На правах рукописи

Андрианов Александр Львович

ЗАРОЖДЕНИЕ И РАННЯЯ ИСТОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Специальность 07.00.10 – «История науки и техники» (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова Российской академии наук.

Научный руководитель:

Демидов Сергей Сергеевич, доктор физико-математических наук, заведующий Отделом истории физико-математических наук ФГБУН Института истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН

Официальные оппоненты:

Кусраев Анатолий Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, директор ФГБУН «Владикавказский научный центр» РАН

Зверкина Галина Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика – 1» Института управления и информационных технологий ФГБОУ ВО «Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II» (МИИТ)

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Российский государственный гуманитарный университет» (РГГУ)

Защита диссертации состоится 02 октября 2018 г. в 13 часов на заседании диссертационного совета Д 002.051.05 при ФГБУН Институте истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН по адресу: 125315, г. Москва, ул. Балтийская, д. 14, ком. 46.

С диссертацией можно ознакомиться в Дирекции Института истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН и на сайте института http://www.ihst.ru.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью учреждения, просим направлять учёному секретарю диссертационного совета по адресу: 125315, г. Москва, ул. Балтийская, д. 14; тел./факс 8(495)988-22-80.

Автореферат разослан «_____» _______________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.051.05,
кандидат физико-математических наук И.О. Лютер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования данной диссертации – возникновение и раннее развитие линейного программирования (ЛП).

Предмет диссертационного исследования – истоки ЛП, его зарождение и становление в 1930–60-е гг. и влияния этого процесса на теоретические и прикладные разработки того времени в СССР и США. Главное внимание уделено первооткрывателю ЛП Л.В. Канторовичу и основателю ЛП на Западе Дж. Данцигу; их роли организаторов и преподавателей; борьбе Канторовича по продвижению ЛП; связи Данцига с другими значительно повлиявшими на ЛП учеными (Т. Купмансом, Дж. фон Нейманом и пр.).

Цель диссертации – анализ заложивших предпосылки ЛП исследований и выделение определяющих факторов зарождения и раннего развития ЛП и примыкающих направлений в Мире в период с конца 18 в. до конца 1960-х гг.; обобщение историко-научного материала для воссоздания целостной картины развития области и реакции на неё научного сообщества.

Актуальность темы исследования. Зарождение и развитие новых областей представляет собой одну из важнейших и интереснейших проблем истории математики. ЛП стало принципиально новой областью, получившей широкое применение и оказавшей огромное влияние на развитие экономики и самой математики. Однако историко-математическое осмысление этого феномена несмотря на его важность, достаточное количество накопленной информации и относительную свежесть, но зрелость результатов по существу только началось. Предпосылки возникновения ЛП в разных странах и школах, влияние научной, исторической, политической, социальной и экономической среды недостаточно изучены. Существуют обширные источники по исследуемому вопросу, однако, в большинстве из них не стали объектом исторического анализа взаимосвязи исследований отдельных учёных в разных направлениях, связи их работ с работами коллег по близкой тематике и работами в других областях математики. Это приводит к недостаточно объективной оценке вклада отдельных учёных, отсутствию понимания их идейного взаимовлияния, и не позволяет воссоздать адекватную картину исторического процесса развития ЛП. Значимость ЛП для математической экономики, теории игр (ТИ) и некоторых других областей математики и отсутствие систематического анализа процессов его возникновения и развития определяют актуальность темы исследования.

Степень разработанности темы. Определим, что требуется для раскрытия темы диссертации и воссоздания целостной картины развития области. Открытие и развитие ЛП связывают с Канторовичем, Купмансом и Данцигом, но они опирались на определенный фундамент, и важно понимать, как он был заложен в работах о выпуклых множествах (ВМ), линейных неравенствах, оптимизации и ТИ. Прорыв же в ЛП сделали именно трое этих ученых и фон Нейман. Поэтому их деятельность надо рассмотреть особо, причем и по ЛП, и более раннюю, определившую подход к ЛП и связи с коллегами (последние инициировали исследования и часто помогали поиску решения, развитию и продвижению ЛП в науке и промышленности). Рассмотрим разработанность темы с точки зрения отражения этих моментов.

Среди работ о Канторовиче отметим:

Сборник избранных трудов Канторовича «Математико-экономические работы» (2011; ответственные редакторы С.С. Кутателадзе, И.В. Романовский), дополняя двухтомник его избранных математических работ «Selected Works» (1996; редакторы С.С. Кутателадзе, И.В. Романовский), включает основные труды экономикой тематики, комментарии, описания его деятельности и статьи, показывающие восприятие Западом его открытий. Издание показывает приоритет Канторовича (СССР) в развитии ЛП и даёт доступ к некоторым редким работам.

Двухтомник «Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый» (редакторы-составители В.Л. Канторович, С.С. Кутателадзе, Я.И. Фет) описывает жизнь, труды, личность, научные интересы и достижения учёного, борьбу с невежеством и политическими предрассудками, которые слабо освещены в имеющейся литературе. Книга основана на архивных материалах, малоизвестных трудах, интервью, воспоминаниях и написанных специально для неё статьях. Выделим: интервью, данное Канторовичем С. Брентьес; предполагавшийся доклад Канторовича «Мой путь в науке»; последнее интервью ученого «Смотреть на правду открытыми глазами» о этике и роли ученого при принятии экономических решений и взаимодействии с властью и обществом; статью А.М. Вершика об открытии ЛП, Канторовиче как наставнике и организаторе, и связи математической экономики с остальной математикой; Нобелевскую речь Канторовича. Книга показывает, насколько активно, несмотря на всё, он продвигал и внедрял ЛП, и даёт представление, в какой атмосфере приходилось работать и как шло признание его приоритета в Мире. Но книга ориентирована на широкий круг читателей и обходит математическую сторону вопросов. Также она, естественно, сконцентрирована на личности Канторовича.

А.Г. Кусраев, С.С. Кутателадзе, В.Л. Макаров, И.В. Романовский. Г.Ш. Рубинштейн написали ряд статей о математике и экономике Канторовича, а также о работах Канторовича во вступительных статьях в библиографических указателях.

Среди работ о Данциге отметим:

- статья У. Мюррея (Murray W.) «Tributes to George Dantzig and Leonid Khachiyan. George Dantzig: A Personal Perspective» о его личности, но не о исследованиях;
- работа Данцига «Воспоминания о началах линейного программирования» (1994) дает представление (но без формул) о появлении и развитии в США ЛП и

симплекс-метода (СМ) и связях работ основных исследователей (Е. Нейман, В. Леонтьев, Дж. фон Нейман, Т. Купманс, А. Таккер, Г. Кун и Д. Гейл);
- статья Р. Коттла и др. (Cottle R., Johnson E., Wets R.) «George B. Dantzig (1914–2005)» (2007) удачно объединяет описание жизни Данцига, его связей с коллегами и творческих принципов с анализом его научных достижений; приведенные математические формулировки и выкладки дают представление о задействованном математическом аппарате.

