ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ
им. С.И. Вавилова РАН

На правах рукописи

Андрианов Александр Львович

ЗАРОЖДЕНИЕ И РАННЯЯ ИСТОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Специальность 07.00.10 – История науки и техники

диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: **доктор физико-математических наук**
Демидов Сергей Сергеевич

Москва – 2018

Оглавление

Введение

Объект исследования данной диссертации – возникновение и раннее развитие линейного программирования (ЛП).

Предмет диссертационного исследования – истоки ЛП, его зарождение и становление в 1930–60-е гг. и влияния этого процесса на теоретические и прикладные разработки того времени в СССР и США. Главное внимание уделено первооткрывателю ЛП Л.В. Канторовичу и основателю ЛП на Западе Дж. Данцигу; их роли организаторов и преподавателей; борьбе Канторовича по продвижению ЛП; связи Данцига с другими значительно повлиявшими на ЛП учеными (Т. Купмансом, Дж. фон Нейманом и пр.).

Цель диссертации – анализ заложивших предпосылки ЛП исследований и выделение определяющих факторов зарождения и раннего развития ЛП и примыкающих направлений в Мире в период с конца 18 в. до конца 1960-х гг.; обобщение историко-научного материала для воссоздания целостной картины развития области и реакции на неё научного сообщества.

Актуальность темы исследования. Зарождение и развитие новых областей представляет собой одну из важнейших и интереснейших проблем истории математики. ЛП стало принципиально новой областью, получившей широкое применение и оказавшей огромное влияние на развитие экономики и самой математики. Однако историко-математическое осмысление этого феномена несмотря на его важность, достаточное количество накопленной информации и относительную свежесть, но зрелость результатов по существу только началось. Предпосылки возникновения ЛП в разных странах и школах, влияние научной, исторической, политической, социальной и экономической среды недостаточно изучены. Существуют обширные источники по исследуемому вопросу, однако, в большинстве из них не стали объектом исторического анализа взаимосвязи исследований отдельных учёных в разных направлениях, связи их работ с работами коллег по близкой тематике и работами в других областях математики. Это приводит к недостаточно объективной оценке вклада отдельных учёных, отсутствию понимания их идейного взаимовлияния, и не позволяет воссоздать адекватную картину исторического процесса развития ЛП. Значимость ЛП для математической экономики, теории игр (ТИ) и некоторых других областей математики и отсутствие систематического анализа процессов его возникновения и развития определяют актуальность темы исследования.

Степень разработанности темы. Определим, что требуется для раскрытия темы диссертации и воссоздания целостной картины развития области. Открытие и развитие ЛП связывают с Канторовичем, Купмансом и Данцигом, но они опирались на определенный фундамент и важно понимать, как он был заложен в работах о выпуклых множествах (ВМ), линейных неравенствах (ЛН), оптимизации и ТИ. Прорыв же в ЛП сделали именно трое этих ученых и фон Нейман. Поэтому их деятельность надо рассмотреть особо, причем и по ЛП, и более раннюю, определившую подход к ЛП и связи с коллегами (последние инициировали исследования и часто помогали поиску решения, развитию и продвижению ЛП в науке и промышленности). Рассмотрим разработанность темы с точки зрения отражения этих моментов.

Сборник [38] (ответственные редакторы С.С. Кутателадзе, И.В. Романовский) включает 17 основных трудов Канторовича экономикой тематики 1938–60 гг., комментарии, описания его деятельности и две статьи, показывающие восприятие Западом его открытий. Издание показывает приоритет СССР (Канторовича) в развитии методов оптимизации в экономике и даёт доступ к работам, некоторые из которых сложно найти, дополняя двухтомник избранных математических работ Канторовича [280] (редактор С.С. Кутателадзе), [281] (редакторы С.С. Кутателадзе, И.В. Романовский).

Книга А.А. Белых [12], описывая историю математической экономики в России, затрагивает ЛП и, соответственно, деятельность Канторовича.

Двухтомник «Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый» (редакторы-составители В.Л. Канторович, С.С. Кутателадзе, Я.И. Фет) описывает жизнь, труды, личность, научные интересы и достижения учёного, трудности борьбы с невежеством и политическими предрассудками, которые слабо освещены в имеющейся литературе. Книга основана на архивных материалах, малоизвестных трудах, интервью, воспоминаниях и написанных специально для неё статьях. Выделим: интервью «Об истории линейного программирования», данное ученым С. Брентьес; предполагавшийся доклад Канторовича «Мой путь в науке»; текст [69] об этических вопросах, роли ученого при принятии экономических решений и взаимодействии с политиками и обществом; статью А.М. Вершика «О Л.В. Канторовиче и о линейном программировании» об открытии ЛП, Канторовиче как наставнике и организаторе, и связи математической экономики с остальной математикой; Нобелевскую речь Канторовича. Книга показывает, насколько активно, несмотря на всё он продвигал и внедрял ЛП, и даёт представление, в какой атмосфере приходилось работать и как шло признание его приоритета в Мире. Но книга ориентирована на широкий круг читателей и обходит математическую сторону вопросов. Также она, естественно, сконцентрирована на личности Канторовича.

