экземпляр книги А. В. Васильева «Пространство, время, движение» содержался в личной библиотеке В. И. Ленина [16].

перевод ее на английский язык («Space, time, motion» (1924) [159]), который вышел в Лондоне с предисловием Б. Рассела⁵⁴. Отметим, что, несмотря на схожее название, книга А. В. Васильева существенно отличается по построению и содержанию от книги Г. Вейля. Книга «Пространство. Время. Материя» представляет собой законченный курс лекций по теории относительности – начиная с введения необходимых математических конструкций и заканчивая изложением современных результатов. Изложение А. В. Васильева носит иной характер: в своей книге он не пытается исчерпывающим образом на должном уровне строгости изложить результаты теории относительности, а выступает, главным образом, как историк – его больше интересует процесс эволюции геометрических и физических представлений человечества, начиная с древнейших времен и заканчивая современными философскими концепциями. Таким образом, он подводит читателя к новейшим взглядам на связь между пространством и временем, лежащим в основе специальной и общей теории относительности.

С этим направлением его исследований связаны также работы, посвященные эволюции представлений о геометрическом пространстве: «От Евклида до Гильберта» (вступительная статья к изданию перевода книги Д. Гильберта «Основания геометрии» (1923) [40]), «Development du concept scientifique de l'espace» (1929) [151], «Henry More, Newton et Berkeley» [155] (доклад, отправленный на Международный философский конгресс в Неаполе, 1925 г.).

О признании мировым научным сообществом заслуг А. В. Васильева в области истории науки свидетельствует его избрание 21 мая 1929 года (во время первого международного математического конгресса по истории науки, проводившегося 20-25 мая 1929 года в Париже и посвященного памяти

⁵⁴ С Б. Расселом А. В. Васильев лично познакомился, по-видимому, в мае 1920 г. на одном из заседаний математического кружка при Педагогическом институте, когда Б. Рассел проездом был в Петрограде с английской рабочей делегацией.

П. Таннери) первым из российских ученых членом-корреспондентом Международной академии истории науки⁵⁵.

Последняя треть XIX века – время становления истории математики как самостоятельной ветви исследований. Это, прежде всего, работы М. Кантора, Г. Цейтена и др. на Западе, В. В. Бобынина, И. Ю. Тимченко и др. в России. Одним из пионеров этого движения выступил А. В. Васильев, работы которого вместе с работами В. В. Бобынина и И. Ю. Тимченко обозначили начало изучения истории математики как самостоятельной научной дисциплины в нашей стране.

Работая последние годы своей жизни в Москве, А. В. Васильев оказал несомненное влияние на формирование историко-математических исследований в среде московских математиков (в частности, на А. П. Юшкевича) и, тем самым, на зарождение Советской историко-математической школы, развитие которой пришлось уже на 30-е годы (С. А. Яновская, М. Я. Выгодский, А. П. Юшкевич и др.).

⁵⁵ Международная академия истории науки была образована 17 августа 1928 года по решению Конгресса исторических наук, проходившего в августе 1928 года в Осло. Президентом Академии был избран А. Миели. Печатным органом Академии был тогда журнал «Archeion».

2.3. Педагогическая деятельность

2.3.1. Учебные курсы

Развитие математических исследований в России в конце XIX и начале XX веков характеризуется существенным расширением их тематики [54, 65, 93]. В конце XIX века, в первую очередь, обращают на себя внимание блестящие результаты математической школы П. Л. Чебышева. В круг интересов П. Л. Чебышева и его последователей входили такие направления, как теория вероятностей, теория приближения функций, теория чисел, теория устойчивости и качественные методы исследования дифференциальных уравнений и др.

Другим заметным центром математических исследований в России была Москва – здесь следует отметить, главным образом, исследования по прикладной математике Н. Е. Жуковского и его учеников, по дифференциальной геометрии – Б. К. Млодзеевского и Д. Ф. Егорова. Существенная роль Москвы как математического центра определялась также деятельностью организованного в 1864 г. Московского математического общества, фактически имевшего значение всероссийского.

Деятельность математиков других научных центров России – Казани, Харькова, Киева, Одессы – хотя и оставалась в этот период в некотором смысле «в тени» математиков Петербурга и Москвы, но, тем не менее, также характеризуется ценным вкладом в развитие современных направлений исследований: менее подверженные петербургскому диктату, они живо откликались на новые западные идеи, которые находили отражение в научных исследованиях и, что не менее важно, в учебных курсах.

Одним из «пионеров» введения новейших научных идей и концепций в процесс преподавания стал А. В. Васильев, живые и оригинальные лекции которого пользовались заслуженной популярностью у студентов. Изданные на их основе учебные пособия получили широкое распространение у учащейся молодежи.

Наиболее широкую известность получил курс А. В. Васильева «Введение в анализ» [21]. Первое его издание вышло в 1884 году. Инициативу введения этого курса в Казанском университете А. В. Васильев проявил в 1880 году ⁵⁶, вернувшись из заграничной командировки, где обратил внимание на существование в европейских университетах подобного курса ⁵⁷, призванного уравнивать уровень слушателей, поступивших на обучение. Вот как сам А. В. Васильев формулирует цель таких занятий: *«Цель этого курса будет заключаться, во-первых, в том, чтобы служить связью между гимназическим и университетским курсом, дать возможность студентам 1-го курса, с одной стороны, привести в систему и расширить взгляд на знания анализа ими уже приобретенные, с другой стороны, познакомиться на простых примерах с понятиями высшего анализа: о функции, о непрерывности и т.п.»* *«Другая цель моего курса будет состоять в том, чтобы дать студентам 1-го курса возможность самостоятельных упражнений. Методы аналитической геометрии и дифференциального исчисления для них слишком новы, чтобы они могли упражняться на них иначе как в технической стороне дела»* [79, оп. Физ-Мат, д. 877, л. 11-13].

Курс состоит из двух выпусков – «Учение о целом положительном числе» и «Обобщение понятия о числе». Первый выпуск начинается с очерка об эволюции понятия числа в трудах Евклида, И. Ньютона и др. Затем обсуждаются аксиомы и законы операций над целыми числами, а основное содержание посвящено различным теоретико-числовым результатам (в их числе, например, доказательство бесконечности множества простых чисел, закон распределения простых чисел, малая теорема Ферма и др.).

⁵⁶ Впервые в России такой курс начал читать в Петербургском университете Егор Иванович Золотарев в 1877–78 учебном году.

⁵⁷ Например, курс «Введение в анализ бесконечного» входил в программу преподавания математики в Лейпцигском университете наряду с такими вводными курсами, как «Введение в алгебру», «Введение в аналитическую геометрию», «Введение в дифференциальное и интегральное исчисление», «Введение в теоретическую механику» [42].

Гораздо больший интерес с точки зрения новизны идей представляет второй выпуск курса, посвященный обобщению понятия целого положительного числа. Завершая работу по изданию второго выпуска, А. В. Васильев писал: *«в русской математической литературе не имеется сочинения, которое излагало бы в систематической обработке основания учения о числах, освещая при этом эти основания с философской и исторической точек зрения и знакомя русского читателя с новыми взглядами и теориями»* [НА РТ, 79, оп. Физ-Мат, д. 1940, л. 10]. По плану А. В. Васильева этот курс должен содержать *«изложение учения о дробных, отрицательных, комплексных и гиперкомплексных числах с одной общей точки зрения учения о парах и изложение теорий несоизмеримых чисел, данных Дедекиндом, Кантором и др.»* [НА РТ, 79, оп. Физ-Мат, д. 1940, л. 11].

В самом деле, автор вводит последовательно рациональные, отрицательные, иррациональные, трансцендентные и комплексные числа и, подобно первому выпуску, снова сопровождает этот процесс результатами из теории чисел и анализа. При построении теории действительного числа А. В. Васильев описывает различные подходы: Р. Дедекинда (теория сечений), Г. Кантора (теория фундаментальных последовательностей), К. Вейерштрасса (теория агрегатов), Л. Кронекера (на основе функциональных сравнений), Д. Гильберта (аксиоматический подход).

Кроме того, необходимо обратить внимание на современный подход к формулировке основных понятий анализа, например, определение непрерывной функции А. В. Васильев дает следующим образом: функция называется непрерывной в точке x , если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что для любого h такого, что $|h| < \delta$, $|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon$.

Данный курс содержит также приложение «Новейшие обобщения понятия о числе», в котором рассматриваются кватернионы, гиперкомплексные числа, а также вводится понятие трансфинитных чисел.

Наряду с курсом «Введение в анализ» А. В. Васильев вел также практические занятия, о содержании которых можно судить по литографированному пособию «Введение в анализ. Практические упражнения» (1885) [22]. Эти занятия

посвящались применению основных понятий анализа и дифференциального исчисления к построению математических моделей различных физических явлений (теория деформации твердого тела, процессы, происходящие в жидкостях и газах, явления оптики, акустики и т.д.).

Таким образом, курс «Введение в анализ» можно охарактеризовать как вводный курс, охватывающий широкий круг вопросов на базовом уровне. Отличительной особенностью его является то, что он включает изложение новейших математических концепций, касающихся фундаментальных вопросов анализа (теория действительного числа, понятие непрерывности функции) и теории числа (аксиоматика числа, формальные законы операций над числами).

Учебный курс по высшей алгебре «Алгебраический анализ. Теория буквенных уравнений в связи с теорией субституций» (1886) [20] читался совмещенно для студентов 3 и 4 курсов физико-математического факультета Казанского университета. Курс представляет собой изложение основных разделов высшей алгебры – в нем рассматривается теория симметрических функций, знакопеременных функций, теория групп подстановок («субституций»), доказывается теорема Абеля о неразрешимости уравнения степени выше 4-ой в общем виде, рассматривается решение уравнений 3-ей и 4-ой степени, а также упоминается теорема Галуа об условиях разрешимости в радикалах уравнения простой степени. В качестве специального руководства по теории Галуа на русском языке автор предлагает магистерскую диссертацию Д. Ф. Селиванова «Теория алгебраического решения уравнений» (1885).

В целом, в отношении данного курса можно отметить использование А. В. Васильевым достаточно современной терминологии (например, в сравнении с курсом М. Е. Ващенко-Захарченко «Высшая алгебра. Теория подстановлений и приложение ее к алгебраическим уравнениям» (1890), где автор пользуется терминами «перемещение» для транспозиций, знакопеременные группы называет «перемежающимися» и т.д.) [96]. Отметим также, что рассматриваемый в курсе А. В. Васильева круг вопросов не включает изложения теории Галуа, которая к

тому времени уже начала проникать в алгебраические работы на русском языке, но не нашла отражения в университетском преподавании⁵⁸.

Чтение лекций по алгебраическому анализу дополнялось специальным курсом «Теория деления круга», посвященным изучению вопросов, касающихся уравнения деления окружности $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 = 0$ (p – простое).

Учебный курс «Дифференциальное исчисление» (1884) [24] представлял собой изложение некоторых разделов анализа – разложение функции (одной или многих переменных) в ряд Тейлора, разложение в ряд Тейлора основных функций одной переменной, основы теории эллиптических функций, теория экстремальных задач, теория функциональных определителей, обыкновенные дифференциальные уравнения.

Курс «Дифференциальная геометрия. Курс лекций по приложениям дифференциального исчисления к геометрии, читанный в императорском Казанском Университете в 1904 г.» (1905) [23] включает в себя изложение вопросов дифференциальной геометрии для плоских кривых, а также для кривых и поверхностей в пространстве. Круг обсуждаемых в курсе вопросов достаточно широк и практически совпадает с программой изданных в то же время лекций Д. Ф. Егорова «Дифференциальная геометрия» (1907) [57].

В первой главе, посвященной геометрии на плоскости, изложение начинается с изучения свойств касательной и нормали кривой на плоскости (с использованием декартовых и полярных координат), понятий выпуклости и вогнутости, затем выводятся формулы для дифференциала дуги и площади сектора кривой, рассматривается понятие кривизны кривой, строится теория соприкосновения кривых, а также теория огибающих и эволют.

Вторая глава, аналогично, начинается с рассмотрения свойств касательной плоскости и нормали к поверхности, а также – касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой, затем вводятся понятия соприкасающейся

⁵⁸ Стоит упомянуть, что теория Галуа отсутствовала в программе Петербургского и Московского университетов. Иллюстрацией этого служит тот факт, что выпускник МГУ 1929 г. А. П. Юшкевич, по его собственному признанию (свидетельство С. С. Демидова), узнал о содержании теории групп из короткого курса А. В. Васильева, который он прочитал ему в подмосковном санатории «Узкое» во время их совместных прогулок.

плоскости, бинормали и главной нормали к кривой, выводится формула дифференциала дуги кривой двойкой кривизны. Далее излагается теория кривизны пространственной кривой, в рамках которой выводятся формулы Серре-Френе, связывающие между собой первую и вторую кривизну кривой, а также косинусы углов, образуемых с осями координат касательной, главной нормалью и бинормалью кривой.

Завершает курс глава «Новая геометрия», в которой А. В. Васильев излагает некоторые современные геометрические концепции (описывает систему плюкеровых координат, приводит классификацию поверхностей в зависимости от их кривизны, дает введение в геометрию n измерений).

В качестве достоинств курса можно отметить широкий круг освещаемых вопросов, значительное количество примеров применения полученных результатов к конкретным геометрическим объектам (кривым, поверхностям), включение в курс основ новых геометрических теорий. К недостаткам можно отнести не всегда достаточный уровень строгости изложения. Например, формулу дифференциала дуги плоской кривой А. В. Васильев выводит с помощью не вполне строгих геометрических соображений, тогда как в курсе Д. Ф. Егорова, например, присутствует формальный аналитический вывод. Однако, вероятно, это можно объяснить стремлением автора к большей наглядности изложения.

Курс теории вероятностей читался А. В. Васильевым в течение одного или двух семестров обычно в сочетании с курсом исчисления конечных разностей. Изданный в 1885 году литографированный курс «Теория вероятностей» [45] начинался с изложения общих понятий теории конечных разностей (интерполяция функций, численное интегрирование и др.). Основная часть курса, посвященная теории вероятностей, начинается с обсуждения понятий субъективной, объективной и математической вероятностей. Затем автор рассматривает вопросы о вычислении математической вероятности в случае множества равновозможных событий и в случае, когда число возможных исходов бесконечно. Кроме того, он останавливается на принципах сложной и полной вероятностей. В разделе, посвященном повторению событий (схема Бернулли),

выводятся формулы для вероятности определенного числа благоприятных исходов, для наивероятнейшего числа благоприятных исходов, и, кроме того, доказывається теорема Бернулли о приближенном вычислении числа благоприятных исходов, которая затем интерпретируется на нескольких примерах с азартными играми. Доказывается также обратная теорема Бернулли, позволяющая оценить неизвестную вероятность благоприятного исхода при неограниченном числе испытаний. Далее следует несколько примеров применения доказанных результатов к вопросам демографии. Завершается курс разделом, посвященным теории средних величин, в котором А. В. Васильев выводит закон больших чисел в форме П. Л. Чебышева. При этом, указывая, что приведенный в курсе вывод не вполне строг, он отсылает читателей к оригинальной работе П. Л. Чебышева (1867) [106].

При чтении лекций по этим курсам А. В. Васильев в качестве дополнительных источников рекомендовал курсы А. А. Маркова («Исчисление конечных разностей» (1889-1894) и «Исчисление вероятностей» (1900)) и М. А. Тихомандрицкого («Курс теории конечных разностей» (1890) и «Курс теории вероятностей» (1898)). Кроме того, при чтении курса теории вероятностей А. В. Васильев также ссылался на курс В. Я. Буняковского «Основания математической теории вероятностей» (1896).

Кроме того, в Казанском университете в разные периоды А. В. Васильев читал курсы по теории функций, теории эллиптических функций, теории чисел, высшей алгебре, теории функций комплексной переменной, интегрированию дифференциальных уравнений, истории математики.

В Санкт-Петербургском (позднее, Петроградском) университете А. В. Васильев вел на математическом отделении физико-математического факультета факультативные занятия по теории групп, математической логике, теории иррациональных чисел, а также на химическом отделении – обязательные курсы по основам высшей математики, аналитической геометрии и введению в анализ и факультативный курс по введению в математическую химию. Известно, что семинар А. В. Васильева по математической логике посещал А. А. Марков

(младший): *«Я был поражен, узнав о существовании такой науки. Как!? Неужели можно применить алгебраическую символику для выражения чего-то совсем не числового!? Я пошел на этот семинар. Там делал доклад о работах Пеано вечный студент с рыжей шевелюрой и такой же рыжей бородой Константин Васильевич Трофимов. Он определял «нуль» и «единицу» согласно Пеано с помощью огромного количества формул, что было потрясающе. Я дал себе слово в будущем непременно заняться математической логикой⁵⁹»* (цит. по [74, с. XIII]).

Кроме того, благодаря беседам с А. В. Васильевым узнал о существовании математической логики и познакомился с ее основаниями П. С. Порецкий (подробнее см. в п. 3.1. Казанское физико-математическое общество).

Отметим также, что исследователи творчества поэта В. Хлебникова отмечают значительное влияние на него А. В. Васильева, который преподавал у него введение в анализ, а также вел занятия студенческого физико-математического кружка, который посещал В. Хлебников (подробнее см. [7, 109]).

Сказанного вполне достаточно для того, чтобы сделать вывод о богатстве совершенно нового материала, с которым А. В. Васильев знакомил российское студенчество. Этим он способствовал общему подъему уровня преподавания математики в российской высшей школе, а также введению новых направлений в круг занятий отечественных математиков (только что мы привели примеры А. А. Маркова-младшего и П. С. Порецкого).

2.3.2. Педагогические взгляды

А. В. Васильев активно интересовался вопросами математического преподавания как в средней, так и в высшей школе. Он принимал деятельное участие в подготовке и проведении Всероссийских съездов преподавателей математики. В частности, он был избран председателем I Всероссийского съезда

⁵⁹ Как известно, А. А. Марков впоследствии стал создателем школы конструктивной математики и логики в СССР.

преподавателей математики, проводившегося в Санкт-Петербурге в декабре 1911 г. – январе 1912 г.

В своих взглядах на преподавание математики в университете он примыкал к идеям немецких математиков – К. Вейерштрасса, Ф. Клейна. Уделять внимание построению педагогического процесса он начал во время своих первых научных командировок – в 1879 г. (Берлин и Париж) и 1882 г. (Берлин и Лейпциг).

Крайне важным для успешного обучения студентов самостоятельной научной деятельности А. В. Васильев считал проведение математических семинаров. Во время своих зарубежных поездок он внимательно анализирует манеру ведения семинаров именитыми европейскими профессорами – К. Вейерштрассом, Э. Куммером, Ф. Клейном, Ф. Вагерином и др. В частности, в отчете о командировке летом 1882 года он отмечает существенный, на его взгляд, недостаток математического семинара Э. Куммера. Этот семинар состоял в прочтении студентами или выпускниками их самостоятельных работ по различным разделам науки, причем *«такое прочтение в большинстве случаев интересовало только читавшего, не вызывало никаких замечаний и не могло их вызывать»* [42, с. 5].

Манере ведения семинаров Э. Куммера он противопоставляет способ Ф. Вагерина: он избирал в качестве предмета занятий какой-либо раздел математики (в 1882 г. это была теория потенциала), и студенты под его руководством изучали его по оригинальным источникам и излагали важнейшие результаты. А. В. Васильев отмечает, что такой подход способствовал более глубокому изучению студентами предложенного вопроса.

К. Вейерштрасс также проводил математические семинары для студентов, однако он предпочитал излагать на них отдельные разделы математики, интересующие его в данный момент (например, в 1879 г. – теория линейных дифференциальных уравнений, в 1882 г. – теория билинейных форм). Кроме того, он указывал на вопросы, которые могут стать темой самостоятельных исследований, а также сообщал о сделанных им или кем-то другим новых открытиях (в частности, летом 1882 г. на одном из семинаров К. Вейерштрасс

рассказывал слушателям о данном Ф. Линдемманном доказательстве трансцендентности числа π). По мнению А. В. Васильева, однако, эти занятия были более похожи на лекции, нежели на семинары, и потому не отвечали своей прямой цели – пробуждать у студентов интерес к самостоятельным научным исследованиям.