Из материалов об истории ЛП или СМ отметим:
- серия чрезвычайно интересных статей по истории ЛП, ТИ, выпуклого анализа и нелинейного программирования Т. Кжелдсон (Kjeldsen T.).
- статья Гейла (Gale D.) «Linear Programming and the Simplex Method» (2007), концентрирующаяся на ЛП и СМ с упором на математической стороне вопроса;
- предисловие к книге Данцига «Linear programming and extensions» (1963), где рассказывается об истоках и влияниях ЛП и СМ;
- работа Данцига «Origins of the simplex method» (1990) подробно затрагивает связь его докторской диссертации и ЛП;
- книга Р. Дорфмана и др. (Dorfman R., Samuelson P., Solow R.) «Linear Programming and Economic Analysis» (1958) раскрывает связи ЛП со стандартным экономическим анализом, ТИ, экономикой благосостояния и равновесием Вальраса;
- статья Р. Дорфмана «The discovery of linear programming» (1984) проясняет вклад в открытие ЛП главных авторов и рассказывает о некоторых существовавших до Данцига элементах ЛП;
- статья А. Прекопы (Prékopa A.) «On the development of Optimization Theory» (1980) о связи механики с ранней историей теории линейных неравенств (ТЛН), касается ЛП и нелинейного программирования.
- книга Ж.-П. Обена «Нелинейный анализ и его экономические приложения» (1988) даёт краткую история использования математики в экономике и описывает основные экономические модели (Вальраса, фон Неймана).
- книга Б.Т. Поляка «Введение в оптимизацию» (1983) дает краткий обзор интересующей нас темы, обширную библиографию и упоминает главных советских и зарубежных исследователи ЛП;
- статья В.Б. Демидовича, А.В. Дорофеевой и В.М. Тихомирова «Теория экстремальных задач и создание функционального анализа. Методические материалы для подготовки к кандидатскому экзамену по истории и философии науки (история математики). Отв. ред. и сост. С.С. Демидов» (2003) об общей концепции развития методов оптимизации по пути обобщения понимания метода множителей Лагранжа;
- исторические справки в двухтомнике А. Схрейвера «Теория линейного и целочисленного программирования» (1991).
- сборник Куна Г. и Таккера А. «Линейные неравенства и смежные вопросы» (1959), где представлена статья Г.Ш. Рубинштейна о работах ученых СССР по

ЛП со сравнением некоторых методов и кратким перечислением зарубежных исследователей ЛП; в сборник включена книга С. Вайда «Теория игр и линейное программирование», посвященная связи ТИ и ЛП.
- статья Тихомирова «The Evolution of Methods of Convex Optimization» (1996) об истории поиска полиномиального алгоритма для задачи ЛП (ЗЛП).
- книга А.А. Белых «История российских экономико-математических исследований: Первые сто лет» (2007) затрагивает историю ЛП в России.

Как видно, имеется разная литература, связанная и историей ЛП: воспоминания и автобиографические труды, обзоры достижений. Но первые, как правило, фокусируются на деятельности одного ученого, не показывая его связей с трудами других, и лишены анализа деталей, не затрагивая математический аппарат. Обзоры же часто кратки и избирательны, являясь введениями к монографиям, учебникам, переводам, сборникам, главам трудов более общего характера и статьями в энциклопедиях; их текст часто имеет описательный характер без сравнительного анализа работ разных ученых, и почти всегда игнорирует всё кроме математического аспекта: исторические, социальные, политические, экономические и личностные аспекты опускаются. Таким образом, ряд сведений содержится в разных работах, но распыленность информации, зачастую отрывочность сведений и концентрация работ на других вопросах затрудняют воссоздание целостной картины.

Резюмируя вышесказанное, становится очевидной актуальность исследования появления и развития ЛП, объединяющего анализ трудов разных авторов и изучение причин их появления, а также внутренних и внешних связей как с точки зрения математики, так и прочих аспектов. Исходя из высокой актуальности и недостаточной разработанности темы, данное исследование имеет следующие задачи.

Задачи исследования:

– анализ исследований, заложивших предпосылки и фундамент появления ЛП и выделение определяющих факторов, инициировавших развитие исследований;
– выделение основных факторов ускоренного развития области в 1930–60-е гг.; установление причин, позволивших привлечь к направлению большое внимание и добиться серьезных продвижений в теории и практике ЛП;
– выявление роли Канторовича, Данцига и некоторых других исследователей как основных разработчиков ЛП; выявление причин того, что именно они и именно в это время обратились к данной теме; выделение специфических черт деятельности каждого из них, обусловленных особенностями научного, исторического, политического, социального и экономического контекстов;
– анализ основных проблем, направлений исследований и результатов главных действующих лиц, а также реакции на эти результаты научного сообщества;
– краткая характеристика дальнейшей эволюции алгоритмов решения задач;
– анализ влияния ЛП на теоретические и прикладные разработки того времени, его связей с другими областями математики и взаимосвязей исследований

внутри области, а также зависимости этих исследований от предшествующей научной деятельности их авторов, их взглядов на развитие математики и экономики в целом и выбор тем исследований; анализ деятельности по организации исследований, внедрению результатов и преподаванию.

Научная новизна работы. Проведено систематическое исследование возникновения и развития ЛП. Проанализированы математические предпосылки – появление фундамента в виде алгебры систем линейных неравенств, геометрии выпуклых множеств и минимизации. Показано, как разные задачи способствовали зарождению и росту интереса к данной проблематике, какие были стимулы и мотивы и как различные исследования приводили к сходным результатам. Выявлены математические, социальные, политические, экономические, организационные и личностные факторы, приведшие к зарождению интереса, стимулировавшие начало исследований и способствовавшие выработке их методов и путей развития. Акцент сделан на работах в СССР и США 30–60-х гг. 20 в. Дан сравнительный анализ исследований Канторовича (СССР), с одной стороны, и Данцига, Купманса и Неймана (США), с другой. Оценен вклад и уточнена роль каждого из них в создании, развитии, продвижении и внедрении в практику ЛП. В силу достаточно большого временного и географического охвата и разностороннего изучения воздействовавших факторов дополнена картина генезиса и развития отрасли, что улучшает понимание путей развития математики и экономики.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты исследования могут быть использованы в обязательных и специальных курсах по ЛП и его истории и по истории и методологии математики, читаемых в высших учебных заведениях студентам математических и экономических специальностей, а также в дальнейших исследованиях как по общим вопросам истории математики, так и по истории ЛП и математической экономики.

Методология и методы исследования продиктованы его междисциплинарным характером. Для решения поставленных задач комбинировались методы историко-научного анализа трудов учёных в контексте современной им математики (антикваристский подход) и с позиций математики сегодняшнего дня (презентистский подход). Анализ отдельных источников, установление достоверности, полноты и информационной ценности исследуемых объектов осуществлялся с учетом основных принципов изучения и представления материалов в диссертации – историзма и научной объективности.

Положения, выносимые на защиту:

1. Общими предпосылками возникновения ЛП, его основных понятий, задач и методов их исследования в СССР и на Западе стали:

– острая необходимость и инициированный ею через соответствующие организации запрос на решение определённого круга прикладных задач;

– атмосфера перед и во время Второй мировой войны, и во время войны Холодной, оказавшая большое влияние на взгляды и приоритеты, определившие темы исследований;

– математический аппарат, созданный в работах предшественников по линейным неравенствам, выпуклым множествам и оптимизации;

– традиции и принципы Петербургской–Ленинградской математической школы, ярким представителем которой явился Канторович, для которой характерна практическая направленность исследований, базирующихся на мощном теоретическом фундаменте.