А.Г. Кусраев, С.С. Кутателадзе, В.Л. Макаров, И.В. Романовский. Г.Ш. Рубинштейн написали ряд статей о математике и экономике Канторовича ([94], [98], [99], [100], [102], [103], [104]), а также о работах Канторовича во вступительных статьях в библиографических указателях [85].

К работам о Данциге, дающим представление больше о его личности, нежели о его научной деятельности, можно отнести статью [336]. Работа [21] ([195]) о появлении ЛП, открытии симплекс-метода (СМ) и дальнейшем развитии данных вопросов в США хотя не содержит формул дает представление о связях основных исследований в США (Е. Неймана, В. Леонтьева, Дж. фон Неймана, Т. Купманса, А. Таккера, Г. Куна и Д. Гейла).

Статья [176] удачно объединяет описание жизни, творческих принципов Данцига с анализом его научных достижений, их связей с деятельностью коллег, и их общении; приведенные математические формулировки и выкладки дают представление о задействованном математическом аппарате.

Статья Гейла [254] концентрируется на ЛП и СМ, но, в отличие от [176], делает упор на математическую сторону вопроса.

Данциг в [186] дал исторический рассказ об истоках и влияниях ЛП и СМ, а позже написал много заказных статей на эту тему ([183], [185], [189], [193], [194], [195]; [21]), в основном автобиографических. С математической точки зрения, отметим [189], подробно затрагивающую связь его докторской диссертации и ЛП.

Р. Дорфман в статье об открытии ЛП [227] проясняет вклад главных действующих лиц и во вступлении замечает, что «... это не такая особенно запутанная история..., но она также и не полностью простая»: многие элементы ЛП уже существовали до Данцига.

Книга Р. Дорфмана, П. Самуэльсона и Р. Солоу [228] раскрывает связи ЛП и стандартного экономического анализа, подчеркивает взаимосвязь ЛП с ТИ, с экономикой благосостояния и с равновесием Вальраса и провозглашает в предисловии, что ЛП «...было одним из наиболее важных послевоенных результатов в экономической теории».

К. Эрроу в [157] показывает роль Данцига в развитии экономического анализа.

А. Прекопа в [349] рассматривает связь механики с ранней историей теории линейных неравенств (ТЛН), касается ЛП и нелинейного программирования (НЛП).

В книге Ж.П. Обена [121] дана краткая история использования математики в экономике и описываются основные экономические модели (Вальраса, фон Неймана).

В книге Б. Поляка [122] дан краткий обзор интересующей нас темы, обширная библиография и упомянуты главные советские и зарубежные исследователи ЛП.

В статье В.Б. Демидовича, А.В. Дорофеевой и В.М. Тихомирова [25] представлена общая концепция развития методов оптимизации по пути обобщения понимания метода множителей Лагранжа (ММЛ).

А. Схрейвера в [132] рассмотрел новые на тот момент алгоритмы целочисленного программирования и ЛП, привёл исторические справки и обширную библиографию.

В предисловии к русскому изданию сборника статей под редакцией Куна и Таккера [113], объединенных темой теории систем линейных неравенств (ТСЛН) в приложении к экономике, отмечен вклад советских ученых в ЛП. В добавлении приводится статья Г.Ш. Рубинштейна [129] о работах ученых СССР по ЛП, где дано сравнение некоторых методов, рассмотрены приложения ЛП (включая транспортная задачу (ТЗ)), перечислены зарубежные исследователи ЛП. В сборник включена книга С. Вайда «Теория игр и линейное программирование», которая посвящена связи ТИ и ЛП и дает их краткий очерк, приводя основные понятия и результаты ТИ и графические модели.

Интересное описание истории поиска полиномиального алгоритма для задачи ЛП (ЗЛП) дано в статье В.М. Тихомирова [374].

Чрезвычайно интересна серия статей Т. Кжелдсон по истории ЛП, ТИ, выпуклого анализа (ВА) и НЛП ([296], [298], [299], [302]).