Наибольшее впечатление произвели на А. В. Васильева математические семинары, проводимые в Лейпциге под руководством Ф. Клейна. Каждый год занятия посвящались какому-либо определенному вопросу математики (в 1882 г. на этих семинарах рассматривалась теория тригонометрических рядов). Студенты изучают вопрос по различным источникам, излагают результаты этой работы на семинарах. Сам Ф. Клейн внимательно следил за ходом мысли студентов и нередко вместе с ними включался в разрешение вопросов, возникающих в ходе работы семинара. Особенно ценным считал А. В. Васильев стремление Ф. Клейна внести в работу семинара дух самостоятельных исследований. В подтверждение этому в отчете о командировке А. В. Васильев приводит следующий случай: *«до какой степени горячо относится Клейн к этому делу, может показать следующий факт. Во время моего пребывания в Лейпциге Клейн собирался ехать в соседний Галле для того, чтобы лично переговорить с Кантором по поводу одного вопроса из теории тригонометрических строк»* [42, с. 11].

Приобретенный опыт А. В. Васильев использует в собственной преподавательской практике. Помимо обычных занятий в стенах университета, он регулярно по пятницам приглашал к себе домой старшекурсников для собеседования. В 1900 г. он организовал первый в России студенческий кружок⁶⁰. Его ученики характеризуют его как блестящего лектора, который всегда умел заинтересовать слушателей.

Еще одним необходимым условием эффективности образовательного процесса в высших учебных заведениях А. В. Васильев считал качественную подготовку в средней школе. В отношении педагогических взглядов на

⁶⁰ Отметим, что в 1902 г. другой студенческий кружок был организован П. А. Флоренским в Московском университете [86, 99, 111].

математическое образование в средней школе показательной является речь А. В. Васильева «Математическое и философское преподавание в средней школе» [31], произнесенная на I Съезде преподавателей математики в Санкт-Петербурге в 1911 году. В ней он демонстрирует важность математического образования в школе, поскольку, во-первых, математика является инструментом для решения теоретических и прикладных задач, а во-вторых, является фундаментом для изучения философских дисциплин.

В качестве способа включить элементы философии в школьную программу на последней ступени средней школы, не пожертвовав при этом другими дисциплинами, А. В. Васильев предлагает индивидуализацию образования. Под индивидуализацией образования А. В. Васильев подразумевает ограничение числа часов по отдельным предметам некоторой минимальной величиной, что позволяет освободившееся время уделить изучению индивидуально подобранного материала.

Здесь следует отметить, что А. В. Васильев считал, что преподавание в школе математики не должно идти в ущерб преподаванию гуманитарных дисциплин. Он приводит в пример образовательную реформу 1905 г. во Франции, в результате которой сократилось преподавание филологии и литературы. Через несколько лет группа французских ученых и мыслителей – в их числе был А. Пуанкаре – высказалась за возвращение гуманитарным дисциплинам старого места в школьной программе, обратив внимание на снижение общего уровня образования учащихся.

О понимании А. В. Васильевым исключительной важности вопросов преподавания свидетельствует также тот факт, что в 1899 г. группой профессоров Казанского университета в составе Е. Ф. Будде ⁶¹, А. В. Васильева и

⁶¹ Евгений Фёдорович Будде (1859 —1931) — филолог-славист, языковед. Член-корреспондент Петербургской академии наук по Отделению русского языка и словесности (1916). Окончил историко-филологический факультет Новороссийского университета.

Ф. Г. Мищенко ⁶² был разработан проект устава Педагогического общества при Казанском университете, которое было официально учреждено в 1900 г. Председателем общества был избран Е. Ф. Будде, вице-председателем – А. В. Васильев. Общество брало на себя функции осмысления научных оснований педагогической деятельности, содействия профессиональной подготовке будущих учителей высшей квалификации и повышению профессионально-педагогической компетентности уже работающих, широкого распространения психолого-педагогических и методических знаний [100]. По случаю открытия общества А. В. Васильев произносит речь «Университет и национальное воспитание» [47], в которой подчеркивает роль Университета в воспитании в молодом поколении чувства гражданского долга, уважения к труду, любви к Отечеству.

С 1897 года А. В. Васильев вел в Казанском университете педагогический семинарий, на котором обсуждались сочинения Ж.-М. Дюамеля «Des méthodes dans les sciences de raisonnement» (1866—1872), Ф. Дожа «Курс методологии математики» (1893) и др., а также педагогические материалы журнала «L'Enseignement Mathématique».

После переезда из Петрограда в Москву в 1923 году А. В. Васильев становится председателем Московского математического научно-педагогического кружка. Московский математический научно-педагогический кружок представлял собой педагогическое общество при Московском университете, оформившееся в 1906 году. Инициатива создания этого общества принадлежала Б. К. Млодзеевскому, Н. Е. Жуковскому, Н. В. Бугаеву. Председателем общества был избран Б. К. Млодзеевский. После его смерти в 1923 году эту должность занял А. В. Васильев. На заседаниях кружка уделялось значительное внимание вопросам преподавания математики в школе, в частности в письме к В. И. Вернадскому от 3 декабря 1927 года А. В. Васильев упоминает *«несколько заседаний Математического кружка, в которых откровенно был поставлен*

⁶² Федор Герасимович Мищенко (1848 — 1906) — русский историк античности, переводчик с классических языков, член-корреспондент Петербургской АН (1895). Окончил историко-филологический факультет Киевского университета.

вопрос о упадке уровня математического образования в нашей средней школе» [б, оп. 3, д. 237, л. 11]. Печатным органом Московского научно-педагогического кружка был журнал «Математическое образование», издававшийся в период 1912-1917 гг., и затем в 1928-1930 гг.⁶³

В феврале 1925 года Московским математическим кружком было организовано празднование 50-летия педагогической деятельности А. В. Васильева. Речь, произнесенная А. В. Васильевым в день празднования, впоследствии была опубликована в журнале «Математическое образование» [30]. В ней он выделяет отличительные черты современной математики – повышенное стремление к строгости и ясности ее оснований, развитие новых областей математики, ранее находившихся на периферии поля зрения ученых, а также рост интереса к философско-исторической стороне математических исследований.

⁶³ С 1997 г. также выходит современная серия журнала «Математическое образование».

ГЛАВА 3. А. В. ВАСИЛЬЕВ И РОССИЙСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СООБЩЕСТВО

3.1. Казанское физико-математическое общество на рубеже XIX–XX вв.

3.1.1. История образования общества

Казанское физико-математическое общество было образовано в 1890 году из секции физики и математики Казанского общества естествоиспытателей [62, 64]. Секция выделилась в 1880 году по инициативе декана физико-математического факультета, астронома М. А. Ковальского, который стал ее первым председателем. Первоначально секция состояла лишь из 15 человек, в их число входили А. В. Васильев, И. С. Громека, Ф. М. Суворов, Ф. М. Флавицкий и др. В 1884 году, после смерти М. А. Ковальского, председателем секции был избран А. В. Васильев (1853-1929). За десятилетний период работы секция провела 103 заседания, на которых было сделано 249 научных сообщений. Помимо научных вопросов в круг интересов общества входили проблемы преподавания математики, организации научных мероприятий, в частности, метеорологических и других наблюдений во время солнечного затмения 7 августа 1887 года. Секция проводила памятные заседания, посвященные М. А. Ковальскому, И. С. Громеке, П. И. Котельникову, М. И. Мельникову, В. П. Максимовичу и др.. Члены секции принимали участие в чествовании научной деятельности русских и иностранных ученых – Э. Куммера, К. Вейерштрасса, А. Ю. Давидова, В. Я. Буняковского, а также в праздновании 50-летия Казанской обсерватории. Одним из значимых результатов деятельности секции стало издание полного собрания геометрических сочинений Н. И. Лобачевского в 1883–1886 гг.

Деятельность секции отражалась в выходивших с 1880 по 1890 гг. «Собраниях протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете».

В 1890 г. состоялось преобразование секции физико-математических наук в самостоятельное физико-математическое общество при Казанском университете. Согласно уставу общества, его основной целью являлось содействие развитию физико-математических наук в восточной части Российской империи. Другим важнейшим направлением деятельности общества была популяризация научного наследия выдающегося казанского геометра Н. И. Лобачевского. Председателем общества был избран А. В. Васильев, оставаясь им вплоть до 1907 г. (когда в связи с избранием в Государственный Совет он должен был переехать в Петербург).

Вместе с образованием самостоятельного общества возник и собственный печатный орган – «Известия Казанского физико-математического общества при Императорском Казанском университете». Наличие печатного органа позволило обществу устанавливать творческие связи с другими научными обществами путем публикации работ и обмена изданиями. Наряду с математиками Казани, свои работы в нем публиковали другие российские (Н. В. Бугаев, Н. Е. Жуковский, А. А. Марков и др.), а также европейские математики (Ф. Г. Тейшейра, Л. Э. Бетхер и др.). Редактированием сборника занимался председатель общества А. В. Васильев.

Знакомству западных ученых с результатами российских (и, в частности, казанских) математиков способствовала деятельность А. В. Васильева, а впоследствии – Д. М. Синцова, по реферированию русских работ для немецкого издания «*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*».

Кроме того, общество в лице Д. М. Синцова принимало участие в международном проекте по составлению библиографического указателя математической литературы.

Члены общества принимали активное участие в международной научной жизни, откликались на значимые для ученого мира события, такие как отмечавшийся в 1894 г. 70-летний юбилей К. Вейерштрасса, подписка на установление памятников К. Ф. Гауссу и В. Веберу в 1897 г., составление фонда имени Дж. Дж. Сильвестра в 1898 г. и др.

Деятельность общества освещалась в зарубежных научных изданиях. В частности, председатель общества А. В. Васильев, состоящий в тот период сотрудником голландского реферативного издания «Revue semestrielle des publications mathématique», регулярно публиковал в нем отчеты о содержании новых выпусков Известий казанского физико-математического общества.

Помимо научной и организационной работы Казанское физико-математическое общество вело активную просветительскую деятельность. В частности, члены общества занимались организацией циклов публичных лекций, а также изданием переводов трудов европейских математиков.

3.1.2. Научная деятельность общества

Основной темой математических исследований председателя общества А. В. Васильева была теория отделения корней систем уравнений, предметом которой является нахождение числа корней системы уравнений, лежащих в границах заданной области пространства. В общем случае системы n уравнений с n неизвестными поставленную задачу позволяет решить теория характеристик Л. Кронекера, описанная в работе «Über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln» (1869) [138]. Изложению исследований Л. Кронекера и некоторых смежных вопросов посвящена докторская диссертация А. В. Васильева «Теория отделения корней систем алгебраических уравнений» (1884) (см. п. 2.1. Математические работы).

Отметим, что в 1930-е годы с новой точки зрения на исследования по теории отделения корней взглянул казанский математик и механик Н. Г. Четаев, применивший в работе [119] теорию характеристик Л. Кронекера для решения задачи обращения теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия, то есть доказательства неустойчивости положения равновесия в случае, когда для него силовая функция не имеет максимума. Созданное Н. Г. Четаевым и его учениками научное направление получило название Казанская школа теории устойчивости.

Выдающимися научными результатами в области геометрической теории дифференциальных уравнений известен воспитанник Казанского университета Д. М. Синцов (1863-1946), которого А. В. Васильев привлек к тематике, связанной с теорией коннексов⁶⁴. По-видимому, немаловажную роль в этом сыграла работа А. В. Васильева «Об особенных решениях в связи с новыми взглядами на задачу интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка» (1878) [39], посвященная изложению результатов А. Клебша по теории коннексов и приложению их к исследованию особых решений дифференциальных уравнений. Данная работа являлась первым в России сочинением, посвященным теории коннексов [111]. Д. М. Синцов, будучи учеником А. В. Васильева, воспринял эти идеи, и вскоре в духе программы, намеченной А. Клебшем, была написана его магистерская диссертация «Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка» (1895). В дальнейшем Д. М. Синцов продолжил развитие этого направления, посвятив свои исследования изучению особых элементов коннекса и их связи с сопряженным коннексом [14]. Эти и последующие исследования, посвященные геометрической теории дифференциальных уравнений в ключе идей А. Клебша, сформировали существенный вклад Д. М. Синцова в область неголономной геометрии. Отметим, что свои основные результаты Д. М. Синцов регулярно докладывал на заседаниях Казанского физико-математического общества, с которым сохранил тесную связь и после своего отъезда из Казани в 1899 г. в Екатеринослав (а затем – в Харьков).

Кроме того, ряд докладов на заседаниях общества был посвящен другому вопросу теории дифференциальных уравнений, а именно, проблеме существования и нахождения алгебраических и рациональных интегралов дифференциального уравнения. В этой связи необходимо отметить магистерскую диссертацию А. В. Васильева «О функциях рациональных, аналогичных

⁶⁴ Понятие коннекса впервые было введено А. Клебшем в 1872 г. Коннексом (с элементом точка-прямая) в его работах называется геометрический образ, определяемый уравнением $f(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) = 0$, где x_i – однородные координаты точки, а u_i – однородные координаты прямой в плоскости.

функциям двояко-периодическим» (1880), в которой описывается связь вопроса существования алгебраических интегралов линейного дифференциального уравнения второго порядка с конечными подгруппами группы дробно-линейных преобразований. Эта тематика ранее находила отражение в трудах Л. Фукса, Г. Шварца, Ф. Клейна. В 1892 г. на заседании общества с докладом «Об алгебраических частных интегралах обыкновенных дифференциальных уравнений» выступил Н. В. Бугаев (избранный членом Казанского физико-математического общества в мае 1892 г.). Сюда же примыкают исследования, составившие докторскую диссертацию Д. М. Синцова «Рациональные интегралы линейных уравнений» (1898). Здесь автор анализирует методы отыскания рациональных интегралов дифференциальных уравнений, предложенные Ж. Лиувиллем и В. Г. Имшенецким, приходя к выводу о внутреннем тождестве обоих методов.

Также одним из наиболее известных членов Казанского физико-математического общества был выдающийся российский логик П. С. Порецкий (1846-1907). Как отмечается в [85], он впервые узнал о существовании математической логики и познакомился с ее основаниями благодаря беседам с А. В. Васильевым. Начиная с 1884 г. в Собраниях протоколов заседаний физико-математической секции общества естествоиспытателей (позже – в Известиях Казанского физико-математического общества) выходит цикл его статей, в числе которых – работы «О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики» (1884), «Семь основных законов теории логических равенств» (1898) и др. В своих исследованиях П. С. Порецкий вносит значительный вклад в логику высказываний и логику классов, развивая и обобщая идеи Дж. Буля и Э. Шредера.

Одним из продолжателей геометрических идей Н. И. Лобачевского был казанский математик и механик А. П. Котельников (1865-1944). Начав свою научную деятельность с вопросов механики (магистерская диссертация «О давлении жидкости на плоские стенки» (1896)), под влиянием своих учителей А. В. Васильева и Ф. М. Суворова он пришел к построению механики в

пространства Римана и Лобачевского [3]. Свою теорию он изложил в докторской диссертации «Проективная теория векторов» (1899).

Еще одно развивающееся в Европе направление, которому на заседаниях общества было уделено значительное внимание, – голоморфная динамика. Этот раздел математики посвящен вопросам, связанным с итерацией функций, и изучался еще И. Ньютоном в исследованиях, посвященных приближенному вычислению корней уравнения. В XIX в. исследования свойств итерации функций получили развитие в трудах Ю. Кенигса, Э. М. Лемере и др. В связи с отсутствием в этой области какого-либо обобщающего сочинения на русском языке, в 1899 г. по инициативе А. В. Васильева на физико-математическом факультете Казанского университета был объявлен конкурс студенческих работ по этой теме [41]. Положительного отзыва заслужила работа И. И. Аристова «Итерация функций» [2], представляющая собой обзор основных результатов, полученных в этой области вплоть до 1890-х гг. Кроме того, на заседаниях Казанского физико-математического общества в 1902–1903 гг. трижды были представлены доклады по теории итерации функций одного из пионеров этой области – Л. Э. Бетхера, результатом их стала публикация обществом сочинения Л. Э. Бетхера «Главнейшие законы сходимости итераций и их приложения к анализу» (1903-1904) [15].

Необходимо также отметить интерес членов общества к вопросам теории чисел. Этой тематике посвящали работы П. С. Порецкий («О распознавании простых чисел» (1888), «К учению о простых числах» (1888)), Е. И. Григорьев («К теореме Фермата о разложении числа в сумму треугольных чисел» (1901), «Одно из свойств первообразных корней» (1902)) и др. Как отмечается в [81], существенная роль в формировании интереса членов общества к исследованиям, касающимся теории чисел и ее философских оснований, принадлежала А. В. Васильеву.

3.1.3. Мероприятия, посвященные Н. И. Лобачевскому

Одним из важнейших факторов, способствовавших росту известности казанских математиков и Казанского физико-математического общества в научном мире, была деятельность, связанная с распространением идей Лобачевского и чествованием его памяти. По инициативе председателя общества А. В. Васильева в 1883–1886 гг. было издано полное собрание геометрических сочинений Лобачевского в двух томах (с предисловиями А. В. Васильева к обоим томам) [73].

В 1893 году Казанское физико-математическое общество стало центром организации празднований по случаю столетия со дня рождения Н. И. Лобачевского⁶⁵. О том, с каким живым интересом Европа восприняла это событие, можно судить по тому, что речь, произнесенная А. В. Васильевым на торжественном заседании Казанского университета 22 октября 1893 г., была переведена на немецкий [124], французский [126], английский [132], испанский [129] и чешский языки.

В рамках деятельности по популяризации идей Н. И. Лобачевского август 1895 г. – август 1896 г. А. В. Васильев проводит в заграничной командировке в Германии, Австрии, Италии. Основной целью этой поездки являлось участие в издании на немецком языке работ Н. И. Лобачевского «Новые начала геометрии» и «О новых началах геометрии». Перевод этих работ вышел в 1898 г. под редакцией Ф. Энгеля и П. Штеккеля в сборнике работ по неевклидовой геометрии «Urkunden zur Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie» [62].

Кроме того, Казанским физико-математическим обществом по предложению А. В. Васильева была инициирована денежная подписка для увековечения памяти великого геометра, а его обширные международные связи позволили придать этой идее грандиозный размах. В ведущих европейских научных изданиях на французском, немецком, английском языках было опубликовано воззвание к

⁶⁵ Уже в советское время были найдены архивные документы, позволяющие заключить, что в действительности Н. И. Лобачевский родился 20 ноября 1792 года (по старому стилю) (подробнее см. в [87]).

российским и иностранным математикам от лица президента общества А. В. Васильева и вице-президента Ф. М. Суворова. В нем характеризуется математическое и философское значение исследований Н. И. Лобачевского для изучения свойств пространства, а также предлагается принять участие в составлении капитала имени Н. И. Лобачевского. Был организован так называемый комитет Н. И. Лобачевского, почетными членами которого стали Э. Бельтрами, Г. Гельмгольц, Ж. Дарбу, Ф. Клейн, Л. Кремона, А. Кэли, С. Ли, А. Пуанкаре, Дж. Сильвестр, П. Л. Чебышев, Ш. Эрмит и др. По объявленной подписке средства поступали почти из всех стран Европы, из Америки и Австралии. О результативности проводимой обществом пропаганды идей Лобачевского свидетельствует, в частности, тот факт, что третье издание английского перевода полного собрания геометрических сочинений Н. И. Лобачевского (выполненного Дж. Гальстедом), напечатанное по заказу Министерства Народного Просвещения Японии, было полностью отправлено в Японию.