2. Причинами, приведшими Канторовича, Данцига и фон Неймана к ЛП и способствовавшими их успехам в разработке дисциплины стали:

– имевшиеся связи Канторовича и Данцига с коллегами из других ведомств;

– приобретенные в предыдущих исследованиях богатый опыт и идеи Канторовича, Данцига и фон Неймана, подсказали пути к решению задач ЛП;

– кругозор и выдающийся талант как Канторовича, так и Данцига;

– мировоззрение и опирающиеся на него приоритеты и интересы Канторовича и Данцига, определявшие их выбор тем и методов исследований;

– упорство и самоотверженность Канторовича в продвижении ЛП;

– поддержка работ Канторовича по ЛП крупнейшими советскими математиками, позволившая продолжать исследования вопреки сложной политической обстановке и противодействию со стороны влиятельных представителей экономической науки;

– способность Данцига собрать круг единомышленников, поддержавших идеи ЛП и внесших значительный вклад в его развитие и доработку.

3. Крупные достижения и быстрое развитие ЛП в 1930-60-ые гг. были обусловлены:

– тем, что ЛП дало решение важных, но мало изученных задач с неравенствами;

– интересами влиятельных правительственных и деловых кругов и организацией науки в США того времени, позволившими получить сильную финансовую и административную поддержку для развития, внедрения и продвижения методов ЛП;

– активным применением теоретических результатов в приложениях;

– вовлечением широкого круга ученых (Таккер, Кун, Гейл и др.) из других областей математики, внесших огромный вклад в развитие ЛП (например, выпуклый анализ);

– развитием вычислительной техники и разработкой соответствующих математических методов моделирования и решения прикладных задач;

– подходом фон Неймана к ЛП с позиций его исследований по теории игр;

– способностями Канторовича и Данцига как организаторов и наставников.

4. История ЛП – замечательный пример того как методы, порожденные по запросу одной науки (экономики), в рамках другой науки (математики) оказали большое влияние не только на первую (экономику), но и на последнюю (математику). Один из примеров – полное решение проблемы Г. Монжа, полученное Канторовичем на основе открытых им ранее методов ЛП.

5. В силу особенностей исторической и политической ситуации в мире в 20 в. к сходным идеям, задачам и методам приходили ученые как из разных систем и научных школ (Л.В. Канторович и Дж. Данциг), так и внутри одной страны и даже ведомства (например, исследования В. Каруша, а затем Г. Куна и А. Таккера в США и алгоритмы А.Ю. Левина и А.С. Немировскаго в СССР).

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации доложены на Годичных научных конференциях Института истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН, проходивших в 2008, 2009, 2010, 2011 гг.; на Общемосковском научно-исследовательском семинаре по истории и методологии математики и механики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в марте 2009 и 2010 гг., апреле 2011 г. и марте 2012 г.; на заседании сектора истории математики Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН 20 октября 2009 г.; на VIII Конгрессе ISAAC (Международного общества анализа, его приложений и вычислений) 22–27 августа 2011 г. в Москве.

Публикации: материалы диссертации опубликованы в 10 работах общим объемом 5,6 п.л., в том числе в четырёх статьях в изданиях из перечня ВАК, а также материалах VIII Конгресса ISAAC (Международного общества анализа, его приложений и вычислений).

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка сокращений, списка литературы, который включает 149 наименований на русском языке и 242 наименования на иностранных языках, всего 391 наименования. Объем работы без приложений составляет 181 страницу. Дополнительные материалы изложены в десяти приложениях, так что общий объем работы – 215 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во ВВЕДЕНИИ обоснована актуальность темы исследования; проанализирована степень её разработанности; определены цели и задачи, которые ставил перед собой исследователь, объект и предмет исследования, хронологические рамки; охарактеризованы использованные методы исследования; обоснована научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы; сформулированы выносимые на защиту положения.

ГЛАВА 1. Работы по ЛП, полиэдрам и линейным неравенствам связаны с предметом нашего исследования, являясь взглядами с позиций оптимизации, геометрии и алгебры. Начнем с теории систем линейных неравенств (ТСЛН). Её история фрагментирована. Она развивалась независимо в разное время и по разным причинам: в аналитической механике, теории выпуклости, контексте американской математики 1920-х гг. и во Вторую Мировую войну, когда осознали, что ТЛН – основа ТИ. Соответственно менялся круг вопросов, методы и результаты. В конце 1940-х гг. осознание связи только появившегося ЛП и ТИ породило новый интерес к ТЛН.

1.1. Фурье Жан Батист Жозеф. До Фаркаша, похоже, лишь Фурье интересовался системами линейных неравенств (СЛН), рассмотрев в 1798 г., применительно к равновесию в механике случай ограничений неравенствами.

У **Ж.Л. Лагранжа** был метод множителей Лагранжа (для задач оптимизации при ограничениях типа равенств) для изучения задач устойчивого равновесия механических систем и принцип виртуальной работы для обратимых виртуальных перемещений. В 1798 г. Фурье, обобщив последний на необратимые перемещения, представил принцип неравенств аналитической механики, рассмотрев вместо виртуальной работы момент сил. В терминах виртуальной работы, принцип Фурье утверждает, что равновесие системы эквивалентно неположительности виртуальной работы приложенных сил, что ведет к однородному линейному неравенству о виртуальных перемещениях. Также этими вопросами занимались **А.О. Курно** и **И.К.Ф. Гаусс**.

К 1824 г. Фурье имел геометрическое понимание множества решений СЛН с тремя переменными и дал алгоритм отыскания минимума одной из трех координат точки, лежащей в полиэдре. Он изучал проблему отыскания для матрицы A и вектора b минимума $\|Ax - b\|_\infty$, $\|x\|_\infty = \max \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ (до него подобную задачу исследовали **П.С. де Лаплас** и **А.М. Лежандр**). В 1827 г. он дал способ решения произвольных СЛН последовательным исключением неизвестных, называемый сейчас методом Фурье–Моцкина.

1.2. Остроградский Михаил Васильевич. В 1834 г. Остроградский вывел уравнения равновесия для систем с не обязательно обратимыми перемещениями и доказал для линейно независимых неравенств утверждение, названное позже леммой Фаркаша.

1.3. Линейные неравенства в аналитической механике: Фаркаш Джулиус. Фаркаш, начав с принципа неравенств Фурье аналитической механики, хотел, доказав возможность применения к нему метода множителей Лагранжа, прийти к вопросу решения СЛН. Так в 1895 г. впервые появилась лемма Фаркаша и началась серия статей, где фокус смещался с аналитической механики на абстрактное рассмотрение ТЛН, что завершилось в 1901 г. В 1897 г. он рассмотрел параметрический метод решения однородных СЛН, найдя общее решение в виде однородных линейных функций новых переменных. Изучая условия равновесия механических систем с ограничениями и строя теорию на базе СЛН, Фаркаш исследовал, когда линейное неравенство является следствием СЛН, и создал удобный для аналитической механики подход к решению СЛН.