Как видно, имеется разная литература, связанная и историей ЛП: воспоминания и автобиографические труды (появлялись по инициативе авторов, на заказ, а также как речи, вступления и статьи к разным мероприятиям, связанным с ЛП, СМ и юбилеями авторов, причастных к их исследованиям), а также обзоры основных достижений ЛП.

Но первые, как правило, фокусируются на деятельности одного ученого, не показывая его связей с трудами других, и лишены анализа деталей, не затрагивая математический аппарат.

Обзоры же часто имеют краткий и избирательный характер, являясь введениями к монографиям, учебникам, переводам, сборникам, главам трудов более общего характера (например, по разным методам оптимизации, а не только ЛП) и статьями в энциклопедиях. Текст таких обзоров часто носит описательный характер без сравнительного анализа работ разных ученых и почти всегда игнорирует всё кроме математического аспекта: исторические, социальные, политические, экономические и личностные аспекты рассматриваются поверхностно или вообще опускаются.

Таким образом, ряд сведений содержится в близких к данной диссертации работах, но распыленность информации по отдельным работам и зачастую отрывочность сведений и концентрация работ на других вопросах затрудняют воссоздание целостной картины. Резюмируя вышесказанное, становится очевидной актуальность исследования появления и развития ЛП, объединяющего анализ трудов разных авторов и изучение причин их появления, а также внутренних и внешних связей как с точки зрения математики, так и прочих аспектов. Исходя из высокой актуальности и недостаточной разработанности темы, данное исследование имеет следующие задачи.

Задачи исследования:

– анализ исследований, заложивших предпосылки и фундамент появления ЛП и выделение определяющих факторов, инициировавших развитие исследований;

– выделение основных факторов ускоренного развития области в 1930–60-е гг.; установление причин, позволивших привлечь к направлению большое внимание и добиться серьезных продвижений в теории и практике ЛП;

– выявление роли Канторовича, Данцига и некоторых других исследователей как основных разработчиков ЛП; выявление причин того, что именно они и именно в это время обратились к данной теме; выделение специфических черт деятельности каждого из них, обусловленных особенностями научного, исторического, политического, социального и экономического контекстов;

– анализ основных проблем, направлений исследований и результатов главных действующих лиц, а также реакции на эти результаты научного сообщества;

– краткая характеристика дальнейшей эволюции алгоритмов решения задач;

– анализ влияния ЛП на теоретические и прикладные разработки того времени, его связей с другими областями математики и взаимосвязей исследований внутри области, а также зависимости этих исследований от предшествующей научной деятельности их авторов, их взглядов на развитие математики и экономики в целом и выбор тем исследований; анализ деятельности по организации исследований, внедрению результатов и преподаванию.

Научная новизна работы. Проведено систематическое исследование возникновения и развития ЛП. Проанализированы математические предпосылки – появление фундамента в виде алгебры систем линейных неравенств, геометрии выпуклых множеств и минимизации. Показано, как разные задачи способствовали зарождению и росту интереса к данной проблематике, какие были стимулы и мотивы и как различные исследования приходили к сходным результатам. Выявлены математические, социальные, политические, экономические, организационные и личностные факторы, приведшие к зарождению интереса, стимулировавшие начало исследований и способствовавшие выработке их методов и путей развития. Акцент сделан на работах СССР и США 30–60-х гг. 20 в. Дан сравнительный анализ исследований Канторовича (СССР), с одной стороны, и Данцига, Купманса и Неймана (США), с другой. Оценен вклад и уточнена роль каждого из них в создании, развитии, продвижении и внедрении в практику ЛП. В силу достаточно большого временного и географического охвата и разностороннего изучения воздействовавших факторов дополнена картина генезиса и развития отрасли, что улучшает понимание путей развития математики и экономики.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты исследования могут быть использованы в обязательных и специальных курсах по ЛП и его истории и по истории и методологии математики, читаемых в высших учебных заведениях студентам математических и экономических специальностей, а также в дальнейших исследованиях как по общим вопросам истории математики, так и по истории ЛП и математической экономики.

Методология и методы исследования продиктованы его междисциплинарным характером. Для решения поставленных задач комбинировались методы историко-научного анализа трудов учёных в контексте современной им математики (антикваристский подход) и с позиций математики сегодняшнего дня (презентистский подход). Анализ отдельных источников, установление достоверности, полноты и информационной ценности исследуемых объектов осуществлялся с учетом основных принципов изучения и представления материалов в диссертации – историзма и научная объективности.