На собранные в результате подписки деньги в 1896 году был торжественно открыт памятник Н. И. Лобачевскому (честь открытия завесы была предоставлена А. В. Васильеву), а также учреждена международная премия за лучшие исследования в области геометрии. На это мероприятие были приглашены известные иностранные ученые. Необходимо отметить, что прошедшая в 1896 г. встреча рассматривалась как организационное собрание ряда европейских и американских математиков с целью обсуждения деталей подготовки и проведения первого международного математического конгресса, запланированного на 1897 г. В частности, известно, что в мероприятиях, прошедших в Казани в сентябре 1896 г., принимали участие французские математики Ш. Лезан и Э. Лемуан [114]. Очевидно, Ш. Лезан придавал большое значение этому мероприятию, поскольку в письме к Г. Кантору от 22 сентября 1895 года отмечал: «... *эта встреча, предложенная господином Васильевым, может быть полезна для подготовки к*

*Конгрессу 1900*⁶⁶ *года»* [121, с. 156]. Известно также, что летом 1896 г. Казань посетил американский математик Дж. Гальстед. Протокол торжественного заседания Казанского физико-математического общества 1 сентября 1896 г. содержит следующие доклады: Д. Б. Гальстед – «Дарвинизм и неевклидова геометрия», Э. Лемуан – «Геометрография или теория упрощения геометрических построений», Э. Лемуан – «Непрерывное преобразование в треугольнике и тетраэдре», Ш. А. Лезан – «О кривизне плоских кривых», Ш. Эрмит – «О некоторых разложениях в строку из теории эллиптических функций», Ж. Нейберг – «О задаче Якоби», М. Окань – «О представлении уравнений второй степени с тремя переменными с помощью прямых и кругов», П. Жирарвиль «Теория полета птиц».

Первое присуждение премии имени Н. И. Лобачевского состоялось на торжественном заседании Казанского физико-математического общества 22 октября 1897 года. На нем председатель общества А. В. Васильев выступил с речью «Николай Иванович Лобачевский», а также с докладами «Геометрия многих измерений» и «Алгебра и анализ Лобачевского». На основании отзыва Ф. Клейна первым лауреатом премии Н. И. Лобачевского был признан С. Ли, представивший цикл работ «*Theorie der Transformationsgruppen*» (1888-1893), посвященный применению теории групп для обоснования геометрии Лобачевского. Вторая премия имени Н. И. Лобачевского была присуждена в 1900 г. В. Киллингу за работы по многомерным неевклидовым пространствам и теории групп преобразований, рецензентом его работ был Ф. Энгель. В последующие годы среди награжденных премией Лобачевского были такие выдающиеся математики, как Д. Гильберт, Ф. Шур, Г. Вейль и др.

⁶⁶ Речь идет о конгрессе 1900 года потому, что существующий на тот момент план проведения конгрессов подразумевал, что в 1897 году будет проведен лишь организационный съезд, а первый полноценный конгресс будет назначен на 1900 год [133].

3.1.4. Заключение

Прослеживая процесс развития Казанского физико-математического общества с конца XIX в. до начала XX в., можно заметить, что за этот период оно преобразовалось из научного общества местного значения в математический центр международного уровня.

Участники общества занимались разработкой ряда современных европейских направлений исследований. Во многих случаях определение их тематики (в частности, в исследованиях Д. М. Синцова, П. С. Порецкого, А. П. Котельникова) было заслугой А. В. Васильева.

Кроме того, на заседаниях общества нередко звучали доклады ведущих российских (Н. В. Бугаев, А. А. Марков, П. А. Некрасов и др.), а также иностранных математиков (преимущественно, в изложении членов общества), что, безусловно, способствовало росту уровня научных исследований участников заседаний.

Международную известность обществу принесли мероприятия, связанные с именем Н. И. Лобачевского (издание полного собрания геометрических сочинений Н. И. Лобачевского в 1883–1886 гг., празднование 100-летия Н. И. Лобачевского в 1893 г., учреждение премии имени Н. И. Лобачевского в 1896 г.). Успехом эта серия мероприятий во многом обязана инициативности и энергии их главного организатора А. В. Васильева. Немаловажную роль в процессе их подготовки сыграли его обширные связи с европейским научным миром, позволившие придать этой идее международный масштаб. Кроме того, со стороны А. В. Васильева исходила в этот период широкая пропаганда идей и взглядов Н. И. Лобачевского в статьях и выступлениях на научных съездах, что в значительной степени способствовало росту интереса ученого мира и общества в целом⁶⁷ к жизни и творчеству Н. И. Лобачевского.

Продуктивная деятельность и успешная реализация задач Казанского физико-математического общества были бы невозможны, прежде всего, без

⁶⁷ О влиянии идей Н. И. Лобачевского на развитие русского авангарда см. [98].

неутомимой организаторской работы А. В. Васильева. Как председатель общества, он занимался редактированием Известий Казанского физико-математического общества, уделял большое внимание расширению круга подписчиков сборника. Кроме того, он публиковал в европейских журналах отчеты о деятельности общества, что также способствовало привлечению внимания к Казани как математическому центру.

Вышесказанное позволяет сделать вывод об определяющей роли А. В. Васильева в процессе становления Казанского математического общества как математического центра международного уровня.

3.2. А. В. Васильев и Петроградское физико-математическое общество

3.2.1. История Санкт-Петербургского математического общества

История Санкт-Петербургского математического общества берет свое начало в 1890 году. Инициатива его создания принадлежала В. Г. Имшенецкому (1832-1892), который был избран председателем учредительного собрания общества, состоявшегося 20 октября 1890 г. на квартире В. И. и П. А. Шифф⁶⁸. На заседании присутствовали: академики О. А. Баклунд, А. А. Марков, профессора Ю. В. Сохоцкий, Н. А. Забудский, а также В. В. Витковский, Д. А. Граве, И. И. Иванов, И. А. Клейбер, Н. П. Коломейцев, И. В. Мещерский, П. М. Новиков, И. Л. Пташицкий, Д. Ф. Селиванов, В. И. Станевич. Профессора К. А. Поссе, А. Н. Коркин, Д. К. Бобылев и А. М. Жданов письменно известили о своем согласии войти в число членов-учредителей общества [51, 59, 90].

В. Г. Имшенецкий был избран председателем созданного общества, Ю. В. Сохоцкий – товарищем председателя, а П. А. Шифф – секретарем. На заседаниях общества предполагалось заслушивать доклады по чистой математике, теоретической механике, теоретической астрономии и математической физике. Для вступления в общество необходимо было иметь рекомендацию одного или двух его членов и быть избранным большинством голосов.

В период 1890-1899 гг. Общество проводило регулярные заседания, число его членов росло год от года. Почетным членом Общества в 1893 г. был избран П. Л. Чебышев, а в 1894 г. иностранным членом Общества стал Г. Миттаг-Леффлер. Кроме того, в число членов общества входил польский математик и историк математики С. Дикштейн.

Члены общества делали доклады по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, алгебре, теории чисел, механике, геометрии и

⁶⁸ Несмотря на то, что Петербург в конце XIX века являлся, наряду с Москвой, сильным математическим центром, математическое общество там было организовано существенно позже, чем в Москве. Это обстоятельство можно объяснить влиянием Академии наук, которая выполняла в Петербурге функции математического общества – на ее заседаниях обсуждались научные работы, присуждались премии и т. д.

другим разделам математики. Наиболее активное участие в деятельности общества принимали Д. А. Граве, Н. Я. Сонин, Ю. В. Сохоцкий, П. А. Шифф, Б. М. Коялович, А. А. Марков, Н. Б. Делоне, И. В. Мещерский, Д. К. Бобылев, О. А. Баклунд.

В период после 1900 г. деятельность Общества замерла: число членов общества сокращалось, заседания собирались все реже, и, по всей вероятности, общество прекратило существование в 1905 г. Судя по всему, заседания окончательно прекратились в связи с революционной обстановкой 1905 г. и так и не возобновились впоследствии.

3.2.2. Образование Петроградского физико-математического общества

В тот же период в Петербурге (впоследствии, Петрограде), как мы уже говорили, жил и работал А. В. Васильев.

В июне 1919 года А. В. Васильев становится профессором по кафедре математики в Педагогическом институте, открытом при Петроградском университете, а вскоре после этого – деканом физико-математического факультета института. С 1 декабря 1919 года А. В. Васильев также является заведующим математическим кабинетом Педагогического Института [102].

В 1920 году по инициативе А. В. Васильева на базе математического кабинета, изначально в форме математического кружка, начинает работу Петроградское физико-математическое общество [66].

Заседания кружка начались 20 марта 1920 года [163]. На первом заседании после приветственной речи председателя кружка А. В. Васильева выступил Ю. А. Крутков с докладом «О квантовой теории». На втором заседании 15 мая выступал Я. В. Успенский с докладом о курсе неевклидовой геометрии, читаемом им в Университете. На этом заседании присутствовал известный английский математик и философ Б. Рассел, который был в Петербурге проездом с английской рабочей делегацией. Судя по всему, эта встреча оказалась

плодотворной: впоследствии Б. Рассел снабдил своим предисловием английское издание книги А. В. Васильева «Пространство, время, движение» (1924) [159].

Третье заседание прошло 22 мая, когда В. К. Фредерикс представил собравшимся доклад, посвященный основаниям теории относительности. Он же на четвертом заседании (6 ноября 1920 года) сделал сообщение об одной книге Г. Вейля (по-видимому, речь шла о книге «Das Kontinuum» (1918)).

На одном из заседаний П. М. Горшков сделал доклад о разъяснении, данном А. Эйнштейном относительно движения перигелия Меркурия, также обратил внимание на гипотезу Х. Зелигера⁶⁹, которая объясняет эти движения через влияние зодиакального света. Кроме того, Н. А. Булгаков в своем докладе познакомил слушателей с теорией Г. Ми⁷⁰, затрагивающей вопросы теории поля и атомной физики.

Еще одно заседание (23 ноября 1920 года) было посвящено памяти Е. С. Федорова. В ходе этого заседания профессор В. В. Никитин описал интересный жизненный путь Е. С. Федорова. Профессора А. К. Болдырев и С. А. Богомоллов посвятили свои доклады научным заслугам знаменитого ученого: во-первых – в кристаллографии и кристаллохимии, и во-вторых – в высшей геометрии, которую Е. С. Федоров обогатил своими идеями. На том же заседании были сделаны доклады о новых достижениях в теории строения атомов (профессор Л. А. Чугаев), в авиации (К. Б. Меликос), а также заслушан реферат о математических работах, которые появились в 42 томе журнала *Acta Mathematica* (Я. Д. Тамаркин, А. С. Безикович, Г. М. Фихтенгольц). Кроме того, был представлен также реферат о важнейших работах Т. Леви-Чивита и задаче трех тел.

На нескольких заседаниях профессора Я. В. Успенский, Е. Л. Николаи, Н. М. Гюнтер, А. А. Саткевич рассказывали о своих исследованиях в области чистой и прикладной математики.

⁶⁹ Хуго фон Зелигер (1849-1924) – немецкий астроном, специалист по звёздной астрономии, астрофизике и небесной механике.

⁷⁰ Густав Адольф Феодор Вильгельм Людвиг Ми (1869-1957) — немецкий физик.

Наконец, три заседания были посвящены вопросам истории культуры в связи с историей математики (Н. Я. Перн – «Новый метод изучения истории культуры», Д. П. Цинзерлинг – «Математика у древних египтян», В. Г. Богораз – «Развитие понятия о числе»).

Почти все эти заседания собирали многочисленных слушателей и некоторые, особенно многолюдные, проходили в большой аудитории физического института.

14 мая 1921 г. на 21 заседании Математического Кабинета Педагогического Института Петроградского университета состоялась окончательная организация физико-математического общества [164]. Наряду с главной задачей общества, заключающейся в содействии научному общению между всеми лицами, интересующимися математикой и естествознанием, было обозначено также педагогическое направление деятельности общества (развитие взаимодействия петроградских математиков с высшей школой и, в особенности, университетом), и организована студенческая секция, целью которой должно служить пробуждение интереса студентов к самостоятельной научной работе.

В письме к академику П. П. Лазареву 15 мая 1921 г. А. В. Васильев писал: *«Вчера Петроградское физико-математическое общество организовалось, т. е. выбран президиум (товарищи мои как председателя – Я. В. Успенский и Ю. А. Крутков, ученый секретарь – В. К. Фредерикс) и начинает свою деятельность 25 мая, ...»* (цит. по [59, с. 320]).

Вновь организованное общество начало свою деятельность с двух заседаний – 25 и 26 мая. На первом заседании А. В. Васильев сделал доклад «Геометрия мира», а академик П. П. Лазарев – «Ионная теория реакций». На заседании 26 мая также было сделано два доклада: А. В. Васильев рассказал о своей работе над историей математики в России, А. С. Безикович сделал доклад по теории вероятностей, по тематике, связанной с работами П. Л. Чебышева.

Одной из первоочередных задач Общества было восстановление и укрепление научных связей с Московским Математическим обществом. На развитие связей между московскими и петербургскими математиками существенно повлиял приезд в Петербург группы московских математиков для

участия в конференции, проводимой Академией наук в честь 100-летия со дня рождения П. Л. Чебышева, позволивший провести ряд совместных заседаний. По этому поводу А. В. Васильев писал академику П. П. Лазареву: «... *Как я рад прекрасному ходу нашего Московско-Петроградского математического общества. ... Какое горячее и сердечное участие во всем этом приняли Вы!*» (цит. по [59, с. 321]). Математики Москвы с готовностью поддержали инициативу петербуржцев – 1 октября 1921 г. Б. К. Млодзеевский, исполняя обязанности президента Московского Математического общества, писал А. В. Васильеву: «*прошу Вас принять выражение глубокого к Вам уважения и вместе с тем истинного удовольствия, что члены нашего общества могли принять участие в трудах нашего молодого собрата – Петроградского Физико-Математического общества*» [82, оп. 1, д. 89, л. 1]. Завершая это письмо, Б. К. Млодзеевский выразил также пожелание, «*чтобы Петроградское Физико-Математическое общество послужило новым очагом математических наук в России и чтобы столь счастливо завязавшееся общение ⁷¹ с Московским Математическим обществом расширилось и крепло*».

В течение первых двух лет существования общества на его заседаниях звучали доклады по теории чисел (Я. В. Успенский, Н. Б. Делоне), теории функций действительного переменного (А. С. Безикович), теории дифференциальных уравнений (Б. М. Коялович), а также систем дифференциальных уравнений (Н. М. Гюнтер), теории автоморфных функций (В. И. Смирнов), гидродинамике (А. А. Фридман), и др.

Специальное заседание в 1922 году было посвящено Д. Гильберту, по этому случаю председатель общества А. В. Васильев произнес речь «Гаусс, Гельмгольц, Гильберт», в которой охарактеризовал влияние этих великих немецких ученых на развитие математики в XIX в.

⁷¹ Здесь Б. К. Млодзеевский, по-видимому, выражает надежду на окончание конфронтации между московскими и петербургскими математиками, которая, впрочем, завершилась лишь после перевода Академии наук в Москву в 1934 г.

В феврале 1923 года прошло заседание, посвященное памяти А. А. Маркова, скончавшегося 20 июля 1922 г. Вступительное слово произнесли А. В. Васильев и В. А. Стеклов, а затем Я. В. Успенский, Н. М. Гюнтер, А. С. Безикович выступили с докладами о работах А. А. Маркова в области теории чисел, теории вероятностей, теории непрерывных дробей, теории дифференциальных уравнений.

Отметим, что в период деятельности А. В. Васильева в качестве председателя Петроградского физико-математического общества наблюдается значительное расширение тематики общества: на заседаниях начинают появляться доклады, не ограниченные узкоспециальной сферой, а посвященные истории, культуре и т. д.

В 1923 г. после отъезда А. В. Васильева в Москву новым председателем общества стал Н. М. Гюнтер (по-видимому, с осени 1923 г.). В 1925 г. по случаю празднования 50-летия педагогической деятельности А. В. Васильева Ленинградское физико-математическое общество направляет А. В. Васильеву приветственный адрес, подписанный председателем Н. М. Гюнтером и секретарем А. Ф. Гавриловым, в котором читаем: *«Вы вдохнули жизнь в наше Ленинградское физико-математическое общество – забытое в течение многих лет. В нас живет память о трудах Ваших по организации – почти вновь – общества и председательствованию в нем.»* (письмо от 26 января 1925 г., цит. по [70, с. 37]).

3.2.3. Заключение

Анализируя предпосылки, с которыми было связано произошедшее в 1920-1921 гг. возобновление работы Петроградского физико-математического общества после долгого перерыва в деятельности, можно отметить, что центральное место в этом процессе занимала фигура А. В. Васильева. К тому времени он имел достаточный авторитет в российском и европейском научном мире, был известен своей активной общественно-научной работой, а также имел опыт организации деятельности Казанского физико-математического общества.

Кроме того, Математический кабинет Педагогического института при Петроградском университете, руководителем которого был А. В. Васильев, стал подходящей базой для возобновления заседаний общества. И, наконец, самым важным фактором стало тяготение петербургского научного сообщества к объединению, которое не могло не иметь места в тот сложнейший для российского научного мира период.

В 1923 году А. В. Васильев переезжает в Москву, где продолжает научно-педагогическую и организаторскую деятельность.

3.3. Российские ученые и формирование международного математического сообщества в конце XIX – первой трети XX вв.

Последняя треть XIX века стала для европейской математики временем активизации процессов развития международного сотрудничества, когда начал формироваться новый исторический феномен – международное (пока еще преимущественно европейское) математическое сообщество. Если до этого развитие происходило, главным образом, в национальных масштабах, и основные пути развития математической мысли определяли две национальные школы, находившиеся в состоянии острого соперничества, французская и немецкая, то к концу века уже громко звучат голоса других быстро растущих в этом отношении математических государств – прежде всего, Италии, Великобритании, скандинавских стран, наконец, России и США. Все отчетливее прослеживается тенденция к развитию международного сотрудничества, начинается процесс строительства единого мирового математического сообщества. Важную роль здесь играют ведущие математики мира.

Поистине колоссальное влияние на развитие математики в мире имела научная и педагогическая деятельность К. Вейерштрасса. Его уникальные лекции привлекали в Берлин математиков всего мира. Среди российских ученых, изучавших его лекции, укажем А. Н. Коркина, А. В. Бесселя, Е. Н. Золотарева, Д. Ф. Селиванова, Н. В. Бугаева, П. М. Покровского, М. А. Тихомандрицкого, В. П. Ермакова, Б. Я. Букреева и, конечно же, А. В. Васильева. Многие из них были учениками П. Л. Чебышева.

Кроме того, замечательную роль в распространении идей К. Вейерштрасса в России сыграла его русская ученица С. В. Ковалевская, ставшая центром группы математиков-учеников К. Вейерштрасса. Будучи последовательницей К. Вейерштрасса, она глубоко изучила аппарат аналитических функций и, применяя его в своих работах, способствовала распространению идей К. Вейерштрасса в математической среде. 27 января 1882 г. Ш. Эрмит писал С. В. Ковалевской: *«Наш общий учитель – это господин Вейерштрасс, и наши*

лекции в Сорбонне и Политехнической школе имеют главным образом целью изложить слушателям его труды и его великие открытия. К тому же и Вы, милостивая государыня, являетесь звеном симпатии между мной и великим геометром.» (цит. по [56, стр. 80]).

Лидер французской математики того времени, Ш. Эрмит, также существенно способствовал укреплению международного сотрудничества в математической среде, проявляя большое уважение к ведущему математику Германии того времени – К. Вейерштрассу. В частности, многим своим ученикам он рекомендовал прослушать курсы лекций К. Вейерштрасса.

Другой яркой фигурой в математическом мире XIX в. стал П. Л. Чебышев. Отметим его тесные контакты с французской наукой – он неоднократно выступал с докладами на заседаниях Французской ассоциации содействия преуспеванию науки, представляя русскую науку за рубежом. П. Л. Чебышев был членом Академии наук Института Франции, членом-корреспондентом Берлинской академии наук, членом Лондонского королевского общества, Итальянской королевской академии и Шведской академии наук. Известно также, что по инициативе Ш. Эрмита П. Л. Чебышев был награжден командорским крестом ордена Почетного легиона Французской академии наук: *«Все члены Академии, которым было представлено возбужденное мною ходатайство, поддержали его своей подписью и воспользовались случаем засвидетельствовать живейшую симпатию, которую Вы им внушаете. Все они присоединились ко мне, заверяя, что Вы являетесь гордостью науки в России, одним из первых геометров Европы, одним из величайших геометров всех времен.»* (письмо Ш. Эрмита П. Л. Чебышеву от 21 мая 1890 г., цит. по [111, стр. 336-337]).