1.4. Чебышёв Пафнутий Львович. Исследования, связанные с чебышёвским приближением (нахождение точки, наименее уклоняющейся по модулю от системы плоскостей), имели важное значение для появления идей, на которые опирается СМ.

1.5. Минковский Герман: теория выпуклых множеств. Минковский начал с поиска минимума положительно определенной квадратичной формы (ПОКФ). Ш. Эрмит, опираясь на свою фундаментальную теорему приведения, уже оценил минимум ПОКФ, но Минковский нашел новый подход (1887 г.) через геометрическую интерпретацию квадратичной формы (влияние К. Гаусса и И. Дирихле).

Затем Минковский переключился с ПОКФ на геометрический метод доказательства. Он ввел решетку без ПОКФ и назвал «геометрией чисел» исследование её и связанных с ней тел. Он строил метод теории чисел, опираясь на геометрическую интуицию, и, обратив внимание на специальный класс тел с центром в начале координат и нигде не вогнутой границей, доказал теорему о выпуклом теле в $\mathbb{R}^3$. Он ввёл лучевые функции как обобщения длины и соответствующие звёздные тела (на современном языке – единичный шар лучевой функции). Введя выпуклые и симметричные лучевые функции, он около 1891 г. пришёл к выпуклым телам и тому, что сейчас называется метрикой. Хотя Минковский доказал выпуклость звёздных тел, он использовал их лишь как калибровочные тела, определенные лучевой функцией.

Далее Минковский стал изучать нигде не вогнутые тела, назвал их выпуклыми, ввёл многие ныне стандартные понятия и получил ряд важных результатов. Некоторые источники представляют, что Минковский продолжал начатое Г. Брунном изучение ВМ, но Минковский работал независимо и именно он начал приведшее к современной теории систематическое изучение ВМ.

ТЛН в выпуклости. В книге «Геометрия Чисел» Минковский представил ТЛН: независимо от Фаркаша и впервые в контексте теории выпуклости, что определило её форму. Он показал существование конечного числа таких решений СЛН, что любое нетривиальное решение – их положительная линейная комбинация. К 1896 г. Минковский показал, что любой полиэдральный конус $\{x\colon Ax \leq 0\}$ конечно порожден и, если A имеет полный ранг по столбцам, то порожден лучами, каждый из которых определяется $(n - 1)$ линейно независимыми уравнениями из $Ax = 0$. Из чего он, предполагая полный ранг A по столбцам, получил лемму Фаркаша. Он знал о возможности приведения неоднородного случая к однородному и двойственности лучей и неравенств, но не дал геометрическую картину и в доказательстве игнорировал идею выпуклости.

Минковский и Фаркаш разными путями получили теоремы, эквивалентные математически (найдено общее решение СЛН, фундаментальные решения Минковского можно выделить из «однородных линейных функций» Фаркаша), но не исторически: формулировки разные из-за контекста и цели. Главный результат Фаркаша – лемма, Минковского – вскрывающие геометрическую структуру характеризация экстремальных решений и построение общего решения.

1.6. Первая теория линейных неравенств на основе теории выпуклости: Хаар. А. Хаар в 1917 г. построил ТЛН на теоремах о выпуклых телах и дал новое доказательство леммы Фаркаша для однородных и неоднородных СЛН через аналитическую геометрию и теорему **К. Каратеодори** 1911 г. о наименьшей выпуклой области, содержащей замкнутое множество.

1.7. Теория линейных неравенств в США в 1920 гг. Раньше ТСЛН была инструментом. Иначе было в США. **У. Ловитт** в 1916 г. рассмотрел задачу о голосовании и дал геометрическое решение. **Л. Дайнес** сформулировал её как СЛН, представил метод исключения, и нашёл необходимое и достаточное условие (НДУ) существования решения (на каком-то шаге метода все линейные неравенства должны быть определенного типа). В 1919 г. он включил изучение СЛН в рамки теории матриц и превратил СЛН из средства в цель: стал изучать связь матрицы СЛН и решения, строить ТСЛН подобно матричной теории систем линейных уравнений (СЛУ), ввел ряд понятий, нашел НДУ существования решения.

В. Карвер подхватил инициативу, но ввел свою терминологию, и нашел НДУ несовместимости СЛН, сделал это не конструктивно, поднял вопросы независимости системы и эквивалентности систем.

Дайнес показал эквивалентность своего результата и Карвера, указал на возможность обобщения заменой матрицы коэффициентов функцией $A(p, q)$ на множестве произвольной природы, показал двойственность СЛН и ассоциированной СЛУ, дал алгоритм определения положительных решений СЛУ для определения разрешимости соответствующей СЛН, упомянул **К.Ф. Гуммера**, который дал НДУ существования положительных решений однородной СЛУ и распространил результат на конечные СЛУ со счетным числом переменных и на непрерывно бесконечный случай.

Исследованиями в США двигало отсутствие ТСЛН. Сам сюжет не имел особой важности тогда, но Дайнеса привлекала возможность обобщений (общая тенденция тогда в США): от СЛУ к СЛН и далее с конечного на континуальное число переменных. Интерес к СЛН рос.

1.8. Фудзивара Мацусабуро. Работы американцев продолжил японец Фудзивара. Он использовал теорию выпуклости и идею центра масс, дал НДУ разрешимости и не разрешимости $Au \geq 0$ и геометрическую интерпретацию в терминах положения начала координат относительно границы наименьшего выпуклого полиэдра, содержащего m точек, являющихся линейно независимыми решениями СЛУ $A^T v = 0$. Его заслуга – переформулировка результатов в терминах ВМ.

1.9. Стокс и Шлаух. Р.В. Стокс продолжала работы Дайнеса, модифицировала теорию для работы с системами нестрогих и строгих неравенств, а также равенств; создала численный метод нахождения фундаментальных решений. Главное новшество – геометрическая интерпретация решений СЛН, сходная с Хааром. Большинство результатов получены, не обращаясь к выпуклости, и только в конце она дала НДУ решения в терминах ВМ и получила результаты сходные с Фудзивара. Х.М. Шлаух, очевидно, не зная работу Стокс, развила НДУ Дайнеса и Карвера на системы равенств и неравенств.

1.10. Моцкин и Вейль. Первое после Хаара представление ТЛН полностью через теорию выпуклости дал в 1935 г. Г. Вейль, видя теорию конечных СЛН как изучение выпуклых замыканий конечных множеств и получив главные результаты предшественников как следствия своей фундаментальной теоремы. Также он показал, что любой конечно порожденный конус является полиэдральным. В исследованиях Вейля, Минковского и Вороного определяется связь многогранников и полиэдров: то, что множество – ограниченный полиэдр эквивалентно тому, что оно – многогранник.

Т. Моцкин в 1934 г. пришёл к СЛН, изучая изменение числа перемен знаков коэффициентов многочлена при линейных преобразованиях коэффициентов. Он доказал существование базиса решений СЛН для всех комбинаций знаков системы и теорему об альтернативах, дал метод решения типа исключения (как Фурье и Дайнес), завершил становление ТСЛН внутри теории выпуклости (она положена в основу изложения; все результаты даны аналитически и геометрически).