Положения, выносимые на защиту:

1. Общими предпосылками возникновения ЛП, его основных понятий, задач и методов их исследования в СССР и на Западе стали:

– острая необходимость и инициированный ею через соответствующие организации запрос на решение определённого круга прикладных задач;

– атмосфера перед и во время Второй мировой войны, и во время войны Холодной, оказавшая большое влияние на взгляды и приоритеты, определившие темы исследований;

– математический аппарат, созданный в работах предшественников по линейным неравенствам, выпуклым множествам и оптимизации;

– традиции и принципы Петербургской–Ленинградской математической школы, ярким представителем которой явился Канторович, для которой характерна практическая направленность исследований, базирующихся на мощном теоретическом фундаменте.

2. Причинами, приведшими Канторовича, Данцига и фон Неймана к ЛП и способствовавшими их успехам в разработке дисциплины стали:

– имевшиеся связи Канторовича и Данцига с коллегами из других ведомств;

– приобретенные в предыдущих исследованиях богатый опыт и идеи Канторовича, Данцига и фон Неймана, подсказали пути к решению задач ЛП;

– кругозор и выдающийся талант как Канторовича, так и Данцига;

– мировоззрение и опирающиеся на него приоритеты и интересы Канторовича и Данцига, определявшие их выбор тем и методов исследований;

– упорство и самоотверженность Канторовича в продвижении ЛП;

– поддержка работ Канторовича по ЛП крупнейшими советскими математиками, позволившая продолжать исследования вопреки сложной политической обстановке и противодействию со стороны влиятельных представителей экономической науки;

– способность Данцига собрать круг единомышленников, поддержавших идеи ЛП и внесших значительный вклад в его развитие и доработку.

3. Крупные достижения и быстрое развитие ЛП в 1930-60-ые гг. были обусловлены:

– тем, что ЛП дало решение важных, но мало изученных задач с неравенствами;

– интересами влиятельных правительственных и деловых кругов и организацией науки в США того времени, позволившими получить сильную финансовую и административную поддержку для развития, внедрения и продвижения его методов;

– активным применением теоретических результатов в приложениях;

– вовлечением широкого круга ученых (Таккер, Кун, Гейл и др.) из других областей математики, внесших огромный вклад в развитие ЛП (например, выпуклый анализ);

– развитием вычислительной техники и разработкой соответствующих математических методов моделирования и решения прикладных задач;

– подходом фон Неймана к ЛП с позиций его исследований по теории игр;

– способностями Канторовича и Данцига как организаторов и наставников.

4. История ЛП – замечательный пример того как методы, порожденные по запросу одной науки (экономики), в рамках другой науки (математики) оказали большое влияние не только на первую (экономику), но и на последнюю (математику). Один из примеров – полное решение проблемы Г. Монжа, полученное Канторовичем на основе открытых им ранее методов ЛП.

5. В силу особенностей исторической и политической ситуации в мире в 20 в. к сходным идеям, задачам и методам приходили ученые как из разных систем и научных школ (Л.В. Канторович и Дж. Данциг), так и внутри одной страны и даже ведомства (например, исследования В. Каруша, а затем Г. Куна и А. Таккера в США и алгоритмы А.Ю. Левина и А.С. Немировскаго в СССР).

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации доложены на Годичных научных конференциях Института истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН, проходивших в 2008, 2009, 2010, 2011 гг.; на Общемосковском научно-исследовательском семинаре по истории и методологии математики и механики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в марте 2009 и 2010 гг., апреле 2011 г. и марте 2012 г.; на заседании сектора истории математики Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН 20 октября 2009 г.; на VIII Конгрессе ISAAC (Международного общества анализа, его приложений и вычислений) 22–27 августа 2011 г. в Москве.

Публикации: материалы диссертации опубликованы в 10 работах общим объемом 5,6 п.л., в том числе в четырёх статьях в изданиях из перечня ВАК, а также материалах VIII Конгресса ISAAC (Международного общества анализа, его приложений и вычислений).

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка сокращений, списка литературы, который включает 149 наименований на русском языке и 242 наименования на иностранных языках, всего 391 наименования. Объем работы без приложений составляет 181 страницу. Дополнительные материалы изложены в десяти приложениях, так что общий объем работы – 215 страниц.