В этот период появляются реферативные и библиографические проекты: *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (Германия, 1868), *Revue semestrielle des publications mathématiques* (Амстердам, 1893), *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* (Франция, 1885). Кроме того, организуются энциклопедии математических наук – немецкая *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*

⁷² (1898) и французская *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*
⁷³ (1904).

Первым шагом в направлении подготовки международных математических конгрессов можно считать съезд математиков, организованный в 1893 году во время выставки в Чикаго. Избранный президентом конгресса Ф. Клейн отметил важность международного общения математиков и выразил надежду на дальнейшее развитие этого направления.

Немаловажную роль в этом процессе сыграли также российские ученые, по инициативе которых было организовано празднование столетнего юбилея Н. И. Лобачевского (1893 г.) и учреждена международная премия имени Н. И. Лобачевского (1895 г.), что, несомненно, способствовало укреплению международных связей математиков Европы и Америки.

Новые времена рожают и новых героев. Появляется новый тип математика – деятеля международного математического сообщества; математика, центральным направлением деятельности которого становится конструирование и налаживание международного научного сотрудничества, соответствующих проектов, организаций, конференций и съездов. Такая деятельность требует от человека немалых усилий и не всегда совместима с напряженной творческой работой. Поэтому ей, как правило, не посвящают себя математики первого ранга (немногие исключения, скорее, подчеркивают правило). Однако такая деятельность предполагает наличие достаточно высокого профессионального уровня, позволяющего оценивать положение в современной математике и тенденции ее развития, необходимой общей культуры, владение основными европейскими языками, наконец, необходимые чисто человеческие качества – коммуникабельность, известное дипломатическое дарование и т. п. И такие люди

⁷² *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* – энциклопедический проект, организованный в 1898 году Ф. Клейном (1849 – 1925) и В. Мейером (1856 – 1934). Первый том «Арифметика и алгебра» был подготовлен в период 1898 – 1904 гг.

⁷³ *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* – французский аналог немецкой энциклопедии, где статьи представляли собой расширенные переводы статей из немецкого проекта. Первый том был подготовлен в 1904 – 1909 гг.

появляются. Это Дж. Б. Гучча в Италии, Ш. Лезан во Франции, Г. Гальдеано в Испании, Ф. Г. Тейшейра в Португалии. Самой яркой фигурой такого плана в России стал А. В. Васильев.

К деятельности такого рода А. В. Васильева предрасполагали многие черты его личности – он имел превосходную математическую подготовку, хорошо ориентировался в новейших математических теориях, обладал широкими познаниями в различных областях человеческой деятельности, высокой культурой, превосходным знанием нескольких языков, был человеком живым, общительным и общественно ориентированным.

Либерально-демократические убеждения сделали его своим человеком в петербургских кругах. Его уважал и ценил А. А. Марков. Умение ладить с людьми позволило ему поддерживать хорошие отношения с математиками идеологически очень разными. Так, переехав в Москву, он легко вошел в среду московских математиков. С ним успешно сотрудничал Д. Ф. Егоров.

Начало установлению широких международных связей положил Берлин. Направленный туда в 1879 г. в период подготовки к профессорскому званию, А. В. Васильев изучает курсы К. Вейерштрасса, Э. Куммера, Л. Кронекера. Затем он отправляется в Париж, где слушает курсы Ш. Эрмита и Ж. Лиувилля.

Наиболее тесные научные контакты установились у А. В. Васильева с математической школой К. Вейерштрасса. Его лекциям он уделял наибольшее внимание во время своей заграничной стажировки в 1879 году. Во время этой поездки А. В. Васильев познакомился со многими европейскими математиками, в частности, с двумя представителями математической школы К. Вейерштрасса – С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлером.

В 1885 году С. В. Ковалевская обратилась к А. В. Васильеву с просьбой взять на себя распространение среди российских математиков воззвания о сборе средств на подарок К. Вейерштрассу при подготовке празднования его 70-летнего юбилея (31 октября 1885 года): *«Само собою разумеется, что Ваше лестное предложение принять участие в подписке на подарок Вейерштрассу мне как нельзя более было приятно. Подумавши, я решил поступить следующим образом:*

напечатал воззвание, один из экземпляров которого я Вам прилагаю, и разослал его по всем русским математикам, мне известным по имени. Затем в каждом из Университетских городов я просил кого-нибудь принять на себя более деятельное участие в подписке, в Петербурге – Сохоцкого, в Москве – Бугаева, в Киеве – Ермакова, в Одессе – Слешинского.

Деньги было бы неудобно присылать ко мне в Казань; поэтому я просил пересылать их в Берлин пр. Фуксу. Но я думал, что кроме того многим нашим соотечественникам будет всего приятнее послать деньги на подарок Вейерштрассу через его знаменитую русскую ученицу и потому я осмелился также выставить адрес С. В. Ковалевской. Надеюсь, что она мне извинит это» (полный текст см. в [101]).

Для организации празднования был создан Комитет, возглавляемый Л. Фуксом, в который входили Г. Миттаг-Леффлер (Стокгольм), Г. Брунс (Лейпциг), Г. Кантор (Галле), Г. Фробениус (Цюрих), Л. Киперт (Ганновер), Л. Кёнигсбергер (Гейдельберг), Г. Кортум (Бонн), С. В. Ковалевская (Стокгольм), Г. Шварц (Гёттинген), Л. Томе (Грайфсвальд), А. В. Васильев (Казань). В результате деятельности Комитета в подарок К. Вейерштрассу был подготовлен фотоальбом, содержащий снимки европейских математиков [115].

Из российских математиков, вошедших туда, отметим М. А. Тихомандрицкого, Д. К. Бобылева, А. А. Ключникова, Д. Ф. Селиванова, Н. Е. Жуковского, П. В. Преображенского, К. А. Поссе, А. Ю. Давидова, Ф. А. Слудского, Н. В. Бугаева, П. Л. Чебышева, Н. А. Умова, В. Я. Буняковского, А. В. Васильева.

Оказавшись в Казани, ставший уже петербуржцем, обремененным многочисленными связями на Западе, в 1893 году А. В. Васильев берет на себя невероятный труд по организации празднования столетия со дня рождения Н. И. Лобачевского, ставшего одним из важнейших событий международной математической жизни уходящего века. Поздравления с этим знаменательным событием были получены Казанским университетом из многих уголков России, а также из ведущих научных центров Европы. Знамениты слова из поздравления

Д. И. Менделеева: *«Геометрические знания составили основу всей точной науки, а самобытность геометрии Лобачевского – зарю самостоятельного развития наук в России»* [33, с. 168].

Особого внимания заслуживает также учрежденная в 1896 г. по предложению А. В. Васильева премия имени Н. И. Лобачевского, присуждаемая за исследования в области геометрии. В комитет по присуждению премии входили Дж. Сильвестр, Г. Гельмгольц, А. Кэли, А. Пуанкаре, Г. Дарбу, Г. Миттаг-Леффлер и др. Лауреатами премии были С. Ли, Б. Киллинг, Д. Гильберт, Ф. Шур, Г. Вейль, Э. Картан, а также советский геометр В. В. Вагнер.

Благодаря появлению этой премии в научном мире возрастает интерес к неевклидовой геометрии и личности великого русского геометра. Другим не менее важным результатом деятельности по учреждению премии стало приобретение Казанским университетом статуса математического центра международного уровня.

В ряду мероприятий, связанных с именем Н. И. Лобачевского, следует также отметить создание НИИ математики и механики при Московском Университете редакционной Комиссии по изданию трудов Н. И. Лобачевского, приуроченное к столетию с момента открытия неевклидовой геометрии в 1926 году. Председателем этой Комиссии был Д. Ф. Егоров, в нее входили А. В. Васильев, В. Ф. Каган, А. П. Котельников и Н. А. Глаголев.

Комиссия была международной, для участия в ней иностранным ученым было выслано более 40 приглашений (например, известно, что свое согласие на участие в деятельности Комиссии дали Ф. Клейн, Д. Гильберт, Ф. Энгель, М. Паш, Г. Вейль, Г. Миттаг-Леффлер) [165]. В письме к Г. Миттаг-Леффлеру от 22 февраля 1924 года А. В. Васильев пишет: *«Речь и на этот раз идет о международном мероприятии, и Вы, конечно, разделите бы со мной мои чувства, когда бы я прочитал Вам письма разъединенных мировой войной геометров из разных стран, которые захотели присоединиться к нашему мероприятию и войти в наш комитет»* [55, с. 56].

Осуществить это издание тогда не удалось – полное собрание сочинений Н. И. Лобачевского было издано под редакцией В. Ф. Кагана только в 1946-1951 гг.

Кроме того, в 1926 году А. В. Васильев принимал участие в организованном Казанским Университетом и Казанским физико-математическим обществом праздновании столетия открытия неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским: он выступил в Казани с торжественной речью «Идеи и заветы Лобачевского». В организации этого мероприятия приняла участие также Академия наук в лице ее вице-президента В. А. Стеклова (именно поездка в Казань в феврале 1926 года стала роковой для В. А. Стеклова и привела к осложнению перенесенной ранее простуды и смерти).

Другой международной инициативой, в которой А. В. Васильев принял активное участие, стала идея проведения международных математических конгрессов.

Проведению первого конгресса в 1897 году в Цюрихе предшествовали несколько лет организации и подготовки, инициированной Г. Кантором. Именно в переписке с А. В. Васильевым (письмо от 4 июля 1894 года) Г. Кантор впервые озвучил идею международного конгресса [120]. В активное обсуждение этого вопроса были также вовлечены А. Пуанкаре, Ш. Лезан, Э. Лемуан и др. [139]. В 1894 году Ш. А. Лезан и А. В. Васильев обращаются к Дж. Гальстеду с просьбой выступить популяризатором идеи международных математических конгрессов в США и Мексике. Кроме того, они просят Дж. Гальстеда как члена Американского математического общества представить на очередном съезде общества следующий проект организации конгрессов: подготовительный съезд – в Казани в 1896 году, организационный конгресс – в Брюсселе в 1897 году, и, наконец, Первый международный математический конгресс – в Париже в 1900 году [133]. Важность съезда в Казани, намеченного на 1896 год, отмечает Ш. А. Лезан в письме к Г. Кантору от 22 сентября 1895 года: *«в 1896 году в Казань собираются поехать лишь немногие немецкие математики; хотя, тем не менее, эта встреча,*

предложенная господином Васильевым, может быть полезна для подготовки к Конгрессу 1900 года» [121, с. 156].

В одном из отчетов Французского математического общества приводится содержание программы А. В. Васильева по вопросу о международных математических конгрессах: *«Занятия конгресса должны состоять не из сообщений, посвященных деталям науки, часто интересных только для самого докладчика, но из отчетов об успехах и состоянии отдельных частей науки за истекающее столетие»* (цит. по [77, с. 1372]), которая была поддержана на заседании общества 17 июля 1895 г.

В итоге первый конгресс, как отмечалось выше, прошел в 1897 году в Цюрихе, а конгресс в Париже стал вторым. Он состоялся в 1900 г. во время проходившей там Всемирной выставки.

В работе последующих международных конгрессов А. В. Васильев также принимал деятельное участие – в частности, он был избран одним из вице-президентов IV математического конгресса, собравшегося в Риме в 1906 году.

Также необходимо отметить деятельность А. В. Васильева по подготовке международных философских конгрессов, на которых в числе прочих рассматривались вопросы истории и философии науки, представляющие интерес для математиков. В частности, сохранились сведения о его участии в организации II международного философского конгресса, проходившего в Женеве в сентябре 1904 г. [79].

В 1914 году устоявшееся течение международной математической жизни было прервано Первой мировой войной. Обострившиеся националистические чувства стран-участниц войны привели к тому, что подготовка конгресса в Стокгольме, запланированного на 1916 год ⁷⁴, сорвалась. Из переписки А. В. Васильева с Г. Миттаг-Леффлером мы узнаем подробности обсуждения этих вопросов. Летом 1920 года А. В. Васильев предпринимает попытку поехать в

⁷⁴ На V Международном математическом конгрессе, собравшемся в 1912 году в Кембридже, было принято предложение Г. Миттаг-Леффлера провести VI Конгресс в Стокгольме. Однако из-за начавшейся вскоре войны проведение конгресса было отложено.

Стокгольм «для организации шестого международного математического конгресса и для возобновления сношений с лицами, стоящими во главе» [103, оп. 1, д. 2, л. 43]. О неуспехе этого мероприятия мы узнаем из письма А. В. Васильева к Г. Миттаг-Леффлеру от 15 июня 1920 года [55], в котором А. В. Васильев выражает глубокое сожаление по поводу сложившейся ситуации научной изоляции в России. В тот же период в переписке А. В. Васильева и Г. Миттаг-Леффлера обсуждаются идеи по проведению конгресса в Стокгольме в 1922 или 1923 году, а также по проведению конгресса в Нью-Йорке в 1924 году.

В итоге первый послевоенный конгресс был проведен в 1920 году в Страсбурге, однако, туда не были приглашены ученые из стран, побежденных в войне. Местом проведения следующего конгресса в 1924 году, по предложению Дж. Ч. Филдса, был выбран Торонто (Канада).

Активное участие в международной математической жизни приводит к тому, что А. В. Васильев становится одной из признанных международных фигур. Он является членом Французского математического общества (с 1898 г.), Немецкого математического общества (с 1897 г.), Математического кружка в Палермо (с 1899 г.), а также Берлинского общества испытателей природы и Общества физических и естественных наук в Бордо.

В числе его иностранных корреспондентов – французы Ш. Эрмит, А. Пуанкаре, Э. Лемуан, Ш. Лезан, немцы Ф. Клейн, Ф. Шур, Ф. Энгель, итальянцы Дж. Пеано, Дж. Веронезе, А. Маджи, Дж. Лориа, Ф. Энриквес, американцы Дж. Б. Гальстед, Ф. Кэджори, швед Г. Миттаг-Леффлер и др. Среди русских корреспондентов отметим А. А. Маркова, С. В. Ковалевскую, П. А. Некрасова, Б. К. Млодзеевского, Н. Е. Жуковского, Д. Ф. Егорова, В. И. Вернадского, Д. Д. Мордухай-Болтовского, Н. Н. Лузина, В. И. Шифф.

Проявляя интерес к актуальным в Европе вопросам высшего и среднего образования, с 1898 года Васильев являлся членом редакционного совета журнала «L'Enseignement mathématique». Кроме него, от России туда входил Н. В. Бугаев, а также такие видные математики Европы, как П. Аппель, М. Кантор, Г. Гальдеано, Ф. Клейн, Г. Миттаг-Леффлер, А. Пуанкаре, Ф. Г. Тейшейра. Этот

журнал являлся печатным органом Международной комиссии по преподаванию математики (решение о ее организации было принято в 1908 году на IV Международном математическом конгрессе в Риме).

Кроме того, А. В. Васильев был одним из организаторов проведения всероссийских съездов преподавателей математики. В процессе подготовки он предпринимал попытки пригласить для участия в I всероссийском съезде в 1911 г. Ш. Лезана (поручив Д. М. Синцову передать это приглашение во время одной из поездок в Европу) [82].

Подводя итоги, отметим, что А. В. Васильев – один из наиболее активных участников процесса формирования международного математического сообщества. Его организаторская деятельность имела несколько основных направлений.

В первую очередь, среди них можно выделить популяризацию результатов российских ученых за границей. Важнейшее место здесь занимает организация мероприятий, связанных с именем Н. И. Лобачевского, – юбилей Н. И. Лобачевского в 1893 году, учреждение премии имени Н. И. Лобачевского в 1896 году, содействие изданию и распространению трудов Н. И. Лобачевского в России и за границей, участие в редакционной комиссии для подготовки к изданию полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, приуроченному к столетию открытия неевклидовой геометрии в 1926 году, а также участие в праздновании этого события в Казани.

Кроме того, к популяризации результатов российских ученых за границей можно отнести выступление А. В. Васильева на I Международном математическом конгрессе с докладом о результатах И. М. Первушина из области теории чисел, работы, посвященные научному творчеству П. Л. Чебышева – «P. L. Tchebychef et son oeuvre scientifique» (1898), «P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen» (1900), а также реферирование научных работ русских ученых для «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik».

Также необходимо обратить внимание на деятельное участие А. В. Васильева в организации научных мероприятий международного уровня и в процессе

сплочения международного математического сообщества. Сюда относится упомянутая выше деятельность по подготовке и проведению математических и философских международных конгрессов, участие в организации юбилея К. Вейерштрасса, учреждение международной премии имени Н. И. Лобачевского за работы в области геометрии и подготовка празднований в честь его столетия.

В завершение приведем отрывок из письма А. В. Васильева Г. Миттаг-Леффлеру, написанного в 1924 году и характеризующего теплые отношения, связывающие А. В. Васильева с ведущими математиками Европы: *«Сколько прекрасных воспоминаний моей жизни связано с 1879–1884 годами. Я снова вспоминаю виденную мной в Париже у госпожи Ковалевской корректуру статьи Пуанкаре для первой тетради «Acta», принесенную им самим»* (цит. по [55, с. 57]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Объективный анализ деятельности А. В. Васильева позволяет более адекватно оценить его роль в развитии научного сообщества его времени и тем самым выработать более полное представление о развитии российского и международного математического сообщества того времени.

В рамках проведенного исследования были уточнены и дополнены биографические сведения об А. В. Васильеве, в частности, касающиеся последних лет жизни ученого; уточнена и дополнена библиография трудов ученого; в научный оборот введены новые архивные документы, имеющие отношение к различным вопросам истории математики.

Кроме того, проанализированы математические и историко-математические работы А. В. Васильева и его учебные курсы: выявлен весомый вклад А. В. Васильева в процесс проникновения новых концепций и понятий в русскую математическую литературу, рассмотрены его педагогические взгляды, а также охарактеризована его роль в становлении историко-математических исследований в России.

Проведенный историко-научный анализ организационно-научной деятельности А. В. Васильева в качестве председателя Казанского физико-математического общества, Петроградского физико-математического общества, Московского математического научно-педагогического кружка позволил оценить его роль в развитии российского математического сообщества и установлении связей с европейскими и американскими научными организациями.

Изучение деятельности А. В. Васильева позволило восстановить целостную картину ряда важных эпизодов из истории российского математического сообщества (организация преподавания математики в Казанском и Санкт-Петербургском университетах, деятельность российских математических обществ, празднование столетия со дня рождения Н. И. Лобачевского и др.), а также формирования институтов международного математического сообщества конца XIX – начала XX столетий.

Исследование научной, педагогической и организаторской деятельности А. В. Васильева является частью более широкой историко-научной задачи по изучению истории формирования мирового математического сообщества.

В заключение приведем слова из поздравления, адресованного А. В. Васильеву российским математиком и педагогом С. И. Шохор-Троцким в 1899 г. по случаю двадцатипятилетия педагогической деятельности А. В. Васильева: *«Мы чествуем не только математика, философски и исторически мыслящего, но и благородного человека с сильной инициативой, которого никогда не забудет история русской науки»* (цит. по [110, с. 420]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов В. А. Основания теории линейных дифференциальных уравнений [Текст] / В. А. Анисимов. – М.: Унив. тип., 1889. – XIV, 200, [1] с.
2. Аристов И. И. Об итерации функций [Текст] / И. И. Аристов. – Казань: Типо-литография Императорского Университета, 1900. – 76 с.
3. Арсланов М. М. Математика в Казанском университете за первые полтора столетия его существования [Текст] / М. М. Арсланов // Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета: к 75-летию. – Казань: Казанский государственный университет, 2009. – 132 с.
4. Архив МГУ. Ф 1.
5. Архив Российской академии наук. Ф. 603.
6. Архив Российской академии наук. Ф. 518.
7. Бабков В. В. Между наукой и поэзией: «Метабиоз» Велимира Хлебникова [Текст] / В. В. Бабков // Вопросы истории, естествознания и техники. – 1987. — № 2. — С. 136—147.
8. Бажанов В. А. Александр Васильевич Васильев [Текст] / В. А. Бажанов. – Казань: изд-во Казанского университета, 2002. – 30 с.
9. Бажанов В. А. Николай Александрович Васильев (1880—1940) [Текст] / В. А. Бажанов, отв. ред. Б. Л. Лаптев, И. И. Мочалов. – М.: Наука, 1988. – 144 с.
10. Бажанов В. А. Профессор А. В. Васильев как ученый, организатор и общественный деятель [Текст] / В. А. Бажанов // История логики в России и СССР. – М.: Канон+, 2007. – С. 164-212.
11. Бажанов В. А. Профессор А. В. Васильев. Ученый, организатор науки, общественный деятель [Текст] / В. А. Бажанов // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 2002. – Вып. 7(42). – С. 120-149.
12. Бажанов В. А., Юшкевич А. П. А. В. Васильев как ученый и общественный деятель [Текст] / В. А. Бажанов, А. П. Юшкевич // Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский (1792 - 1856) . – М.: Наука, 1992. – С. 221-228.