1.11. Гордан и Штимке. Вероятно, П. Гордан первым получил (1873 г.) теорему о существовании положительных решений СЛУ, исследуя диофантову однородную СЛУ. Он не интересовался СЛН, а строил конечный базис инвариантов бинарных форм, и его теорема не показывает связи двух СЛУ с транспонированными матрицами коэффициентов (теперь ясно, что из нее можно получить теорему об альтернативах). В 1914 г. Р. Штимке получил аналогичный результат, ища критерий существования базиса бесконечных модулей.

1.12. Вороной Георгий Феодосьевич. Изучение теории чисел привело Вороного к исследованию многогранников посредством решения конечной СЛН. Кроме вывода условий Гордона полной размерности конуса (разрешимости системы строгих неравенств) и Фаркаша и Минковского конечной порожденности полиэдрального конуса, он ввёл понятие полярного конуса полиэдрального конуса и вывел ряд его свойств.

1.13. Геометрическая теория полиэдров и двойственность. Бурное продвижение геометрическая теория полиэдров получила в 19 в. у О. Коши, Я. Штейнера, Дж. Сильвестра, А. Кэли, А. Мёбиуса, Т. Кирмана, А. Пуанкаре, Л. Шлефли, П. Тета. Концепцию двойственности в геометрии развивали Ж.-В. Понселе, Ж.Д. Жергонн, Я. Штейнер, фон Штаудт, Ю. Плюккер.

ГЛАВА 2. Дан анализ ранних работ Канторовича.

2.1. Идеи Канторовича в контексте работ советских экономистов 1910–30 гг. Показан научный контекст работ Канторовича по экономике. В 1910–20 гг. уже были попытки применения методов математического и статистического анализа в экономике: труды Е.Е. Слуцкого и А.А. Конюса по моделям потребления; исследования Г.А. Фельдмана по моделям роста; труды Н.Д. Кондратьева по «длинным циклам»; выполненные в ЦСУ СССР работы по шахматному балансовому анализу экономики; работы Л.П. Юшкова, где выдвинута идея сформулировать оптимальные подходы к понятию норматива эффективности, получившая плодотворное развитие у В.В. Новожилова. Анализируются методы исследований Слуцкого, Новожилова, Леонтьева.

2.2. О математическом творчестве Канторовича с конца 1920-х гг. Раздел посвящен математическому творчеству Канторовича: анализируется его вклад в развитие дескриптивной теории функций, функций над множествами, аналитических и проективных множеств; приводятся основные его исследования по конструктивной теории функций и приближённым методам анализа.

Рассмотрены его работы по функциональному анализу – обобщенным функциям и полуупорядоченным пространствам – где он стал одним из крупнейших в мире авторитетов.

Показано, как его исследования по функциональному анализу после войны развились в такие новые подобласти, как «доказательные вычисления» (методы, которые, исходя из разрешимости приближенного уравнения, отвечают на вопрос о существовании точного решения исходной задачи и позволяют определить область, где оно лежит) и *K*-пространства.

2.3. О начале творчества Канторовича в области экономики. Атмосфера приближения войны и интерес к экономике привели Канторовича в 1938 г. к исследованиям вопросов линейной оптимизации. Толчком послужила прикладная задача фанерного треста.

Канторович обобщил на другие экономические проблемы свой метод разрешающих множителей максимизации функции при ограничениях в форме неравенств. Огромное значение имели алгоритмичность метода и осознанное автором экономическое значение разрешающих множителей. В знаменитой работе «Математические методы организации и планирования производства» 1939 г. приведены основные типы сформулированных и решенных им задач ЛП и их важнейшие применения. Идеи указанной работы – предтече концепции двойственности в ЛП, оформившейся позднее у Данцига и фон Неймана.

Математическая ценность этой первой публикации по ЛП – в выходящем за рамки классического математического анализа методе, описании его применения на основных экономических примерах, постановке основных задач ЛП. Позже метод был развит на экстремальные задачи с ограничениями в функциональных пространствах как в линейном, так и нелинейном случаях.

Проанализировано, почему Канторович шёл по пути метода разрешающих множителей, а не СМ, хотя последний кажется геометрически проще.

2.4. Экономические исследования Канторовича довоенных лет. Показано, как из работы 1939 г. вытекают исследования математических методов экономики, появляется наиболее общая математическая трактовка предложенного Канторовичем вариационного принципа и метода разрешающих множителей, общая формулировка условий экстремума при наличии ограничений в бесконечномерном пространстве, а также постановка и решение транспортной задачи (ТЗ) и её бесконечномерного аналога.

2.5. Исследования Канторовича довоенных лет и современная наука. Показано, как от классической постановки задач на условный экстремум с ограничениями типа равенств и объектами, удовлетворяющими условиям гладкости, наметился переход к рассмотрению выпуклых задач с системой неравенств: изучение собственно СЛН (см. Гл. 1); далее – исследования Чикагской школы – Г. Блисс, О. Больца, Е. Макшейн, Л.М. Грейвс, М.Р. Хестенс и др.; исследования Ф. Валентайна 1937 г. по условиям экстремума для задач вариационного исчисления при наличии разного рода ограничений типа неравенств; работы Каруша и Ф. Джона (см. Гл. 5). В СССР пионером был Канторович: 1939 г. – работа о минимизации линейной функции на множестве, задаваемом линейными ограничениями типа равенств и неравенств; 1940 г. – общая формулировка условий экстремума в бесконечномерном пространстве. В США к этим вопросам пришли лишь в конце 1940-х гг. (Данциг и, частично, фон Нейман, а позднее – Гейл, Кун, Таккер).

Данные задачи родственны задачам оптимального управления (Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский и Р.В. Гамкрелидзе сформулировали и доказали необходимые условия оптимальности в форме так называемого принципа максимума). Сходными вопросами занимался Р. Беллман. А.Я. Дубовицкий и А.А. Милютин, Б.Н. Пшеничный, Л. Нейштадт, Г. Халкин, Дж. Варга предложили общие схемы получения условий экстремума для абстрактных задач оптимизации с ограничениями. Р. Рокафеллар предал завершенную форму выпуклому анализу.

Канторович нашел единый подход к очень широкому классу задач математической экономики, базирующийся на идеях функционального анализа и вскрывающий идейную суть вопроса. Это дало и базу численным методам. Оказалось, для дискретных экономических проблем эффективнее использовать родственные непрерывные модели. Например, модель развития (роста) при техническом прогрессе с вмененными основными фондами (Р. Солоу, Л.В. Канторович) описывается хорошо поддающимся теоретическому анализу и практическому расчету функциональным уравнением. Канторович разработал общую теорию методов приближенных вычислений (и показал различные применение функционального анализа к изучению проблем вычислительной математики), основываясь на следующей идее: пространство исходного уравнения отображают на более простое пространство, где исследуют приближенное уравнение. Он доказал теоремы для: установления разрешимости приближенного уравнения и сходимости приближенного решения к точному решению в зависимости от свойств исходного уравнения; получения на основе разрешимости приближенного уравнения существования точного решения исходной задачи и определения области его расположения. Канторович создал теорию *K*-пространств (применительно к экономике этот подход оказался полезен при агрегировании экономических систем – возможность понижения размерности и исследования близости приближенного решения к искомому).