Глава 1. Математические предпосылки линейного программирования

Как говорилось (см. Введение), работы по ЛП, полиэдрам и ЛН прямо связаны с предметом нашего интереса, являясь взглядами с позиций оптимизации, геометрии и алгебры. Начнем с ТСЛН. Её история фрагментирована: она развивалась в аналитической механике (АМ), теории выпуклости (ТВ) и контексте американской математики 1920-х гг. под влиянием научного и социального контекста независимо в разное время в разных местах и по разным причинам, на стыке разных областей математики и взаимодействуя с другими науками. Разные мотивы, цели и контексты влияли на круг вопросов, методы и результаты. Лишь в 1920-е гг. в США ТЛН была изначальной целью. И именно это, третье, развитие стимулировало дальнейшие исследования, приведшие к установлению ТЛН как части ТВ. Во время Второй Мировой войны осознали, что ТЛН – основа ТИ, что привело к новым результатам в ТЛН и опять независимо от предыдущих и по отличной причине. Когда в конце 1940-х гг. осознали связь только появившегося ЛП и ТИ, это тоже, посредством финансирования военными ведомствами США, породило новый интерес и продвижения в ТЛН.

1.1. Фурье Жан Батист Жозеф

До Фаркаша, похоже, лишь Фурье интересовался созданием ТСЛН, но не очень далеко продвинулся. Вероятно, он был первым, кто рассмотрел (в 1798 г., применительно к равновесию в механике) случай ограничений неравенствами [246].

Принцип неравенств Фурье в АМ. Фурье представил принцип неравенств АМ в статье 1798 г. [246], ставшей развитием работы Ж.Л. Лагранжа о принципе виртуальной работы – одного из фундаментальных в АМ и утверждающего, что механическая система находится в равновесии тогда и только тогда, когда виртуальная работа приложенных сил равна нулю. Этот принцип формулируется для обратимых виртуальных перемещений.

Лагранж также сформулировал так называемый ММЛ (для оптимальных задач при ограничениях равенствах) в [316] для изучения задач устойчивого равновесия механических систем (см. [296]).

Десятью годами позже Фурье обобщил принцип Лагранжа на необратимые перемещения, рассмотрев вместо виртуальной работы момент сил [246, С. 479], что привело к такому изменению знака, что в оригинальной формулировке принципа неравенств для систем, ограниченных неравенствами, момент сил должен быть неотрицателен [246, С. 494] (см., например, [349, С. 530], [250, С. 143]). В терминах виртуальной работы, принцип Фурье утверждает, что равновесие системы эквивалентно неположительности виртуальной работы приложенных сил, что ведет к однородному ЛН о виртуальных перемещениях (см. подробнее [296]).

А.О. Курно (экономист) в 1827 г. тоже изучал ограничения типа неравенств в АМ, пытаясь вывести то, что позднее получило название леммы Фаркаша, и получил для частного случая некоторое её «механическое доказательство». В 1829 г., **И.К.Ф. Гаусс** также рассматривал проблему равновесия в АМ и обобщил принцип Фурье.

В своей книге [243], изданной посмертно, Фурье говорил, что изложит принципы ТСЛН в 7-й и последней книге, часть которой должна была касаться новых вопросов с разнообразными приложениями в геометрии, алгебраическом анализе, АМ и теории вероятности [243] (см. подробно [263, С. 361]). То есть его интересовали разнообразные применения как в чистой, так и в прикладной математике.

Фурье не закончил работу по неравенствам до смерти, но опубликовал короткую статью [248] и разместил два кратких отчета в 1823 и 1824 гг. [245], [244] (в соответствии с Граттан-Гиннесс, кроме опубликованных заметок, показывающих, как далеко продвинулся Фурье в теории, Фурье оставил «несколько сотен листов по проблемам “анализа неравенств”» [263, С. 362], см. точные ссылки в заметке 7 в [263, С. 363] и [264]).

Из этих публикаций ясно, что Фурье имел геометрическое понимание множества решений системы линейных неравенств (СЛН) с тремя переменными как многогранника в $\mathbb{R}^3$ [244, С. 326] (в [263], [262] Граттан-Гиннесс так интерпретирует работу Фурье по линейным неравенствам в контексте ЛП: «одним из его [Фурье] достижений было создание самостоятельно базовой теории ЛП» [263, С. 361], но в подтверждение приводит лишь опубликованную работу Фурье – что представляется недостаточным).

В определенном смысле Фурье в 1824 г. в [247, С. 325–328], [244], [249], [263] предвосхитил формулировку ЗЛП. В его труде [248] есть некий алгоритм (который с рядом допущений можно считать упрощенным вариантом будущего СМ) для отыскания минимума одной из трех координат точки, лежащей в полиэдре P (Фурье называет его «чашей»), заданного СЛН: $z \to \min$, $(x, y, z) \in P = \{z \geq | a_i x + b_i y + c_i |, i = 1, \ldots, m\}$.