13. Баранец Н. Г., Веревкин А. Б. А. В. Васильев об экономии в математике и ее истории [Текст] / Н. Г. Баранец, А. Б. Веревкин // Российские математики о науке и философии. – Ульяновск: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2012. – 160 с.
14. Бернштейн С. Н., Гиршвальд Л. Я. Д. М. Синцов (некролог) [Текст] / С. Н. Бернштейн, Л. Я. Гиршвальд // УМН, 1947. – т. 2. – Вып. 4(20). – С. 191–206.
15. Бетхер Л. Э. Главнейшие законы сходимости итераций и их приложения к анализу [Текст] / Л. Э. Бетхер // Известия казанского физико-математического общества, 1903. – т. 13. – №1. – С. 137-183; 1904. – т. 14. – №2. – С. 155-200; 1904. – т. 14. – №3. – С. 201-234.
16. Библиотека В. И. Ленина в Кремле [Текст] / сост.: А. Бессонова, Л. Виноградов, Е. Голоухова. – М.: Издательство Всесоюзной книжной палаты, 1961. – 764 с.
17. Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Казанского университета (1804 - 1904): Кафедра православного богословия, факультеты историко-филологический (с разрядом восточной словесности и лектурами) и физико-математический. В 2-х частях. Ч. 1 / Под ред.: Н. П. Загоскина – Казань: Типо-лит. Имп. ун-та, 1904. – 552 с.
18. Бирюков Б. В., Кузичева З. А. Зарубежные направления в философии математики и их преломление в философско-логической и историко-математической мысли России XVIII – начала XX веков [Текст] / Б. В. Бирюков, З. А. Кузичева // Логические исследования. – 2005. – Вып. 12. – С. 67-108.
19. Валеев Р. М. Василий Павлович Васильев, 1818 – 1900 [Текст] / Р. М. Валеев. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2002. – 20 с.
20. Васильев А. В. Алгебраический анализ. Теория буквенных уравнений в связи с теорией субституций [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Типография Казанского университета, 1886. – 191 с.
21. Васильев А. В. Введение в анализ. Императорский Казанский университет. 1883/84 гг. [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Издание литогр., 1884. – 56 с.

22. Васильев А. В. Введение в анализ. Практические упражнения. Лекции экстраординарного профессора А. В. Васильева [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Литографированное издание, 1885. – 261 с.
23. Васильев А. В. Дифференциальная геометрия. Курс лекций по приложениям дифференциального исчисления к геометрии, читанный в императорском Казанском университете в 1904 г. [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Изд-е студентов, 1905. – 168 с.
24. Васильев А. В. Дифференциальное исчисление. Лекции [Текст] / А. В. Васильев. Казань: Типография Казанского университета, 1884. – 306 с.
25. Васильев А. В. Из истории и философии понятия о целом положительном числе [Текст] / А. В. Васильев // Известия физико-математического общества при Казанском ун-те. – 1891. – Т. 1. – № 1. – С. 1 – 21. (Речь, произнесенная 28 окт. 1890 г. при открытии Физико-математического общества при Казанском ун-те).
26. Васильев А. В. Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых [Текст] / А. В. Васильев // Папелье Ж. Начала анализа бесконечно-малых в элементарном изложении. Вып. 1. Пер. с фр. под ред. проф. А.П. Котельникова. - Казань: Изд. студентов Н. Иовлева и А. Коротнева, 1906 – С. 1-70.
27. Васильев А. В. Значение Н. И. Лобачевского для императорского Казанского университета [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Типография императорского университета, 1896. – С. 3 – 20. (Речь, произнесенная в день открытия памятника Н. И. Лобачевскому 1 сентября 1896 г.).
28. Васильев А. В. Лобачевский Николай Иванович (1793 – 1856) [Текст] / А. В. Васильев // Русский биографический словарь. – СПб., 1914. – Т. 10. – С. 528 – 565.
29. Васильев А. В. Математика. Вып. 1 (1725 – 1826 – 1863) [Текст] / А. В. Васильев. – Пг.: Изд-во Российской Академии наук, 1921. – 72 с.
30. Васильев А. В. Математика за последние пятьдесят лет [Текст] / А. В. Васильев // Математическое образование. – 1928. – № 1. – С. 1 – 9; № 2. – С. 49 – 58. (Речь в день празднования Московским математическим кружком 50-летнего юбилея академической деятельности проф. А. Васильева 1 февраля 1925 г.).

31. Васильев А. В. Математическое и философское преподавание в средней школе [Текст] / А. В. Васильев // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1912. – № 554. – С. 3 – 15. (Речь на открытии первого российского съезда преподавателей математики 27 декабря 1911 г.).
32. Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Тип. имп. ун-та, 1894. – 40 с. (Речь, произнесенная в торжественном собрании Казан. ун-та 22 окт. 1893 г.).
33. Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский (1792 – 1856) [Текст] / А. В. Васильев. – М.: Наука, 1992. – 230 с.
34. Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский и его заветы [Текст] / А. В. Васильев // Столетие неевклидовой геометрии Лобачевского. – Казань, 1927. – С. 21 – 33. (Речь на праздновании столетия открытия неевклидовой геометрии).
35. Васильев А. В. Нужно ли писать и изучать историю математики в России? [Текст] / А. В. Васильев // Математическое образование. – 1930. – № 2. – С. 60 – 64. (Доклад на пленарном заседании съезда математиков 4 мая 1927 г.).
36. Васильев А. В. О возможном влиянии Гаусса на геометрические идеи Лобачевского [Текст] / А. В. Васильев // Собрание протоколов заседаний Секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете. – 1884. – Т. 2. – С. 9 – 11.
37. Васильев А. В. О формулах, данных Якоби для выражения решений линейной системы посредством кратных интегралов [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Типография университета, 1886. – 9 с.
38. Васильев А. В. О функциях рациональных, аналогичных с функциями двоякопериодическими [Текст] / А. В. Васильев // Известия и ученые записки императорского Казанского университета. – 1880. – 16 (Март). – С. IV. – С. 121 – 177.
39. Васильев А. В. Об особенных решениях в связи с новыми взглядами на задачу интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Тип. ун-та, 1878. – 60 с.

40. Васильев А. В. От Евклида до Гильберта [Текст] / А. В. Васильев // Гильберт Д. Основания геометрии. – Пг.: Сеятель, 1923. – С. IX – XXXII.
41. Васильев А. В. Отзыв о кн.: Аристов И. И. Об итерации функций [Текст] / А. В. Васильев // Ученые записки императорского Казанского университета. – 1900. – Кн. 2. – С. 196 – 199.
42. Васильев А. В. Преподавание чистой математики в Берлинском и Лейпцигском университетах (из отчета о путешествии за границу летом 1882 г.) [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Типография ун-та, 1882. – 25 с.
43. Васильев А. В. Пространство, время, движение. Исторические основы теории относительности [Текст] / А. В. Васильев. – Пг.: Образование, 1923. – I, 134 с.
44. Васильев А. В. Сборник упражнений по геометрическим приложениям дифференциального исчисления проф. Васильева. Вып. 1 [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Литография В. И. Ключникова, 1891. – 37 с.
45. Васильев А. В. Теория вероятностей [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Литографированное издание, 1885. – 144 с.
46. Васильев А. Теория отделения корней систем алгебраических уравнений [Текст] / А. В. Васильев. – Казань: Типография университета, 1884. – 114 с.
47. Васильев А. В. Университет и национальное воспитание (речь, произнесенная при открытии Педагогического общества при Казанском университете 8 дек. 1900 г.) [Текст] / А. В. Васильев // Вестник воспитания. – 1900. – С. 68 – 80.
48. Васильев А. В. Целое число. Исторический очерк [Текст] / А. В. Васильев. – Пг.: Научное изд-во, 1919. – 268 с.
49. Васильев Н. А. О частных суждениях, о треугольнике противоположностей, о законе исключенного четвертого [Текст] / Н. А. Васильев. – Казань : типо-лит. Ун-та, 1910. – 47 с.
50. Венгеров С. А. Критико-биографический словарь русских писателей и ученых. Томъ IV [Текст] / С. А. Венгеров. – СПб: Семен. типо-лит. (И. Ефрона), 1895. – 484 с.

51. Вершик А. М. О Ленинградском математическом обществе [Текст] / А. М. Вершик // Труды Ленинградского математического общества. – 1993. – т. 1. – С. 4-8.
52. Визгин В. П. Роль математики в восприятии фундаментальных физических теорий (на материале теории относительности и квантовой механики в России и СССР [Текст] / В. П. Визгин // Историко-математические исследования. – 1989. – Вып. 31. – С. 75-88.
53. Воронцов Н. Н. Алексей Андреевич Ляпунов. Очерк жизни и творчества. Окружение и личность. [Текст] / Н. Н. Воронцов, отв. ред. и сост. Е. А. Ляпунова. – М.: «Новый хронограф», 2011. – 240 с.
54. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России [Текст] / Б. В. Гнеденко. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1946. – 246 с.
55. Демидов С. С. Токарева Т. А. Письма А. В. Васильева к Г. Миттаг-Леффлеру [Текст] / С. С. Демидов, Т. А. Токарева // Вопросы истории естествознания и техники. – 1992. – №4. – С. 48-60.
56. Демидов С. С. Русские математики в Берлине во второй половине XIX – начале XX века [Текст] / С. С. Демидов // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 2000. – Выпуск 5(40). – С. 71-83.
57. Егоров Д. Ф. Дифференциальная геометрия. Лекции, читанные в Московском университете проф. Д. Ф. Егоровым [Текст] / Д. Ф. Егоров. – М.: Типография А. И. Мамонтова, 1907. – 329 с.
58. Есаков В. Д. Неосуществленный проект Академии наук [Текст] / В. Д. Есаков // Вестник РАН. – 1997. – №12. – С. 1129-1139.
59. Ермолаева Н. С. Из истории Санкт-Петербургского и Петроградского математических обществ [Текст] / Н. С. Ермолаева // Труды Ленинградского математического общества. – 1993. – т. 2. – С. 309-322.
60. Зинин Н. Н. Различные приемы приведения кратных интегралов и главнейшие приложения этих приемов [Текст] / Н. Н. Зинин. – Варшава: тип. Варш. учеб. окр., 1892. - [3], III, [2], 222 с.

61. Извлечения из протоколов заседаний Математического Общества // Математический сборник. – 1887. – т. 13. – №3. – С. 1-31.
62. Известия Казанского физико-математического общества при Императорском Казанском университете. Вторая серия. – 1890—1906. – тт. 1-15.
63. Изотов Г. Е. К истории опубликований Н. И. Лобачевским сочинений по «воображаемой» геометрии» [Текст] / Г. Е. Изотов // Вопросы истории естествознания и техники. – 1992. – №4. – С. 36–43.
64. Изотов Г. Е. Казанское физико-математическое общество [Текст] / Г. Е. Изотов. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2003. – 32 с.
65. История отечественной математики. Том 2 [Текст] / Отв. ред. И. З. Штокало. – Киев: Наукова думка, 1967. – 616 с.
66. История отечественной математики. Том 3 [Текст] / Отв. ред. И. З. Штокало. – Киев: Наукова думка, 1968. – 726 с.
67. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. Пер с нем. [Текст] / Под ред. А. Н. Тюрин. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 336 с.
68. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть 1 [Текст] / Ф. Клейн. - М.-Л.: ОНТИ, 1937. - 432 с.
69. Комиссия по истории знаний. 1921-1932. Из истории организации историко-научных исследований в Академии наук. Сб. документов [Текст] / сост.: В. М. Орел, Г. И. Смагина. – СПб: Наука, 2003. – 772 с.
70. Крушинская А. А. (урожд. Васильева). Очерк жизни заслуженного профессора Казанского университета Александра Васильевича Васильева [Рукопись] // Архив Н. Л. Крушинской
71. Крушинская Н. Л. Биография моего отца [Текст] / Н. Л. Крушинская, сост.: З. А. Зорина, И. И. Полетаева // Крушинский Л. В. Записки московского биолога: Загадки поведения животных. – М.: Языки славянской культуры, 2006. – С. 277-347.
72. Лахтин Л. К. Алгебраические уравнения, разрешимые в гипергеометрических функциях [Текст] / Л. К. Лахтин. – М., 1893. – 420 с.

73. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений по геометрии. Т. 1, 2 [Текст] / Н. И. Лобачевский. – Казань: Типография Императорского университета, 1883-1886.
74. Марков А. А. Избранные труды: Т. 1. Математика. Механика. Физика [Текст] / А. А. Марков, сост. и общ. ред. Н. М. Нагорного. – М. : Изд-во МЦНМО., 2002. – LVI, 477с.
75. Марчевский М. Н. Харьковское математическое общество за первые 75 лет его существования (1879 - 1954) [Текст] / М. Н. Марчевский // Историко-математические исследования. – 1956. – вып. 9. – С. 613-666.
76. Математика. Метод, проблемы и значения ея [Текст] Сборник №1. Серия: Новые идеи в математике. Изд. 2 / Под ред. А. В. Васильева. – Петроград: книгоиздательство «Образование», 1917. – 144 с.
77. Международные математические конгрессы [Текст] // Научное обозрение. – 1895. – №43. – С. 1372.
78. Нагибин Ю. М. Время жить [Текст] / Ю. М. Нагибин. – М.: Современник, 1987. – 510 с.
79. Национальный архив Республики Татарстан. Ф. 977.
80. Новые идеи в математике. Вып. 1-10 [Текст] / Под ред. А. В. Васильева. – СПб: книгоиздательство «Образование», 1913-1915.
81. Ожигова Е. П. Развитие теории чисел в России [Текст] / Е. П. Ожигова. – М.: Наука, 1972. – 359 с.
82. Отдел редких книг и рукописей Научной библиотеки МГУ им. М. В. Ломоносова. Ф. 25.
83. Парфентьев Н. Н. А. В. Васильев как математик и философ [Текст] / Н. Н. Парфентьев // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1930. – Сер. 3. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 92-104.
84. Парфентьев Н. Н. Заслуженный профессор математики Александр Васильевич Васильев [Текст] / Н. Н. Парфентьев // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1924. – Сер. 2. – Т. 24. – Стр. 1-7.

85. Подколзина М. А. Логические равенства П. С. Порецкого [Текст] / М. А. Подколзина // Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова. Годичная научная конференция – 2013: Общие проблемы развития науки и техники. История физико-математических наук. Т. 1. – М.: URSS, 2013. – С. 397-399.
86. Половинкин С. М. О студенческом математическом кружке при Московском математическом обществе в 1902-1903 гг. [Текст] / С. М. Половинкин // Историко-математические исследования. – 1986. – Вып. 30. – С. 148-158.
87. Полотовский Г. М. Как изучалась биография Н. И. Лобачевского [Текст] / Г. М. Полотовский // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 2007. – Вып. 12 (47). – С. 32-50.
88. Попов А. Ф. Воспоминание о службе и трудах профессора Казанского университета Лобачевского [Текст] / А. Ф. Попов // Ученые записки Казанского университета. – 1857. – Т. IV. – С. 153–159.
89. Порецкий П. С. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики [Текст] / П. С. Порецкий. – М.: Русская правда, 2011. – 165 с.
90. Протоколы С.-Петербургского математического общества. [Текст]. – СПб.: Типография В. Киршбаума, 1899. – 132 с.
91. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями [Текст] / А. Пуанкаре, пер. с франц. Е. Леонтович и А. Майер, под ред. А. А. Андропова. М.-Л. – 1947. – 392 с.
92. Рожанская Ю. А. Особые точки векторных полей [Текст] / Ю. А. Рожанская // Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / Пер. с франц. Е. Леонтович и А. Майер, под ред. А. А. Андропова. М.-Л. – 1947. С. 348-367.
93. Рыбников К. А. История математики. Т. 2 [Текст] / К. А. Рыбников. – Москва: Изд-во Московского университета, 1963. – 336 с.

94. Савич С. Е. О линейных обыкновенных дифференциальных уравнениях с правильными интегралами [Текст] / С. Е. Савич. – СПб.: Тип. Имп. Акад. наук, 1892. – 182 с.
95. Синцов Д. М. Васильев А. В. как педагог и популяризатор [Текст] / Д. М. Синцов // Математическое образование. – 1930. – № 6. – С. 177-185.
96. Сушкевич А. К. Материалы к истории алгебры в России в XIX в. и в начале XX в. [Текст] / А. К. Сушкевич // Историко-математические исследования. Под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича. – 1951. – Выпуск IV. – С. 237-455.
97. Тихомандрицкий М. А. О гипергеометрических рядах. [Текст] / М. А. Тихомандрицкий – СПб: Типография Императорской Академии наук, 1876. – 218 с.
98. Фили К. «Воображаемая» геометрия Лобачевского и русский авангард [Текст] / К. Фили // Вопросы истории естествознания и техники. – 1992. – №4. – С. 43–48.
99. Флоренский П. А. Черновик выступления на открытии студенческого математического кружка при Московском математическом обществе. Публикация и примечания С. С. Демидова, С. М. Половинкина, П. В. Флоренского [Текст] / П. А. Флоренский // Историко-математические исследования. – 1990. – Выпуск 32-33. – С. 467-473.
100. Хабриева О. А. Развитие педагогической мысли в Казанском университете в первой четверти XX столетия [Текст] / О. А. Хабриева // Мир образования – образование в мире. – 2008. – №3. – С. 5-20.
101. Царицанская Ю. Ю. А. В. Васильев и его роль в развитии международных научных отношений в конце XIX – первой четверти XX в. [Текст] / Ю. Ю. Царицанская // Вопросы истории естествознания и техники. – 2014. – №3. – С. 92-101.
102. Центральный государственный архив Санкт-Петербурга. Ф. Р-2856.
103. Центральный государственный архив Санкт-Петербурга. Ф. Р-2990.
104. Центральный государственный архив города Москвы. Ф. 1609.
105. Центральный государственный исторический архив Санкт-Петербурга. Ф. 113.

106. Чебышев П. Л. О средних величинах [Текст] / П. Л. Чебышев // Математический сборник. – 1867. – Т. 2. – С. 1–9.
107. Четаев Н. Г. О вычислении характеристик Кронекера [Текст] / Н. Г. Четаев // Известия физико-математического общества. – 1934. – Т. 3. – Вып. 7. – С. 29-30.
108. Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функции не есть максимум [Текст] / Н. Г. Четаев // Ученые записки Казанского государственного университета. – 1938. – Т. 98. – Кн. 9. Математика. – Вып. 3. – С. 43-58.
109. Щетников А. И. К вопросу о датировке некоторых ранних прозаических произведений Велимира Хлебникова [Текст] / А. И. Щетников // Новое литературное обозрение. – 2003. – № 64. – С. 284–299.
110. Юбилей проф. А. В. Васильева [Текст] // Научное обозрение. – 1900. – №2. – С. 420-423.
111. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года [Текст] / А. П. Юшкевич. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
112. Янишевский Э. П. Историческая записка о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского [Текст] / Э. П. Янишевский. – Казань.: В университетской типографии, 1868. – 59 с.
113. Abel N. H. Ueber einige bestimmte Integrale [Текст] / N. H. Abel // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1827. – Bd. 2. – S. 22-31.
114. Auvinet J. Charles-Ange Laisant. Itinéraires et engagements d'un mathematician de la troisième république [Текст] / J. Auvinet. – Paris: Hermann, 2013. – 243 pp.
115. Bölling R. Das Fotoalbum für Weierstraß [Текст] / R. Bölling. – Potsdam: Vieweg, 1994. – 60 s.
116. Brouwer L. E. J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten [Текст] / L. E. J. Brouwer // Mathematische Annalen. – 1912. – 71. – S. 97-115.
117. Cauchy A.-L. Mémoire sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques [Текст] / A.-L. Cauchy // Journal de l'École polytechnique. – 1815. – XVIIe cahier. – Т. X. – P. 457.
118. Cauchy A.-L. Calcul des indices des fonctions [Текст] / A.-L. Cauchy // Journal de l'École polytechnique. – 1837. – Т. XV. – P. 176-229.