Канторович решил общую ТЗ и нашёл более полное решение проблемы Монжа (на базе ЛП). Так методы, рожденные для экономики, дали толчок и новые подходы в чистой математике.

2.6. Результаты работ довоенных лет с современной точки зрения. Показано, что Канторович успел и не успел сделать в довоенный период, и как это соотносится с более поздними результатами Запада. Так задача Канторовича ***C*** при исключении особых случаев эквивалентна основной ЗЛП. Ее можно также сформулировать так: задано выпуклое многогранное множество *M* и направленная прямая (ось) *B*. Тогда прямая задача – найти точку из *M*, лежащую на *B* как можно выше, двойственная задача – найти гиперплоскость, пересекающую *B* как можно ниже и разделяющую *M* и положительную часть *B*.

Канторович дал НДУ оптимальности решения – его характеристику через двойственные переменные (разрешающие множители) – и итеративные алгоритмы решения (методы разрешающих множителей), равные по широте применимости и эффективности разработанным позже (СМ Данцига).

Для ТЗ Канторович создал метод потенциалов (примененный позже как метод последовательного улучшения плана к другим проблемам; метод наиболее близок модифицированному СМ), а также критерий оптимальности решения, поставил и решил бесконечномерные обобщения ТЗ.

ГЛАВА 3. Проанализированы исследования Канторовича по математической экономике 1940–50 гг.

3.1. Применение линейного программирования к частным задачам. Проанализированы работы прикладного характера:
- по раскрою (особо рассмотрена совместная с В.А. Залгаллером книга «Расчет рационального раскроя промышленных материалов»);
- по ТЗ (уделено внимание тому, как Запад узнал о них, и вопросу приоритета);
- работа, разъясняющая связи ЛП с оптимальным решением задач оперативно-производственного планирования.

3.2. Методы и их применение к общим и теоретическим проблемам. Показано присущее творчеству Канторовича взаимопроникновение прикладных и теоретических исследований (в том числе – и в экономико-математической тематике). Рассмотрены работы, обобщающие предыдущие с математической и экономической точки зрения. Особое внимание уделено знаменитой книге «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов», содержащей анализ разработанных экономических приложений ЛП и наиболее полное изложение математической теории и вычислительных методов, сочетая прикладные и теоретические аспекты и подытоживая предыдущие исследования.

3.3. Признание вклада Канторовича в экономическую науку. Показаны борьба Канторовича за продвижение собственных результатов и история его признание в СССР и Мире (в том числе история получения Нобелевской и Ленинской премий). Несмотря на противоборство ортодоксов от науки заслуги Канторовича были постепенно признаны во всех областях: 1948 г. – сталинская премия за работы по функциональному анализу, 1964 г. – избрание действительным членом Академии наук по Отделению математики, 1965 г. – Ленинская премия за работы экономической тематики, 1975 г.– Нобелевская премия совместно с Купмансом «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». О признания роли и приоритета Канторовича в развитии ЛП говорят многочисленные почетные степени и звания в наиболее уважаемых организациях всего Мира.

3.4. Решение проблемы Монжа на основе линейного программирования. Бесконечномерный аналог практических задач подключения пунктов производства товара, расположенных на железнодорожной сети, к местам потребления так, чтобы обеспечить минимальные общие затраты на их транспортировку (ТЗ) изучен впервые в 1942 г. Канторовичем и затем получил обобщение, рассматривающее общую проблему оптимального перемещения массы на произвольном метрическом компакте *K* с метрикой, характеризующей затраты на перемещение массы. Доказанная Канторовичем теорема характеризует минимальное перемещение с помощью свойства существования для него особого потенциала: чтобы перемещение было минимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было потенциально. Позже он заметил важный частный случай – гораздо раньше исследованную Монжем задачу.

Здесь наблюдается очень интересное явление, когда метод, разработанный для конкретной практической задачи, оказался применим намного шире и повлиял на чистую математику, дав совершенно новый, более общий и более простой способ решения классических задач, поставленных столетиями ранее. Речь идет о полном решении проблемы Монжа, имеющей более чем 200-летнюю историю. Задача имела решение, но чрезвычайно сложное. ЛП же дало доказательство гипотезы (причём для более широкого класса задач перемещения масс) в виде простого следствия признака оптимальности перемещения. Задача в терминах непрерывных распределений масс стала называться задачей Монжа–Канторовича.

3.5. Вклад Канторовича в экономическую науку. Вклад Канторовича в возрождение экономической науки СССР и школы математической экономики сложно переоценить, как и значение его открытий для социалистической экономики и их место в истории экономической мысли. У марксистской экономической теории был ряд проблем, наибольшая из которых – обхождение стороной изучения связи цен и количеств. Плановая экономика, зиждясь на идее оптимального распределения, не имела теории для ее реализации, для определения производственных издержек и цен, и вычисления эффективности. Канторович, создав и применив ЛП к общей экономической проблеме, одним махом получил основные достижения Западной теории производства, дал теорию стоимости и распределения ресурсов общества, показал путь решения ряда традиционных в СССР проблем (нерационального использования ресурсов, выпуска ненужных продуктов). Исследовав динамические модели, он получил аналог процентной ставки и пришел к нормальной эффективности капиталовложений. В этом же разделе обсужден вопрос декомпозиции и ряда обобщений. Подводя итог, можно сказать, что Канторович дал аналог капиталистического ранка социалистической экономике (где конкурируют не агенты и товары, а планы при расчетах, что позволяет избежать потерь), позволяющий оптимально применять ресурсы.

3.6. Организационная и преподавательская деятельность Канторовича. Описана преподавательская деятельность, участие Канторовича в открытии специальностей (вычислительной математики, экономической кибернетики в ЛГУ и НГУ, «шестого курса»), проведении конференций и внедрении полученных результатов, занимаемые государственные посты и международные звания, награды и признание.

3.7. Наследие Канторовича. Подведен итог жизни великого ученого, наставника, гражданина и просто человека. Он был одновременно математиком и экономистом с мировым именем, создав в математике сильнейшую школу функционального анализа и принципиально новое направление (теорию полуупорядоченных пространств), а в экономике – абсолютно новую область ЛП. Его наследие – школы в математике и экономике – не только научные труды, но и люди: множество прямых учеников и огромное число людей, которых вдохновила и направила его деятельность, для кого он был образцом человека и учёного.

ГЛАВА 4 посвящена Данцигу. Прослежено его участие в гражданских, военных и академических исследованиях, влияние на науку, промышленность, образование и пр., ставшие воплощением идеи: реальные задачи – источник развития математики не ради её самой, а для практики; нужен конструктивный, лучше алгоритмический, подход.

4.1. Путь к симплекс-методу. Биография описана на основе воспоминаний его самого и его соратников. Выделены основные решения Данцига, оказавшие кардинальное воздействие на его научную деятельность и приведшие к открытию ЛП и СМ.

4.2. Линейное программирование и симплекс-метод Данцига. Несмотря на большое количество предшественников (Л.В. Канторович, Т. Купманс, Ф. Хичкок, Дж. фон Нейман и ученые, представленные в Гл. 1), вдохновили Данцига не они (о них он тогда не знал), а работа Леонтьева, давшего количественную эмпирическую модель и проявившего необходимый для успешных приложений организационный талант (сбор данных, решение модели, применение результатов).