Иными словами, в 1826 г. ученый опубликовал исследование проблемы отыскания для матрицы $A_{m\times n}$ и вектора b минимума $||Ax - b||_\infty$, где $||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ (до него подобную задачу исследовали **П.С. де Лаплас** [317] и **А.М. Лежандр** [319]). Приведя для $m = 2$ ход решения, Фурье показал, что проблема эквивалентна отысканию самой нижней точки «чаши», что он и реализовал в виде описания перемещения от одной точки «чаши» к другой по ребрам в сторону ее «низа» пока не будет достигнута оптимальная вершина (что и позволяет говорить о его процедуре, как о примитивном прообразе появившегося более века спустя СМ). Фурье упомянул о возможности дальнейшего исследования при большей размерности выпуклой кусочно-линейной поверхности.

К вопросу о нахождении минимума величины $||Ax - b||_\infty$ для известных A и b, которая может быть интерпретирована как ошибка измерений, необходимо сказать о вкладе **Ш. де ла Валле-Пуссена** в работе 1911 г. [348] по теории СЛН и алгоритму поиска минимально отклоняющихся решений системы линейных уравнений (СЛУ), который можно расценивать как алгебраическую реализацию идей из работ Фурье. Этот алгоритм также можно назвать предтечей СМ.

Фурье исходил из переопреденной СЛУ, в которой он переменные величины заменял числовыми и определял ошибки. Далее он искал систему чисел, минимизирующую абсолютную величина получающейся максимальной ошибки. Он преобразовал задачу аппроксимации в общую оптимизационную задачу.

Фурье понял, что множество решений – выпуклый многогранник, z достигает минимума в специальной точке на его краю, и неявно высказал утверждение о конечности метода, но не заметил возможности образования циклов и вырождения. То есть, Фурье, по-видимому, явился первопроходцем в связывании воедино задач минимизации, СЛН и полиэдров. Через год он дал способ решения произвольных СЛН последовательным исключением неизвестных, называемый сейчас методом Фурье–Моцкина [244].

Фурье был в числе первых, кто понял перспективность СЛН в прикладных задачах. Он говорил о их применении к вопросам механики, результатам голосования на выборах. Однако, говорить, что ему удалось получить более-менее общую теорию или законченные методы решения таких задач, нельзя.

Хотя Фурье не опубликовал больших достижений в теории СЛН, согласно Ж.Г. Дарбу, он был так поглощён этим, что Дарбу даже написал через 60 лет после кончины

Фурье: «Мы включили некоторые статьи из l’Historie de l 'Académie за 1823 и 1824 гг., чтобы точно показать идеи ТЛН, которым знаменитый геометр придавал важность, которую в наше время позволительно считать несколько преувеличенной» [215].

1.2. Остроградский Михаил Васильевич

В 1834 г. Остроградский представил Академии в С. Петербурге работу [347] (опубликована в 1838 г.; одновременно и там же вышло ее развитие), где вывел уравнения равновесия для систем с не обязательно обратимыми перемещениями. Он сформулировал принцип виртуальных перемещений для неравенств, как у Фурье (см. [296, С. 474], [132, С. 330]), и записал условия равновесия в виде: полная работа $Pdp + Qdq + Rdr + \ldots \leq 0$ для любого возможного перемещения, где P, Q, R, … – приложенные силы, действующие на систему; L, M, … – ограничения. Так как перемещения были не обязательно обратимыми, у Остроградского не было условий $dL = 0$, $dM = 0$, ..., но он мог делать вывод, что dL, dM, ... меняют знак только, когда перемещение переходит от возможного перемещения к перемещению, которое противоречит ограничению системы (см. [347, С. 131]), что означает, что виртуальное перемещение – это перемещение, которое удовлетворяет СЛН.

Для вывода необходимых условий равновесия Остроградский использовал то, что он называл обобщенными координатами, заменив перемещения dp, dq, dr … некоторыми другими переменными $d\xi$, $d\eta$, $d\psi$, … и разрешив dL, dM, …, которые являются функциями от dp, dq, dr, …, быть первыми из этих обобщенных координат [347, С. 131].

Процедуру можно использовать только для механических систем с числом ограничений не более числа переменных. Остроградский затем вывел условие равновесия – что полную работу можно записать как линейную комбинацию dL, dM, ..., где множители ограничены в знаке [347, С. 132]: существуют множители λ, μ, ... такие что $Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = \lambda\, dL + \mu\, dM + \ldots$ и знак λ, μ, ... противоположен знаку соответствующих dM, dL, ... То есть можно сказать, что он доказал утверждение, названное впоследствии леммой Фаркаша, для случая линейно независимых неравенств.