119. Četjev N. Sur reciproque du theoreme de Lagrange [Текст] / N. Četjev // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. – 1930. – V. 190. – P. 360-362.
120. Dauben J. W. Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite [Текст] / J. W. Dauben. – Cambr. (Mass.): Harvard University press, 1979. – 424 p.
121. Décaillot A.-M. Cantor und die Franzosen: Mathematik, Philosophie und das Unendliche [Текст] / A.-M. Décaillot, übersetzt von Volkert K. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – 250 s.
122. Dedekind R. Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-functionen [Текст] / R. Dedekind // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1877. – Bd. 83. – S. 265-292.
123. Descartes R. Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences [Текст] / R. Descartes. – Leyde: Jan Maire, 1637. – 413 p.
124. Engel F. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Rede, gehalten bei der feierlichen Versammlung der kaisertichen Universität Kasan am 22 Oktober 1893 von Prof. A Wassiljef [Текст] / F. Engel // Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. – 1894. – H. 7. – N. 6. – S. 205–244.
125. Alexander Vassilief [Текст] / H. F. Fehr // L'Enseignement Mathematique. – 1929. – T. 29. – P. 317 – 318.
126. Fichtenholtz A. Éloge historique de Nicolas-J. Lobatchevsky: Prononcé dans la séance solennelle de l'université impériale de Kazan le 22 octobre 1893 [Текст] / A. Vassilief, A. Fichtenholtz. – Paris: A. Hermann, 1896. – 40 p.
127. Fuchs L. Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie [Текст] / L. Fuchs // Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. – 1875. – S. 568-581.
128. Fourier J. B. Analyse des équations déterminées [Текст] / J. B. Fourier. – Paris: Firmin Didot frères, 1831. – 258 p.
129. Galdeano G. Extracto del discurso del Sr. Vassilief con motivo de celebrarse el centenario de Lobachewski [Текст] / G. Galdeano // El Progreso matemático. – 1895. – T. 2. – P. 33–34.

130. Gauss C. F. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte [Текст] / C. F. Gauss. – Leipzig: in der Weidmannschen Buchhandlung, 1840. – 51 s.
131. Gua de Malves J.-P. Recherches du nombre des racines réelles ou imaginaires, réelles positives ou réelles négatives qui peuvent se trouver dans les équations de tous les degrés [Текст] / J.-P. Gua de Malves // Mém. Acad. r. sci. 1741. – 1744. – P. 435–494.
132. Halsted G. Nicolai Ivanovich Lobachevsky; address pronounced at the commemorative meeting of the Imperial University of Kasan, October 22, 1893 [Текст] / G. Halsted // The Neomonic Series (Austin, Texas). – Vol. 1. – P. 1–57.
133. Halsted G. The International Mathematical Congress [Текст] / G. Halsted // The American Mathematical Monthly. – May 1895. – Vol. 2. – No. 5. – P. 169–170.
134. Hopf H. Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten [Текст] / H. Hopf // Mathematische Annalen. – 1926. – 95. – S. 225-250.
135. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. – 1897. – B. 5. – 275 s.
136. Jordan C. Sur les groupes de mouvements [Текст] / C. Jordan // Comptes rendus. – 1867. – Vol. 65. – P. 229-232.
137. Korzybski A. Alexander Vasilievitch Vasiliev (1853 – 1929) [Текст] / A. Korzybski // Science. – 1929. – Vol. LXX. – N 1825. – P. 598 – 600.
138. Kronecker L. Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln [Текст] / L. Kronecker // Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. – 1870. – S. 159-193.
139. Laisant C.-A. Le mathématiques au Congrès de l'Association Française pour l'avancement des sciences a Bordeaux [Текст] / C.-A. Laisant // Revue générale des sciences pures et appliquées. – 1896. – №1. – P. 31-34.
140. Loria G. Alexandre Vasilievic Vasilieff [Текст] / G. Loria // Archeion. – 1930. – Vol. XII. – P. 46– 47.

141. Markov A. A. Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique [Текст] / A. A. Markov // Mathematische Annalen. – 1887. – T. 28. – S. 586-593; Mathematische Annalen. – 1888. – 29. – S. 247-258.
142. Neumann C. Ueber correspondirende Flächenelemente (Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Februar 1876) [Текст] / C. Neumann // Mathematische Annale. – 1877. – Bd. XI. – S. 306-308.
143. Rainoff T. Alexander Vassilievic Vasiliev [Текст] / T. Rainoff // Isis. – 1930. – Vol. XIV (2). – N 44. – P. 342 – 348.
144. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. – 1899. – T. 13. – 378 p.
145. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. – 1900. – T. 14. – 308 p.
146. Schwarz H. A. Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt [Текст] / H. A. Schwarz // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1873. – Bd. 75. – S. 292-335.
147. Séance du 2 Mars 1898 [Текст] // Bulletin de la Société Mathématique de France. – 1898. – T. 26. – P. 52-56.
148. Sturm C.-F. Mémoire sur la résolution des équations numériques. Extrait d'un mémoire de M. Sturm, présenté à l'Académie des sciences [Текст] / C.-F. Sturm // Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques. – 1829. – T. XI. – P. 419-422.
149. Sturm C.-F., Liouville J. Note sur un théorème de M. Cauchy relatif aux racines des équations simultanées [Текст] / C.-F. Sturm, J. Liouville // Comptes rendus des séances de l'Acad. des se. de Paris. – T. 4. – P. 720-724.
150. Sylvester J. J. On a Theory of the Syzygetic relations of two rational integral functions. Art. 48 [Текст] / J. J. Sylvester // The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester (v. 1). – New York: Chelsea Publishing Company, 1904. – P. 429-586.
151. Vassilief A. Development du concept scientifique de l'espace [Текст] / A. Vassillief // Scientia (Bologna). – 1929. – Vol. XLVI, № 10. – P. 221 – 230; N 11. – P. 289 – 300.

152. Vassilief A. Le bicentenaire de la loi des grande nombres [Текст] / A. Vassillief // L'Enseignement Mathematique (Paris – Geneve). – 1914. – T. 16. – N 2. – P. 92 – 97.
153. Vassilief A. P. L. Tchebychef et son oeuvre scientifique [Текст] / A. Vassillief // Bulletino di bibliogafia et storia scienze. – 1898. – № 1, 2. – 56 p.
154. Vassilief A. Une nouvelle edition des Ouevres de N. J. Lobatchefsky [Текст] / A. Vassillief // L'Enseignement mathematique (Paris). – 1923. – T. 23. – P. 218 – 220.
155. Vassilieff A. Henry More, Newton et Berkeley [Текст] / A. Vassillieff // Estratto dagli dei V Congresso internazionale di Filosofia, 5-9 magio – 1924. – Napoli. – P. 1045-1049.
156. Wassilief A. Algebra di Lobachevsky [Текст] / A. Wassillief // Periodico di matematico. – 1923. – Vol. 5. – P. 121 – 127.
157. Wassiljef A. Lobatschefskij's Ansichten über die Theorie der Parallellinien vor dem Jahre 1826 [Текст] / A. Wassilljef // Jahresbericht der Deutschen Mathematiger Vereinigung (Berlin), 1894/95. – H. 4. – № 3. – S. 87 – 90.
158. Wassilief A. P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen [Текст] / A. Wassillief // Tschebyschef. – Leipzig: Teubner, 1900. – 53 s.
159. Wassilief A. Space, time, motion [Текст] / A. Wassillief. – London: Knopf, 1923. – 232 p.
160. Wassilief A. V. The Acquisitions and Enigmas of the Philosophy of Nature [Текст] / A. V. Wassillief // Proceedings of the Sixth International Congress of Philosophy. Boston – Cambridge, 1926. – Vol. XXIII, № 23. – P. 65 – 74.
161. Wassilief A. V. Lobacevsky as algebraist and analyst [Текст] / A. V. Wassillief // Bulletin of the New York Mathematical Society. – 1894. - Vol. 3. – P. 231 – 236.
162. Wassilief A. Les idees d'Auguste Comte sur la philosophie des mathematique [Текст] / A. Wassillief // L'Enseignement mathematique (Paris). – 1900. – T. II. – P. 157 – 172.
163. Wassiliew A. Die Tätigkeit der Petrograder Physico-Mathematischen Gesellschaft während des ersten Halbjahres 1921 [Текст] / A. Wassilliew // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. – Bd. 31. – S. 53-55.

164. Wassiliew A. Die Tätigkeit der Petrograder Physico-Mathematischen Gesellschaft in den Jahren 1921-1923 [Текст] / A. Wassiliew // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. – Bd. 33. – S. 35-36.
165. Wassiliew A. Herausgabe der Werke Lobatschewskijs [Текст] / A. Wassiliew // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. – Bd 33. – S. 37.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

1. Васильев А. Об отделении корней совокупных уравнений. – Казань: Тип. ун-та, 1874а. – 28 с.
2. Васильев А. О комплексных величинах вообще. – Казань: Литогр. Перова, 1874 – 1875.– 76 с.
3. Васильев А. В. Об особенных решениях в связи с новыми взглядами на задачу интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. – Казань: Тип. ун-та, 1878. – 60 с.
4. Васильев А. В. Об алгебраических интегралах дифференциальных линейных уравнений // VI Съезд русских естествоиспытателей и врачей. Речи и протоколы. – СПб., 1880. – С. 196-200.
5. Васильев А. В. О функциях рациональных, аналогичных с функциями двоякопериодическими // Известия и ученые записки императорского Казанского университета. – 1880. – 16 (Март). – С. IV. – С. 121 – 177.
6. Wassilieff. Esquisse biographique. Alexandre Popoff // Nouvelle correspondance mathématique, t. 6, 1880, p. 169
7. Васильев А. В. Систематический каталог книг по чистой математике фундаментальной библиотеки императорского Казанского университета // Известия и ученые записки императорского Казанского университета. – 1881. – 17. Март – апрель. – С. 1 – 55.
8. Васильев А. В. Конспект лекций, прочитанных I-му курсу в 1881/82 гг. по дифференциальному исчислению. – Казань: Типография Нагаткиной, 1882. – 24 с.
9. Васильев А. В. Преподавание чистой математики в Берлинском и Лейпцигском университетах (из отчета о путешествии за границу летом 1882 г.). – Казань: Типография ун-та, 1882. – 25 с.
10. Васильев А. В. Предисловие к кн.: Полное собрание сочинений по геометрии Н. И. Лобачевского. Т. 1. – Казань: Типография ун-та, 1883. – С. I – VII.

11. Васильев А. В. Краткое изложение теории кватернионов // Собр. Протоколов заседаний Секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете. – 1883. – Т. 1. – С. 24 – 28.
12. Васильев А. В. Некролог профессора И. М. Мельникова // Собрание протоколов заседаний Секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете. – 1883. – Т.4. – С. 49 – 51.
13. Васильев А. В. Библиографический листок книг, появляющихся в России по физико-математическим наукам // Собрание протоколов заседаний Секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете. – 1883. –Т.1, № 1. –С. 33 – 35; № 2. –С. 16 – 28; № 3. –С. 30 – 48; Т. 2, № 4. –С. 21 – 35; № 5. –С. 69 – 83; № 6. –С. 331 – 338.
14. Васильев А. В. Введение в анализ. Императорский Казанский университет. 1883/84 гг. – Казань: Издание литогр., 1884. – 56 с.
15. Васильев А. В. Дифференциальное исчисление. Теория строк. Теория Maximum и Minimum. – Казань: Литография Чиркова, 1884. – 179 с.
16. Васильев А. В. Алгебраический анализ. – Казань: Литография Ключникова, 1884. – 75 с.
17. Васильев А. В. Теория деления круга. – Казань: Литография Ключникова, 1884. – 37 с.
18. Васильев А. В. Приложения к Алгебраическому анализу. – Казань: Литография Ключникова, 1884. – 31 с.
19. Васильев А. Теория отделения корней систем алгебраических уравнений. – Казань: Типография университета, 1884, IV. – 114 с., Прилож. С. I – III.
20. Васильев А. В. О возможном влиянии Гаусса на геометрические идеи Лобачевского // Собрание протоколов заседаний Секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете. – 1884. – Т. 2. – С. 9 – 11.
21. Васильев А. В. Дифференциальное исчисление. Лекции. Казань: Типография Казанского университета, 1884. – 306 с.

22. Васильев А. В. Введение в анализ. Практические упражнения. Лекции экстраординарного профессора А. В. Васильева. Казань: Литографированное издание, 1885. – 261 с.
23. Васильев А. В. Теория вероятностей. – Казань: Литографированное издание, 1885. – 144 с.
24. Васильев А. В. Роль профессора Вейерштрасса в современном развитии математики. – Казань: Типография университета, 1885. – 18 с. (перепечатка в кн.: Физико-математические науки в их настоящем и прошлом / Изд. В. В. Бобынин. – М: 1885. – Т. 1, № 10. – С. 225 – 231).
25. Васильев А. В. Сообщение 13 апр. 1885 г. о предстоящем праздновании юбилея В. Я. Буняковского // Собрание протоколов заседаний Секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете. – 1884. – Т. 8. – С. 183 – 186.
26. Васильев А. В. Памяти профессора астрономии Мариана Альбертовича Ковальского // Собрание протоколов заседаний Секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете. – 1885. – Т. 3. – С. 45 – 48.
27. Васильев А. В. О формулах, данных Якоби для выражения решений линейной системы посредством кратных интегралов. – Казань: Типография университета, 1886. – 9 с.
28. Васильев А. В. Числовые суеверия (из публичной лекции «О древнейших письменных математических памятниках», прочитанной 26 марта 1886 г. в пользу Высших Женских курсов в Казани). – Казань: Тип. Губ. Правл., 1886. – 24 с.
29. Васильев А. В. Предисловие к кн.: Полное собрание сочинений по геометрии Н. И. Лобачевского. Т. 2. – Казань: Типография университета, 1886.
30. Васильев А. В. Алгебраический анализ. Теория буквенных уравнений в связи с теорией субституций. Казань: Типография Казанского университета, 1886. – 191 с.

31. Васильев А. В. Лекции по дифференциальному исчислению. – Казань: Издание литографированное, 1887 – 162 с.
32. Васильев А. В. Задачи по геометрическим приложениям дифференциального исчисления, читанным экстра-ординарным профессором А. В. Васильевым. – Казань: Типография университета, 1887.
33. Васильев А. В. Обзор русской математической литературы по теории непрерывных алгебраических дробей за 1886/87 гг. // Собрание протоколов заседаний Секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете. – 1889. – Т.7. – С. 398.
34. Васильев А. В., Карташев А. В. Отчет за 1886/89 гг. по народному образованию членов Свияжского уездного училищного совета.
35. Васильев А. В. И. С. Громека. Некролог профессора Казанского университета по кафедре механики (1851 – 1889) // Ученые записки императорского Казанского университета. – 1890. – Март – апрель. – С. 1 – 4.
36. Васильев А. В. О профессоре математики Владимире Павловиче Максимовиче // Собрание протоколов заседаний Секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете. – 1890. – Т. 8. – С. 53 – 56.
37. Васильев А. В. Из истории и философии понятия о целом положительном числе // Известия физико-математического общества при Казанском ун-те. – 1891. – Т. 1. – № 1. – С. 1 – 21. (Речь, произнесенная 28 окт. 1890 г. при открытии Физико-математического общества при Казанском ун-те).
38. Васильев А. В. Из истории и философии понятия о целом положительном числе. – Казань, 1891. – 126 с.
39. Васильев А. В. Сборник упражнений по геометрическим приложениям дифференциального исчисления проф. Васильева. Вып. 1. – Казань: Литография В. И. Ключникова, 1891. – 37 с.
40. Васильев А. В. Отзыв о кн.: Шохор-Троцкий С. И. Учебник геометрии для средних учебных заведений, с приложением дополнительных статей //

- Известия физико-математического общ-ва при Казанском ун-те. – 1891. – Т. 1. – № 2. – С. 47 – 49.
41. Васильев А.В. Законы случайного и математическая статистика. Очерки // Вестник Европы. – 1892. – Кн.10. – С. 630 – 655.
42. Васильев А. В., Суворов Ф. М. Воззвание об открытии подписки для образования капитала имени Н. И. Лобачевского // Известия физико-математического общ-ва при Казанском ун-те. – 1892. – Т. 2. – № 2. – С. 37 – 39.
43. Перевод статьи: Гельмгольц Г. Счет и измерение // Известия физико-математического общ-ва при Казанском ун-те. – 1892. – Т. 2. – № 3. – С. 3 – 16.
44. Васильев А. В. Броннер и Лобачевский. Два эпизода из жизни первых профессоров Казанского университета. – Казань: Типография Печенкина, 1893. – 15 с.
45. Васильев А. В. Иезуит Саккери – итальянский предшественник Лобачевского // Известия физико-математического общ-ва при Казанском ун-те. – 1893. – Т. 1. – № 3. – С. 53 – 57.
46. Васильев А. В. Предисловие к кн.: Об основаниях геометрии (К столетнему юбилею Н. И. Лобачевского). – Казань: Типо-литография императорского ун-верситета, 1893. – С. III – IV.
47. Перевод статьи: Кронекер Л. Понятие о числе // Известия физико-математического общ-ва при Казанском ун-те. – 1893. – Т. 3. – № 1. – С. 33 – 44.
48. Васильев А. В. О Б. Больцано и его «Парадоксах бесконечного» // Известия физико-математического общ-ва при Казанском ун-те. – 1893. – Т. 3. – № 1. – С. 9.
49. Перевод статьи: Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Известия физико-математического общ-ва при Казанском ун-те. – 1893. – Т. 4. – № 4. – С. 83 – 102.

50. Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский. – Казань: Тип. имп. ун-та, 1894. – 40 с. (Речь, произнесенная в торжественном собрании Казан. ун-та 22 окт. 1893 г.).
51. Wassiljef A. Lobatschefskij's Ansichten über die Theorie der Parallellinien vor dem Jahre 1826 // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung (Berlin), 1894/95. – Н. 4. – № 3. – S. 87 – 90.
52. Васильев А. В. Некоторые замечания по поводу проекта Устава Русской ассоциации для обеспечения устройства естественнонаучных съездов // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1894. – Т. 4. – № 3. – С. 90 – 93.
53. Предисловие и редактирование кн.: Вейерштрасс К. К мемуару Линдемана «О Лудольфовом числе» (доказательство невозможности квадратуры круга). – Казань: Тип. имп. ун-та, 1894. – С. 1 – 8.
54. Васильев А. В. Математический конгресс в Чикаго // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1894. – Т. 4. – № 1. – С. 65 – 67.
55. Васильев А. В. А. В. Каталан (некролог) // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1894. – Т. 4. – № 2. – С. 84.
56. Vassilief A. // L'Intermediaire des Mathematicians (Paris – Geneve). – 1895. – Т. 11. – P. 406, 416.
57. Wassilief A. V. Lobacevsky as algebraist and analyst // Bulletin of the New York Mathematical Society. – 1894. – Vol.3. – P. 231 – 236.
58. Васильев А. В. Математика на 66 съезде немецких естествоиспытателей и врачей в г. Вене // ЖМНП. – 1895. – Январь. – С. 15 – 29.
59. Васильев А. В. Предисловие к кн.: Об основаниях геометрии. – Изд-е 2-е, расширенное. – Типография императорского университета, 1895. – С. III – IV.
60. Васильев А. В. Отзыв о сочинении Д. М. Синцова «Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка» // Ученые записки Казан. ун-та, 1895. – Кн. 7 – 8. – С. 1 – 9.