Проанализировано, как Данциг пришел к ЛП и СМ в результате создания линейной модели, отражающей доступные запасы и необходимый выпуск в течение многопериодного временного промежутка, и введения целевой функции.

Продемонстрировано влияние историко-политического контекста (Холодной войной, начала Компьютерного века), организации науки в США того времени (военно-университетский комплекс) и взаимодействия ЛП, ТИ, теории выпуклости, ТЛН и двойственности.

Показана важность взаимодействия Данцига с Купмансом, фон Нейманом, Таккером, Куном, Гейлом и др.

Данциг сыграл огромную роль в популяризации ЛП и СМ.

4.3. Методы решения крупномасштабных линейных программ. В 1952–60 гг. Данциг работал в корпорации RAND и написал множество статей и заметок по ТИ, ЛП и вариантам СМ, крупномасштабному ЛП, ЛП в условиях неопределенности, сетевой оптимизации (включая задачу коммивояжера), целочисленному ЛП и приложениям. Задачи, ради которых создавались ЛП и СМ, имели огромный масштаб, поэтому крупномасштабное ЛП было всегда в центре внимания Данцига. Он разрабатывал разновидности СМ, которым достаточно для итераций базиса значительно уменьшенного размера. Первым испытанием СМ на «крупномасштабной» задаче стала диета Штиглера: верхние ограничения продуктов сильно увеличили общее число ограничений. Потребность в эффективной при верхних ограничениях модификации СМ опять всплыла при приоритезации проектов в RAND. Затем, решая ТЗ и некоторые сетевые задачи, Данциг понял, что СМ очень эффективен при строго- или блочно-треугольной структуре базиса и стал искать способы использовать это.

В 1954 г. Данциг в соавторстве решил большую (для того дня) задачу коммивояжёра, что оказало большое воздействие на развитие целочисленного программирования. Работы Данцига и соавторов, основанные на потоке в сети, сыграли значительную роль в развитии комбинаторной оптимизации.

Данциг часто называл стохастическое программирование «настоящей проблемой»: большинство важных задач принятия решений осуществляются в условиях неопределённости. Он всерьёз взялся за это в середине 1950-х гг. В данной диссертации описана введённая Данцигом фундаментальная модель, возникающие трудности и предложенные Данцигом решения. В связи с этим обсуждается метод декомпозиции.

4.4. Организаторская, преподавательская и издательская деятельность. Вклад Данцига не сводится к множеству публикаций: он всегда активно поддерживал студентов, коллег, и всех интересующихся областью; его чрезвычайно интересовали модели для решения важнейших вопросов общества, например, проект «PILOT»; Данциг активно участвовал в деятельности Международного института прикладного системного анализа, ведущего междисциплинарные исследования экологических, экономических, технологических и социальных аспектов глобальных изменений.

К 1960 г. исследование операций (ИО) стало отдельной (междисциплинарной) областью, а математическое программирование сыграло важную роль в формировании профессиональных организаций ИО по всему миру. Учреждались соответствующие журналы. Данциг был в редакторских коллегиях 22 журналов, активно участвовал в основании Центра ИО Беркли по обучению и исследованиям в области ИО, был президентом Института научных методов управления, учредил и возглавил лабораторию оптимизации систем (скопированную позже рядом других учреждений), руководил летними семинарами, конференциями и пр. Скоро преподавание ИО и ЛП стало быстро расти. Данциг активно содействовал развитию этих программ, активно работал с молодыми специалистами (Р. Коттл, Г. Инфангер, М. Тхапа и др.) и выпустил более 50 докторантов.

4.5. Наследие Данцига. Впервые на Западе показав, что задачи с СЛН можно успешно решать, Данциг (с его СМ) совершил переворот и создал новую парадигму. Именно с ним ЛП получило широкое признание. Огромной популярности СМ способствовала прозрачная геометрическая иллюстрация: СМ – удобный алгоритм направленного перехода по вершинам полиэдрального множества допустимых решений ЗЛП к решению.

Запад принял ЛП куда теплее, чем СССР. Прикладники поняли потенциал ЛП, поскольку теперь был эффективный метод решения. Также радужно ЛП встретили теоретики экономисты, назвав ЛП одним из важнейших послевоенных результатов экономики и связав его с ТИ, традиционной теорией стоимости, экономикой благосостояния и равновесием Вальраса. Все эти успехи стимулировали развитие компьютеров.

Перемены в теоретической математике также были значительны: вместо классического подхода с функциями и отображениями на открытых множествах и дифференцируемых многообразиях, возникла новая парадигма для работы с не обязательно дифференцируемыми или даже непрерывными функциями на замкнутых множествах и многообразиях. Для исследования особых точек появились субпроизводные, в теории приближений получили распространение равномерные приближения, теория целочисленных функционалов также получила новую базу, а многие старые задачи – значительное продвижение, оживилась теория выпуклых множеств.

Хотя Данциг наиболее известен как создатель ЛП и СМ, он был многогранным исследователем, организатором и преподавателем, оказал огромное влияние на военное и индустриальное планирование и производство, экономику, математику, ИО, вычислительные машины, прикладную науку и технологии, и рост соответствующих образовательных программ. Далее описаны эти его влияния и признание его заслуг.

ГЛАВА 5.

5.1. Обзор развития линейного программирования с точки зрения математики. Подведен промежуточный итог, позволяющий увидеть общую картину развития ЛП. Дан взгляд на ЗЛП через теорию экстремума, СЛН, геометрию полиэдров. Представлены связи ЛП с родственными областями: СЛН, теорией ВМ, началами теории выпуклых функций, экстремальными задачами и принципом Лагранжа, двойственностью.

ЗЛП принадлежит классу экстремальных задач, изучаемых математическим анализом, и одновременно классу выпуклых задач, изучаемых выпуклым анализом. Последний стал самостоятельной областью в XX в. и относится как к геометрии (выпуклость), так и к анализу (ТСЛН).

Сквозная идея теории выпуклости – двойственность (все выпуклые замкнутые объекты имеют два описания – в основном и двойственном пространствах). Основные авторы: Минковский и фон Нейман, а также (в геометрии и бесконечномерном анализе) Кэли, Плюккерер, Банах, Шварц, Гротендик и др. Выпуклый анализ исследует ВМ, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи (например, ЗЛП).

Показана важность для ЛП теорем, описывающих СЛН, среди которых центральное место занимают теоремы Фаркаша-Минковского о зависимых неравенствах, двойственного представления многогранников и условия ограниченности многогранника.

Показаны проявления двойственности (для конусов, многогранников, полиэдров, замкнутых выпуклых функций) и роль неравенств в теории выпуклости, принцип Лагранжа для экстремальных задач и взгляд на ЛП как подкласс экстремальных задач (с точки зрения проблем существования, НДУ экстремума и алгоритмов его поиска).

5.2. Фон Нейман, теория игр и ее связи с линейным программированием. Приведены исследования связи ЛП с ТИ, главные моменты развития последней и эволюции теоремы о минимаксе.