1.3. Линейные неравенства в аналитической механике: Фаркаш Джулиус

Через 5 лет после пренебрежительной оценки Дарбу в отношении ТЛН венгерский профессор Фаркаш (см. также [349]) начал работу с принципом неравенств Фурье в АМ, что привело к тому, что ТЛН была впервые разработана в конце 19 в. Он доказал важную теорему (лемма Фаркаша) и создал метод решения конечных СЛН.

В 1895 г. Фаркаш опубликовал статью [232], в которой впервые появилась лемма Фаркаша. Так началась серия статей, где фокус постепенно смещался с АМ на ТЛН, и этот процесс завершился в 1901 г. в [231], где он почти полностью отделил ТЛН от АМ.

Мотивция ТЛН Фаркаша. В заглавии и введении [232] Фаркаш связал свою первую работу, содержащую его главный результат по однородным СЛН, с принципом неравенств Фурье АМ [232]. Уточнив разницу между принципом Фурье и принципом виртуальной работы, он ссылался на первый как на принцип неравенств, а на второй – как на принцип равенств и писал: «Со времен Лагранжа приложение Принципа Равенств – лишь вопрос чистого анализа и, в частности, является вопросом решения равенств, который может всегда быть описан с использованием уже укоренившихся методов.» [232, С. 264]. И продолжал: «С Принципом Неравенств дело не продвинулось так далеко» [232, С. 264].

Фаркаш решил превратить применение принципа неравенств Фурье в решение СЛН. Остроградский уже пробовал применить принцип неравенств в 1838 г. и Фаркаш, знавший это, оценил его работу так: «Остроградский занимался таким применением, но не рассматривал принцип в наиболее общем виде. Он рассматривал лишь частный случай, когда число ограничений не более числа виртуальных перемещений. После этого, вроде, никто этим не занимался и даже есть мнение, что это не очень полезно» [232, С. 265] (про мнение о практической бесполезности принципа неравенств см., например, [353]).

Фаркаш явно пишет в статье 1895 г., что ее целью является доказательство возможности применения ММЛ к принципу неравенств. Для этого он развивает соответствующий аппарат для работы с однородными СЛН в серии статей, опубликованных в 1895–1901 гг. (см. примечание №16 в [296]).

Теория Фаркаша однородные СЛН: Лемма Фаркаша и параметрический метод решения. Фаркаш взял систему:

$$R_1 = A_1u + B_1v + ... \geq 0,\ R_2 = A_2u + B_2v + ... \geq 0,\ \dots \qquad (1.1)$$

где u, v … - переменные [232, С. 266–269] и рассмотрел максимально общий случай произвольного конечного количества неравенств и переменных. Он добавил неравенство:

$$R_0 = A_0u + B_0v + \ldots \geq 0. \tag{1.2}$$

и называл его «новым» [232, С. 267] (потом «не новое» переименовал в «следствие» системы [233]), если множество решений для (1.1) меняется при добавлении (1.2). Такой подход понятен, если вспомнить о приложениях этой теории: если переменные отражают перемещения, то (1.1) – ограничения на них, а (1.2) – принцип неравенств. Тогда необходимое условие равновесия – то, что (1.2) – следствие (1.1).

Соединив ММЛ для равенств и результат Остроградского, Фаркаш сформулировал теорему, что если (1.2) – следствие (1.1), то его можно записать как сумму неравенств из (1.1) с неотрицательными множителями. Как заметил Фаркаш, обратное утверждение (что если (1.2) можно так записать, то оно не новое) – очевидно, а вот прямое доказать сложно. И он с этим не справился в первой статье, дав лишь неполное доказательство этой теоремы (см. [296, С. 476]).

Суть статьи 1895 г. – применение принципа Фурье из АМ и применение леммы Фаркаша к равновесию систем с ограничениями-неравенствами. И только во второй статье (1897 г.) он дал полное доказательство теоремы и рассмотрел параметрический метод нахождения общего решения однородных СЛН как однородных линейных функций новых переменных (см. [296, С. 477]).

Изменение направления исследований. После Фаркаш опубликовал еще две статьи (1897, 1899 гг.), где внимание сместилось с условий равновесия механических систем на алгебру СЛН, в последней статье 1901 г. этот процесс завершился, а кроме того он рассмотрел приложения результата к «infinitesimale» системе (переменные являются дифференцируемыми функциями в трехмерном пространстве, а «дополнительное» неравенство – интегральное) [233, С. 17].