61. Васильев А. В. Артур Кэли (некролог) // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1895. – Т. 5, № 1. – С.29 – 32.
62. Васильев А. Отчет местного распорядительного комитета, организованного Физико-математическим обществом для составления капитала имени Н. И. Лобачевского. 1893 – 1895. – Типография императорского университета, 1895. – 66 с.
63. Васильев А. В. К истории землевладения в Свияжском уезде // Известия археологии, истории и этнографии при императорском Казанском университете. – 1895. – Т. 12. Вып. 6. – С. 603 – 612.
64. Васильев А. В. В защиту Казанского губернского земства. – Казань: Тип. В. М. Ключникова, 1895. – 16 с.
65. Васильев А. В. Значение Н. И. Лобачевского для императорского Казанского университета. – Казань: Типография императорского университета, 1896. – С. 3 – 20. (Речь, произнесенная в день открытия памятника Н. И. Лобачевскому 1 сентября 1896 г.).
66. Васильев А. В. In memoriam, N. I. Lobatchevsky // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1896. – Т. 6, № 3 – 4.
67. Vassilief A. Fondation d'un prix on l'honneur de Lobatchefsky. Inauguration d'un Monument pour perpetuer sa memoire. – Kasan, 1896.
68. Vassilief A. // L'Intermediaire des Mathematicians (Paris – Geneve). – 1896. – Т. III. – P. 26.
69. Васильев А. В. О математическом и нравственном ожидании (конспект публичной лекции, прочитанной 31 марта 1897 г.). – Казань: Типография императорского университета, 1897. – 4 с.
70. Васильев А. В. Первый международный математический конгресс в Цюрихе 9 – 11 авг. н. с. 1897 г. // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1897. – Т. 6, № 1. – С.61 – 62; № 2. – С. 97 – 104; Т. 8, № 2. – С. 57 – 59.

71. Васильев А. В. Премия по теории простых чисел (Предложена Акад. Физико-математических наук Королевского Неаполитанского общ-ва) // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1897. – Т. 7, № 1. – С.62 – 63.
72. Lobatschewskij's Ansichten uber die Theorie der Parallellinien vor dem Jahre 1826 // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. – 1894/1895, h. 4, №3, s. 88-90.
73. Васильев А. В. Проект новой энциклопедии математических наук // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1897. – Т. 7, № 1. – С.64 – 67.
74. Васильев А. В. В память Тиссерана, Меллера, Гильдена и Гульда. – Казань: Типография императорского университета, 1897. – 6 с.
75. Васильев А. В. Д. Д. Сильвестр. По поводу кончины крупнейшего математика XIX в. // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1897. – Т. 7, № 2. – С. 89 – 91.
76. Васильев А. В. Эрмит о Вейерштрассе // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1897. – Т. 7, № 2. – С.85 – 88. (Перевод речи Эрмита, произнесенной в траурном заседании 1 марта 1897 г.).
77. Васильев А. В., Некрасов В. Л. Проекты публичных курсов по физико-математическим наукам // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1897. – Т. 7, № 1. – С.2 – 9.
78. Васильев А. В. Вступительная речь председателя физико-математического общества, сказанная им в Торжественном заседании общества 22 октября 1897 г. – Казань, 1898. – 5 с. (Речь, произнесенная в заседании, посвященном первому присуждению премии имени Лобачевского).
79. Васильев А. В. Отзыв о сочинении проф. М. А. Тихомандрицкого «Теория эллиптических функций и эллиптических интегралов» // Записки императорской Академии наук по физико-математическому отделению. – 1898. – Т. VI, № 9. – С. 1 – 42.

80. Васильев А. В. Отзыв о сочинении Д. М. Синцова «Рациональные интегралы линейных уравнений» // Ученые записки императорского Казанского университета. – 1898. – Кн. 12. – С. 10 – 14.
81. Васильев А. В., Синцов Д. М. Отчет о первом присуждении премии имени Н. И. Лобачевского 22 окт. 1897 г. // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1898. – Т. 8, № 1. – С.1 – 9.
82. Васильев А. В. Новый историко-библиографический журнал // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1898. – Т. 8, № 1. – С.7. (По поводу выхода журнала под ред. Лория «*Bolletino di bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche*»).
83. Васильев А. В. Эрмит о Бриоски // Известия физико-математического общества при Казанском ун-те. – 1898. – Т. 8, № 1. – С.4 – 7. (Перевод речи Эрмита).
84. Васильев А. В. Научно-популярные издания // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1898. – Т. 8, № 1. – С.8 – 9.
85. Васильев А. В. Поль Серри (некролог) // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1898. – Т. 8, № 2. – С.50.
86. Васильев А. В. Научные премии // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1898. – Т. 8, № 2. – С.50 – 52. (О премиях Геттингенского университета, Королевского Геттингенского общества и Кенигсбергского физико-математического общества).
87. Васильев А. В. Королевское общество в Лондоне // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1898. – Т. 8, № 2. – С.52 – 53. (О присуждении премий этого общества британским ученым).
88. Васильев А. В. Медаль имени Сильвестра // Известия физико-математического общества при Казанском ун-те. – 1898. – Т. 8, № 2. – С.54 – 55.
89. Васильев А. В. Научные конгрессы // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1898. – Т. 8, № 2. – С.57 – 59. (По поводу выхода Трудов Первого международного математического конгресса в Цюрихе).

90. Vassilief A. Prix Lobatchefsky (premier concours 1897) // Известия физико-математического общ-ва при Казанском ун-те. – 1898. – Т. 7, № 4. – С.130 – 132.
91. Vassilief A. Prix Lobatchefsky (premier concours 1897) // Revue de Mathematiques. – 1898. – Vol. VI, № 2. – P. 62 – 63.
92. Vassilief A. Prix Lobatchefsky (premier concours 1897) // L'Intermadeaire des Mathematicians (Paris – Geneve). – 1898. – Т. V. – P. 67.
93. Vassilief A. P. L. Tchebychef et son oeuvre scientifique // Bulletino di bibliografia et storia scienze. – 1898. – № 1, 2. – 56 p.
94. Васильев А. В. Взгляды Огюста Конта на философию математики // Вопросы философии и психологии. – 1899. – Кн. 49. – С. 540 – 559.
95. Васильев А. В. Исторический очерк теории чисел (Приложение к кн.: Из истории и философии понятия о целом положительном числе. – Казань, 1891). – С. 127 – 135.
96. Васильев А. В. Второй Международный математический конгресс в Париже // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1898. – Т. 8, № 4. – С.50.
97. Васильев А. В. Университет и преподавание математики в средней школе // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1899. – Т. 9, № 1. – С.1.
98. Васильев А. В. Русская математическая библиография // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1899. – Т. 9, № 4. – С.56 – 57.
99. Васильев А. В. Речь о важности библиографических работ // Дневник X Съезда русских естествоиспытателей и врачей. Киев, 21 – 30 авг. 1898 г. – Киев, 1899.
100. Васильев А. В. О недавно найденном учебнике геометрии Н. И. Лобачевского // Дневник X Съезда русских естествоиспытателей и врачей. Киев, 21 – 30 авг. 1898 г. – Киев, 1899. – С. 433
101. Васильев А. В. Отчет по помощи пострадавшим от неурожая в Казанской губернии. – Казань: Типография императорского университета, 1899. – 8 с.

102. Васильев А. В. Пространство и движение // Физико-математический ежегодник, посвященный вопросам математики, физики и астрономии в элементарном изложении. – М., 1900. – С. 1 – 13.
103. Васильев А. В. Отзыв о кн.: Аристов И. И. Об итерации функций // Ученые записки императорского Казанского университета. – 1900. – Кн. 2. – С. 196 – 199.
104. Васильев А. В. Отзыв заслуженного ординарного профессора А. В. Васильева о сочинении «Теория алгебраических ключей данных Коши и сравнение ее с последующими теориями Грассмана». – Казань, б. г. – 5 с.
105. Перевод с франц. статьи П. Л. Чебышева «О приближенных выражениях квадратного корня переменной» // Ученые записки Казан. ун-та. – 1900. – Янв. № 2. – С. 30.
106. Редактирование и предисловие к переводу Д. К. Добросердова книги «Собрание формул, относящихся к дифференциальному и интегральному исчислениям» (Нернст, Шенфлис). – М.: Типография А. П. Ненашева, 1900. – 38 с.
107. Васильев А. В. Университет и национальное воспитание (речь, произнесенная при открытии Педагогического общества при Казанском университете 8 дек. 1900 г.) // Вестник воспитания. – 1900. – С. 68 – 80.
108. Васильев А. В. Предложение о созыве в Казани при физико-математическом обществе летом 1901 или 1902 г. первого съезда преподавателей математики и физики средних учебных заведений // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1900. – Т. 10, № 2. – С. 3 – 5.
109. Васильев А. В. Русская математическая библиография // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1900. – Т. 9, № 4. – С. 56 – 58.
110. Васильев А. В. Афанасий Никитин и его «Хождение (хождение) за три моря» // Чтения в обществе любителей русской словесности в память А. С. Пушкина при императорском Казанском университете. – Казань, 1900. – 10 с. (Важность торговых и культурных связей с Персией и Индией).

111. Wassilief A. P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen // Tschebyschef. – Leipzig: Teubner, 1900. – 53 s.
112. Wassilief A. Les idees d'Auguste Conte sur la philosophie des mathematique // L'Enseignement mathematique (Paris). – 1900. – Т. II. – P. 157 – 172.
113. Wassilief A. // L'Intermediaire des mathematicians (Paris). – 1900. – Т. VII. – P. 380.
114. Васильев А. В. Речь, произнесенная в Торжественном заседании физико-математического общества по случаю второго присуждения премии Н. И. Лобачевского) // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1901. – Т. 10, № 4. – С.1 – 9.
115. Васильев А. В., Порфирьев Н. Отчет физико-математического общества при императорском Казанском университете по поводу второго присуждения премии Н. И. Лобачевского // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1901. – Т. 10, № 4. – С.10 – 14.
116. Васильев А. В. М. В. Остроградский // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1901. – Т. 11, № 4. – С.3 – 10. (По поводу 50-летия кончины).
117. Васильев А. В. Предисловие и редактирование кн.: Нернст В., Шёнфлис А. Краткий и элементарный курс дифференциального и интегрального исчисления для физиков, химиков и натуралистов. – М.: Изд. Невашева, 1901.
118. Васильев А. В. Записка губернского гласного по вопросу об учреждении при Казанском губернском земском собрании особого органа для обсуждения вопросов по народному образованию. – Казань, 1901. – 16 с.
119. Vassilief A. Prix Lobatchefsky (Second concours 1900) // Известия физико-математического общ-ва при Казанском ун-те. – 1901. – Т. 10, № 4. – С.49 – 51.
120. Васильев А. В. Введение в анализ. Курс лекций. Вып. 1. – Казань: Изд-е студента В. Милованова, 1902. – II, 2, 129 с.
121. Васильев А. В. Петр Сергеевич Назимов (некролог) // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1902. – Т. 12, № 1. – С.1 – 6.

122. Vassilief A., Suvorov F. Announcement of the Physico-Mathem. Society of Kazan, 1902 // American Journal of Mathematics. – 1902. – Vol. 15. – P. 284 – 285.
123. Васильев А. В. Отзыв о трудах А. П. Котельникова, представленный в физико-математический факультет на предмет замещения третьей вакантной профессуры по кафедре чистой математики // Ученые записки императорского Казанского университета. – 1903. – Кн.5 – 6. – С. 6 – 13.
124. Vassilief A. Prix Lobatchefsky (Troisieme concours 1903) // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1901. – Т. 14, № 1. – С. 96 – 98.
125. Васильев А. В. Лобачевский Николай Иванович // Биографический словарь профессоров и преподавателей Казанского университета (1804 – 1904) / Под ред. Н. П. Загоскина. – Казань, 1904. – Часть 1. – С. 406 – 418.
126. Васильев А. В. Бартельс Иоганн Мартин Христиан // Биографический словарь профессоров и преподавателей Казанского университета (1804 – 1904) / Под ред. Н. П. Загоскина. – Казань, 1904. – Часть 1. – С. 257 – 261.
127. Васильев А. В. Попов Александр Федорович // Биографический словарь профессоров и преподавателей Казанского университета (1804 – 1904) / Под ред. Н. П. Загоскина. – Казань, 1904. – Часть 1. – С. 456 – 462.
128. Васильев А. В. Отчет физико-математическому обществу при императорском Казанском университете по поводу третьего присуждения премии имени Н. И. Лобачевского // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1902. – Т. 14, № 1. – С.1 – 9.
129. Васильев А. В. Введение в анализ. Курс лекций. Вып. 1. – Казань: Изд-е студента Н. Н. Иовлева, 1904. – 139 с.
130. Васильев А. В. Отзыв о сочинении студента IV курса физико-математического факультета Антонина Вечеслова «Теория роста функций в связи с вопросом о порядке бесконечно больших и бесконечно малых величин» // Ученые записки императорского Казанского университета. – 1904. – № 4. – С. 8 (А. Вечеслову была присуждена серебряная медаль).

131. Васильев А. В. Дифференциальная геометрия. Курс лекций по приложениям дифференциального исчисления к геометрии, читанный в императорском Казанском университете в 1904 г. – Казань: Изд-е студентов, 1905. – 168 с.
132. Васильев А. В. Право всеобщего голосования // Сын отечества. – 1905. – Октябрь.
133. Васильев А. В. Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых // Папелье Ж. Начала анализа бесконечно-малых в элементарном изложении. Вып. 1. Пер. с фр. под ред. проф. А.П. Котельникова. - Казань: Изд. студентов Н. Иовлева и А. Коротнева, 1906 – с. 1-70.⁷⁵
134. Васильев А. В. Введение в анализ. Курс лекций. Вып. 1. – Казань: Изд-е студента Н. Н. Иовлева, 1907. – V, 139 с.
135. Васильев А. В., Обухов В. В. Отчет по народному образованию членов Свяжского уездного училищного совета. – Казань, 1907.
136. Васильев А. В. Введение в анализ. Курс лекций. Вып. 2. – Казань: Изд-е студента Н. Н. Иовлева, 1904. – 2, 228 с.
137. Васильев А. В. Программа курса «Обзор важнейших вопросов философии математики», читанного в 1908 – 09 гг. в Педагогической Академии. – СПб.: Тип. Флейтмана, б.г. – 4 с.
138. Васильев А. В. Программа курса «Обзор важнейших вопросов философии математики», читанного в 1908 – 12 гг. в Педагогической Академии. – СПб.: Тип. Сойкина, б.г. – 8 с.
139. Васильев А. В. Первая Дума и идея международного парламента // Вестник Европы. – 1908. – Кн. 8. – С. 640 – 650.
140. Васильев А. В. Предисловие к кн.: Н. И. Лобачевский. Геометрия. – Казань, 1909. – III, 67 с. (переиздано в 1911 г.).
141. Васильев А. В. Введение в анализ. Курс лекций. Вып. 2. – Казань: Изд-е студента Н. Н. Иовлева, 1910. – 190 с.

⁷⁵ Васильев А.В. // Папелье Ж. Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых. // Начала анализа бесконечно малых в элементарном изложении. Пер. с фр. Изд.2. – М.: URSS, 2015. – 168 с.

142. Васильев А. В. Отношение Н. И. Лобачевского к теории параллельных линий до 1826 г. // Бонола Роберто. Неевклидова геометрия. Критико-историческое исследование ее развития. СПб, «Общественная польза», 1910. – С. 157 – 159.
143. Васильев А. В. Перевод статьи: Г. Минковский. Пространство и время // Известия физико-математического общества при Казанском университете, 1910, Т. 16, № 4. – С.137 – 155 (перепечатка в кн.: Новые идеи в математике, 1914. - Вып. 5).
144. Васильев А. В. Обзор важнейших вопросов философии математики. Обзор курса, читанного в 1910-11 гг. в Педагогической Академии. СПб., Тип. Александрова, б.г. – 4 С.
145. Васильев А. В. Н. И. Пирогов и университетский вопрос // Сборник памяти Н. И. Пирогова. – СПб.: Школа и жизнь, 1911. – С. 28.
146. Васильев А. В. Предисловие к книге: Н. И. Лобачевский. Геометрия // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1911. – Т. 17, № 1. – С.3 – 10.
147. Васильев А. В. Математическое и философское преподавание в средней школе // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1912. – № 554. – С. 3 – 15. (Речь на открытии первого российского съезда преподавателей математики 27 декабря 1911 г.).
148. Васильев А. В. Памяти И. П. Долбни // Известия физико-математического общ-ва при Казанском ун-те. – 1912. – Т. 18, № 2. – С.78 – 81.
149. Васильев А. В. Памяти И. П. Долбни. Речь на заседании Совета горного института // Записки Горного института. – 1912. – Т. 4, № 1. – С. XII – XIV.
150. Васильев А. В. Философия математики. – СПб., 1912. (Программа лекции в Петербургском обществе народных университетов 14 декабря 1912 г.).
151. Васильев А. В. Введение в анализ. Курс лекций. Вып. 1. – Изд-е 4-е. – Казань: М. А. Голубев, 1913. – IV, 135 с.

152. Васильев А. В. Вопросы теории вероятности до теории Якова Бернулли. – СПб., 1913. (Доклад на Торжественном заседании Академии наук 1 декабря 1913 г.).
153. Васильев А. В. Памяти Г. Ф. Шершеневича // Труды и протоколы Педагогического общества при Казанском университете. – 1913. – II, 2.
154. Васильев А. В. Перевод статьи Б. Рассела «Новейшие работы о началах математики» // Новые идеи в математике. – 1913. – № 1. – С. 82 – 105.
155. Васильев А. В. H. Poincaré и философия математики // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1913. – Т. 19, № 1. – С. 7.
156. Предисловия А. В. Васильева в сб. 1 «Математика», сб. 2, 3 «Пространство и время», сб. 8 «Философия и математика».
157. Васильев А. В. Броннер и Лобачевский // Записки нефилологического общества. – СПб., 1914. Вып. VIII. – 17 с. (Отд. оттиск).
158. Васильев А. В. Лобачевский Николай Иванович (1793 – 1856) // Русский биографический словарь. – СПб., 1914. – Т. 10. – С. 528 – 565.
159. Васильев А. В. Личность Лобачевского и его философские воззрения. – СПб.: Общество народных университетов, 1914.
160. Васильев А. В. Принцип экономии в математике // Математическое образование. – 1914. – № 2. – С. 1 – 12. (Доклад на общем собрании второго российского съезда преподавателей математики 31 декабря 1913 г.).
161. Васильев А. В. Перевод ст.: Минковский Г. «Пространство и время» // Новые идеи в математике. Сб. 5. – 1914. – С. 1 – 22. (Перепечатка работы, опубликованной в Известиях КФМО).
162. Васильев А. В. За всеобщее волостное земство // За всеобщее волостное земство. СПб, 1914. – С. 1 – 15. (Речь в Государственном Совете).
163. Vassilief A. Le bicentenaire de la loi des grande nombres // L'Enseignement Mathematique (Paris – Geneve). – 1914. – Т. 16. – N 2. – P. 92 – 97.
164. Васильев А. В. Математика // Энциклопедия словарь Гранат. 1915. 7-е изд-е. Т. 28. – СПб. 317 – 328.