Проанализирован вклад фон Неймана, Данцига, Гейла, Куна и Таккера в изучение минимакса матриц и его связи с двойственностью ЛП, дан анализ путей развития ТИ и ЛП, раскрыта связь между ними.

5.3. Теорема Каруша–Куна–Таккера и нелинейное программирование. При исследовании ЗЛП появлялись новые подходы, формируя целостную картину. Один из них – через выпуклый анализ, который в удобной форме формулирует задачу и признаки оптимальности решения, раскрывая связи с двойственной задачей (важно для понимания и экономической интерпретации).

Кун и Таккер в 1950 г. представили работу «Nonlinear Programming» с необходимыми условиями оптимальности. Создание нелинейного программирования отличалось от ЛП ролью военно-университетского комплекса и подогретого теоремой двойственности ЛП интереса академической науки. Подобные результаты ранее получены Карушем в неопубликованной магистерской диссертации 1939 г. и Джоном (опубликованы, но не с первого раза) в 1948 г., но стали известны лишь после работы Куна и Таккера. В данном пункте дан анализ этих результатов и причины разной реакции научного сообщества. Проведены параллели с работами по ВМ Минковского и Брунна.

5.4. Основные алгоритмы линейного программирования. Дан анализ вклада учёных СССР (А.Ю. Левина, Л.Г. Хачияна, Д.Б. Юдина, А.С. Немировского, Ю.Е. Нестерова, Л.А. Левина) и США (Н. Кармаркара, С. Кука, Р.М. Карпа, В. Кли, Г. Минти) в развитие ЛП и теоретического и практического решения его вопросов через алгоритмы. Рассмотрены наиболее важные исторически алгоритмы, разработанные для ЗЛП, но оказавшие значительное влияние на развитие математики в целом. Показано их принятие общественностью.

В **ЗАКЛЮЧЕНИИ** подводятся итоги проведенного исследования и приводятся полученные выводы.

ПРИЛОЖЕНИЯ содержат дополнительные материалы.

Приложение 1 – список имен, встречающихся в тексте.

Приложение 2 – некоторые математические сведения необходимые для понимания основного текста.

Приложение 3 – комментарий о задаче минимума ПОКФ.

Приложение 4 – формулировка теоремы Каруша–Куна–Таккера.

Приложение 5 – краткий очерк двойственности в выпуклом программировании.

Приложение 6 – подход к ЗЛП через выпуклый анализ.

Приложение 7 – принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств.

Приложение 8 о развитии некоторых идей из знаменитой работы Хачияна.

Приложение 9 дает экономическую интерпретацию общей ЗЛП через прямую (распределительную) и двойственную (экономическую) задачи и рассматривает модели, связанные с классическими уравнениями Вальраса и их обобщениями, а также модель роста фон Неймана. Приводится краткий очерк на тему ТЗ в работах Канторовича, Хитчкока и Купманса.

Приложении 10 – интервью, взятое автором у академика А.Г. Аганбегяна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации проведён анализ и на его основе получена более целостная картина зарождения и раннего развития ЛП, включая формирование его фундамента, его предпосылки, истоки, работы основных авторов (лидеру этого направления – Канторовичу и создателям этой области на Западе – Данцигу и Купмансу, а также сыгравшему огромную роль фон Нейману), их взаимосвязи,

связи с предшествующими трудами и исследованиями в смежных областях. Исследование дополнено рассмотрением наиболее важных исторически алгоритмов, разработанных для ЗЛП, но оказавших значительное влияние также и на развитие математики в целом. Прослежены взаимовлияния математических идей, эволюция интереса к ЛП его авторов и исследован процесс, когда к похожему по существу открытию подходят с разных сторон (оптимизация, геометрия и алгебра), в разных социально-экономических системах (Канторович и Данциг) и в разное время (Каруш, Джон, Кун и Таккер), а также влияние ЛП на экономику, математику, промышленность и пр. (например, вычислительные системы).

Проведено обобщение историко-научного материала (в ходе исследования было изучено более 300 работ по ЛП, его истории и связанным областям), который был погружен в историко-математический контекст с учетом особенностей политической, социальной и экономической обстановки. Данная диссертация и опубликованные в ходе ее подготовки работы в силу комплексного подхода призваны заполнить пробелы и улучшить воссоздание целостной картины развития ЛП и реакции на него научного сообщества. Задачи, поставленные в начале исследования, выполнены, цель достигнута.

Для дальнейших исследований наиболее интересно сопоставление эффективности и практической значимости методов, предлагавшихся в различные временные периоды в трудах разных ученых. Конкурирующие подходы и идеи развивались разными темпами: появлялись и становились популярны, затем исследования затихали, а потом начинались с новой силой (например, методы внутренней точки). На это также влияло развитие вычислительной техники, размер и специфика задач (что наблюдается при сравнении методов внутренней точки с их конкурентами, идущими к оптимальному решению по границе допустимого множества). Также часто важны асимптотические оценки (иногда наихудшего случая, иногда среднего в смысле какого-то распределения).

Другим важным продолжением данного исследования может стать расширение хронологических рамок, в особенности в сторону рассмотрения более поздних работ.

Результаты исследования опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Андрианов А.Л. Л.В. Канторович как создатель линейного программирования / А.Л. Андрианов // Вопросы истории естествознания и техники. – М., 2009. – №4. – С. 77–89.
2. Андрианов А.Л. Дж.Б. Данциг и линейное программирование / А.Л. Андрианов // Казанская наука. – Казань: Изд-во Казанский Издательский Дом, 2014. – №8. – С. 19–23.

3. Андрианов А.Л. Краткий очерк эволюции ранних методов линейного программирования / А.Л. Андрианов // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер. «Естественные и Технические науки». – М., 2017. – №1. – С. 23–28.
4. Андрианов А.Л. Становление и начальные этапы развития методов линейного программирования / А.Л. Андрианов // Вопросы истории естествознания и техники. – М., 2017. – Т. 38, №2. – С. 351–361.

и в других изданиях:

5. Андрианов А.Л. Рождение линейного программирования / А.Л. Андрианов // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2008. – М.: ИДЭЛ, 2009. – С. 260–262.
6. Андрианов А.Л. Развитие линейного программирования в ранних работах Л.В. Канторовича / А.Л. Андрианов // Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 13 (48). – М.: Янус-К, 2009. – С. 323–339.
7. Андрианов А.Л. Линейное программирование в работах Л.В. Канторовича 1930–1950-х гг. / А.Л. Андрианов // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2009. – М.: Анонс Медиа, 2009. – С. 323–325.
8. Андрианов А.Л. Джордж Б. Данциг и история линейного программирования (ЛП) в США / А.Л. Андрианов // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2011. – М.: Янус-К, 2011. – С. 315–318.
9. Andrianov, A. The full Monge problem solution based on the linear programming (LP) / A. Andrianov // Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation (22–27 August 2011) Vol. 3. – M.: Peoples' Friendship University of Russia, 2012. – P. 94–101.
10. Андрианов А.Л. Развитие линейного программирования в работах Л.В. Канторовича 1930–50-х гг. / А.Л. Андрианов // Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 15 (50). – М., Янус-К, 2014. – С. 25–40.