165. Васильев А. В. Финансовая сторона вопроса о борьбе с пьянством в прениях Государственного Совета // Известия общества финансовых реформ, 1915, № 10. – С. 5 – 13, 42 – 43.
166. Васильев А. В. Математика // Известия физико-математического общества при Казанском университете. – 1916. – Т. 22, № 1. – С.1 – 58.
167. Васильев А. В. Егор Иванович Золотарев // Русский биографический словарь. – СПб., 1916. – Т. 12. – С. 431 – 434.
168. Васильев А. В. Памяти С. В. Ковалевской. Двадцатипятилетие со дня кончины С. В. Ковалевской // Речь. – СПб., 1916. – № 28 (29.01.1916).
169. Васильев А. В. Чествование памяти С. В. Ковалевской // Русские ведомости. – М., 1916. – № 24 (30.01.1916).
170. Васильев А. В. Идея парламента мира и первая Государственная дума // К 10-летию 1-ой Государственной думы 27 апреля 1906 – 27 апреля 1916. Сб. статей переводумцев. – Г.: Огни, 1916. – С. 144 – 156.
171. Васильев А. В. Незабвенной памяти М. М. Ковалевского (скон. 23 марта 1916 г.). // К 10-летию 1-ой Государственной думы 27 апреля 1906 – 27 апреля 1916. Сб. статей переводумцев. – Г.: Огни, 1916. – С. 217 – 224.
172. Васильев А. В. Прогрессивный подоходный налог 1812 г. и падение Сперанского // Голос минувшего. – 1916. – С. 332 – 339. (Доклад на секции Русской истории Исторического общества 30 марта 1916 г.).
173. Васильев А. В. Целое число. Исторический очерк. – Пг.: Научное изд-во, 1919. – 268 с.
174. Васильев А. В. Математика. Вып. 1 (1725 – 1826 – 1863). – Пг.: Изд-во Российской Академии наук, 1921. – 72 с.⁷⁶

⁷⁶ Переиздание: Васильев А. В. История математики в России: 1725 – 1826 – 1863. С приложением статьи о сущности математики как науки. Изд. 2, доп. – М.: URSS, 2015. – 136 с.; Васильев А. В. Математика / Судьба проекта «Русская наука». 1916 – 1920. (К 100-летию Комиссии по изданию сборника «Русская наука»): статьи и документы. / Отв. ред. Ю. М. Батулин. – СПб.; М.: Перо, 2016. – С. 390 – 486.

175. Васильев А. В. П. Л. Чебышев и его значение в современной математике. (Речь на торжественном заседании, посвященном 100-летию со дня рождения П. Л. Чебышева).
176. Васильев А. В. Пространство, время, движение. Историческое введение в общую теорию относительности. – Берлин: Аргонавты, 1922. – 150 с.⁷⁷
177. Васильев А. В. Целое число. Исторический очерк. – Пг.: Научное изд-во, 1922. – VI, 272 с.
178. Васильев А. В. П. Л. Лавров – историк и философ математики // Сб. памяти П. Л. Лаврова. – Пг.: Колос, 1922. – С. 373 – 384.
179. Васильев А. В. Пространство, время, движение. Исторические основы теории относительности. – Пг.: Образование, 1923. – I, 134 с.
180. Васильев А. В. От Евклида до Гильберта (вступительная статья и редакция) // Гильберт Д. Основания геометрии. – Пг.: Сеятель, 1923. – С. IX – XXXII.
181. Vassilief A. Une nouvelle edition des Ouevres de N. J. Lobatchefsky // L'Enseignement mathematique (Paris). – 1923. – Т. 23. – Р. 218 – 220.
182. Vassilief A. Henry More, Newton et Berkeley // Estratto dagli dei V Congresso international di Filosofia, 5 – 9 magio, 1924, Napoli. Naples, 1925. – Р. 1045 – 1049.
183. Wassilief A. Space, time, motion. – L.: Knopf, 1923. (С предисловием Б. Рассела).
184. Wassilief A. Algebra di Lobachevsky // Periodico di matematico. – 1923. – Vol. 5. – Р. 121 – 127.
185. Васильев А. В. Чистая математика на службе естествознания и техники // Вестник инженеров. – 1925. – № 1. – С. 35 – 42.
186. Vassilieff A. Henry More, Newton et Berkeley // Estratto dagli dei V Congresso internationale di Filosofia, 5-9 magio – 1924. – Napoli. – Р. 1045-1049.
187. Васильев А. В. Столетие неевклидовой геометрии // Научный работник. – 1926. – № 10. – С. 20 – 29.

⁷⁷ Переиздание: Васильев А. В. Пространство, время, движение. Историческое введение в общую теорию относительности. Изд. 4. – М.: URSS, 2013. – 136 с.

188. Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский // Красная Татария. – 1926. – 26 февр.
189. Wassilief A. V. The Acquisitions and Enigmas of the Philosophy of Nature // Proceedings of the Sixth International Congress of Philosophy. Boston – Cambridge, 1926. – Vol. XXIII, № 23. – P. 65 – 74.
190. Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский и его заветы // Столетие неевклидовой геометрии Лобачевского. – Казань, 1927. – С. 21 – 33. (Речь на праздновании столетия открытия неевклидовой геометрии).
191. Васильев А. В. Жизнь и научное дело Н. И. Лобачевского. Корректурa рукописи. – 1927.⁷⁸
192. Васильев А. В. Математика за последние пятьдесят лет // Математическое образование. – 1928. – № 1. – С. 1 – 9; № 2. – С. 49 – 58. (Речь в день празднования Московским математическим кружком 50-летнего юбилея академической деятельности проф. А. Васильева 1 февраля 1925 г.).
193. Vassilief A. Development du concept scientifique de l'espace // Scientia (Bologna). – 1929. – Vol. XLVI, № 10. – P. 221 – 230; N 11. – P. 289 – 300.
194. Васильев А. В. Нужно ли писать и изучать историю математики в России? // Математическое образование. – 1930. – № 2. – С. 60 – 64. (Доклад на пленарном заседании съезда математиков 4 мая 1927 г.).
195. Васильев А. В. Перевод кн.: Адамар Ж. Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 134 с.
196. Васильев А. В. Перевод ст.: Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основаниях геометрии // Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию его идей. – М.: Гостехиздат, 1956. – С. 366 – 382.
197. Васильев А. В. Перевод ст.: Отзыв Пуанкаре о работах Гильберта // Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию его идей. – М.: Гостехиздат, 1956. – С. 452 – 478.

⁷⁸ Издание: Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский (1792 – 1856). – М.: Наука, 1992. – 230 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

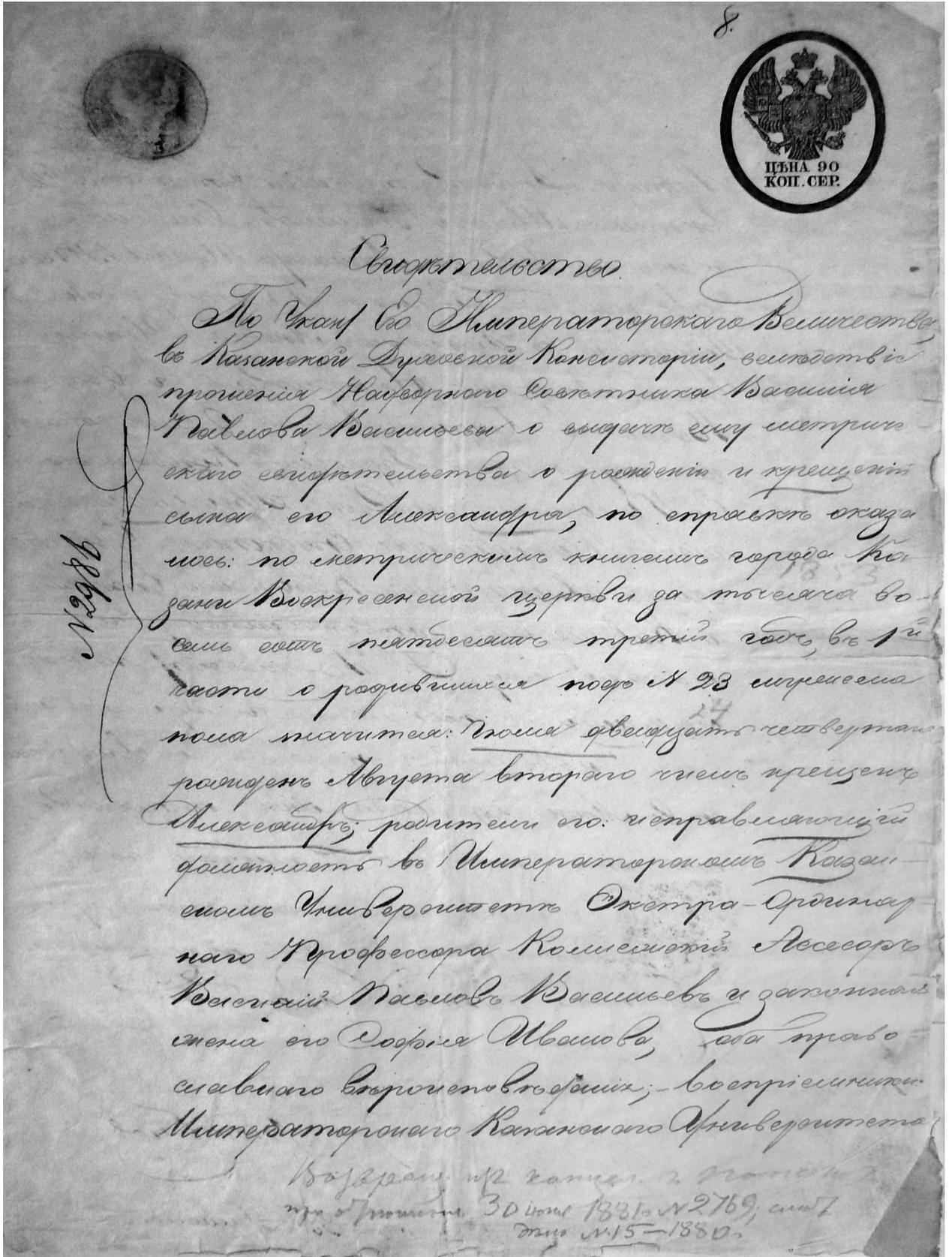


Рисунок 5. Метрическое свидетельство А. В. Васильева (л. 1) (НА РТ)

Ротарию Давидовичу Соколову
 вступил Иван Михайлов Сидоров
 и дочь его Анна Александровна Иванова. И так
 вбо пришедших еверших Иродовичей Андрей
 Зарганский и Давидович Андрей Чермас-
 вичи, Андрей Носович и Федот
 Васильев Кургановичи. И сие, соас-
 но отпущенно Духовной Канцелярии
 Со Председателем, Александром
 Павловичем Сидоровым, Чермас-
 овичи Викториою Канцелярии
 и Канцелярии утверждением, и со-
 сдается ему Е. Васильеву по на-
 селенным подвешит и пришедши-
 ем маремей нечит сие свидетельство
 отъ Мона сего мая дня тысяча во-
 сеньсотъ пятьдесятъ пятого года.
 Въ сие свидѣтельство на мажор отпущен
 сего отпущенно слово "с" поправлено.
 Свидѣтели: *Алексей Сидоров*
Александр Сидоров
 М. сего Александровича
 Канцелярии Духовной Кан-
 селярии нечит.



Сиреняковъ
 Стоицакальничъ В. Сидоровъ

Рисунок 6. Метрическое свидетельство А. В. Васильева (л. 2) (НА РТ)

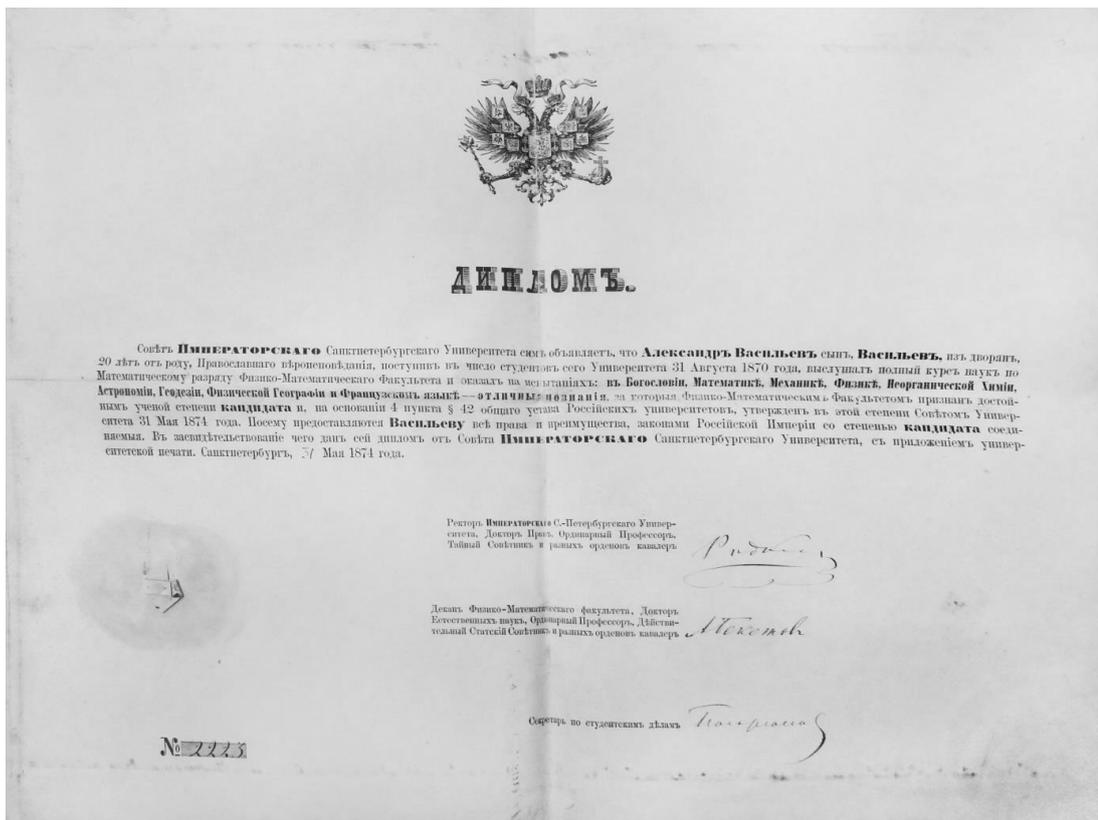


Рисунок 7. Диплом об окончании физико-математического факультета Петербургского университета со степенью кандидата (НА РТ)

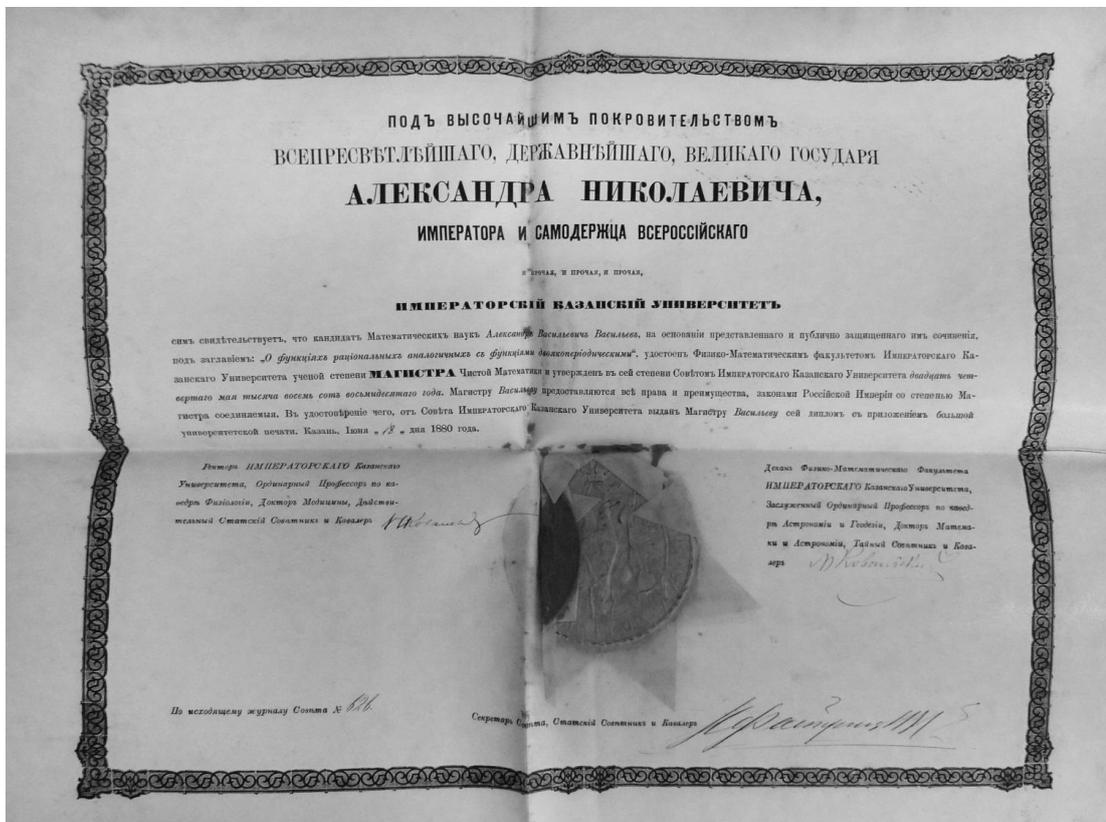


Рисунок 8. Диплом магистра чистой математики (НА РТ)



Рисунок 9. А. В. Васильев (фото из альбома, подготовленного к 70-летию К. Вейерштрасса)

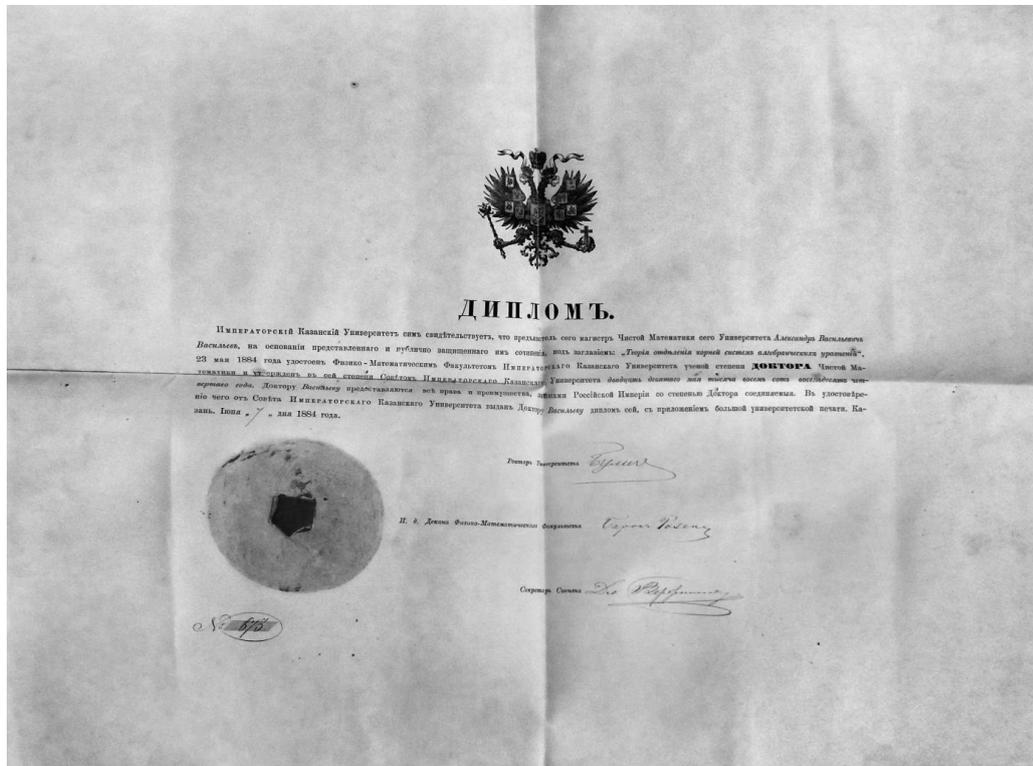


Рисунок 10. Диплом доктора чистой математики (НА РТ)



Рисунок 11. Билет члена Государственного Совета (ОРКиР НБ МГУ)



Рисунок 12. А. В. Васильев с детьми – (слева направо) Николаем, Анной, Еленой, Сергеем (личный архив Н. Л. Крушинской)