Фаркаш изучал условия равновесия механических систем с ограничениями и строил теорию на базе СЛН. Поэтому вопрос о том, когда ЛН – следствие системы, и его подход к решению СЛН – самые естественные для АМ: параметрическое выражение u_1, …, u_n как линейных однородных функций произвольных и частично-произвольных параметров можно сразу применять для принципа неравенств Фурье, что дает очень простой ответ на вопрос «выполнены ли необходимые условия равновесия для данной системы ограничений-неравенств». Контекст АМ определил вопросы, содержание и подход к созданию ТЛН.

Ещё Фаркаш установил, что любой полиэдральный конус конечно порожден.

1.4. Чебышёв Пафнутий Львович

Исследования, связанные с чебышёвским приближением (нахождение точки, наименее уклоняющейся по модулю от системы плоскостей), занимают важное место в вопросе появления идей, на которые опирается СМ. Эта задача эквивалентна ЗЛП определенного вида.

Вообще, многие задачи чебышёвского приближения, являющиеся задачами выпуклого кусочно-линейного программирования (минимизация выпуклой функции, склеенной из «кусков» линейных функций), можно привести к ЗЛП. Часто задачу чебышёвского приближения можно привести к задаче НЛП (когда минимизируемая функция или некоторые ограничения нелинейны), а уже для нее находится сходящийся алгоритм, на всякой итерации обращающийся к ЗЛП.

1.5. Минковский Герман: теория выпуклых множеств

Имя Минковского связано с ТЛН, но, что не менее важно, также и с возникновением теории ВМ, о которой сейчас и пойдет речь, и которая как систематическое изучение множеств, характеризуемых только выпуклостью, началась лишь в конце 19 в. именно с него. Можно выделить (см. [298]) три этапа творчества Минковского, различающиеся фокусом исследования.

Этап №1: геометрический подход к проблеме минимума положительно определенной квадратичной формы (ПОКФ). Идеи, приведшие Минковского к ВМ, можно найти в работе о проблеме минимума ПОКФ *n* переменных (см. Приложение 3): $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} x_h x_k, a_{hk} = a_{kh} \in \mathbb{R}$.

Надо найти наименьшее *N*, представимое как функция *f* от целого не нулевого *x*. Задача была не нова (см. [298]), но Минковский нашел новый подход – геометрический.

Задача минимизации в теоретико-числовом рассмотрении. Исследования ПОКФ $f(x)$ с определителем *D* Ш. Эрмит строил на своей фундаментальной теореме приведения, представленной в письме к К.Г.Я. Якоби 6 августа 1845 г., утверждающей существование целых $\{x_i\}$: $f(x) < (4/3)^{(n-1)/2} \sqrt[n]{D}$ [271].

Лекция Минковского: геометрическая интуиция и интерпретация квадратичной формы (КФ)**.** В 1887 г. Минковский прочел лекцию «Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis» (текст и анализ геометрических идей и пространственной интуиции в развитии теории ПОКФ см. в [361]), из которой уже видна легшая в основу его идей геометрическая интуиция: новое доказательство проблемы минимума ПОКФ трёх переменных опиралось на геометрическую интерпретацию КФ. Гаусс в 1831 г. уже высказывал эту идею (см. [298]). Более того, в том же выпуске Crelle's Journal за 1850 г., где и письмо Эрмита к Якоби, дан метод И. Дирихле с демонстрацией интерпретации для трёх переменных. Он был известен Минковскому и, согласно последнему, сыграл важную роль в его исследовании.

Гаусс предложил для $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ с матрицей Q, взять систему координат с единичными отрезками осей длины $\sqrt{a}$ и $\sqrt{c}$ и углом α между осями, таким что $\cos\alpha = b/\sqrt{ac}$. Точки решетки – точки, получаемые при целых x и y, – вершины параллелограммов (квадрат их площади равен D = det$Q$). Квадрат расстояния от точки решетки $(x_0\sqrt{a}, y_0\sqrt{c})$ до $\mathbf{0}$ = (0, 0) равен $f(x_0,y_0)$, и проблема минимума теперь – поиск расстояния от $\mathbf{0}$ до ближайшей точки решетки – минимума расстояния между точками решетки – $\sqrt{M}$. То есть рассмотрен переход от координат $x = (x, y)^T$ к $u = (u, v)^T = Ax$, где $f(x) = x^TQx$ примет вид $(u^2 + v^2)$, и кривые уровня станут из эллипсов окружностями.

Минковский в лекции показал нахождение наилучшего целого ненулевого приближенного решения однородной СЛУ с тремя независимыми формами ξ, η, ζ трёх переменных x, y, z. Интерпретировав величины ξ, η, ζ как координаты, он каждой системе сопоставил точку и пришел к поиску минимума расстояния от начала координат до (ξ, η, ζ) по целым не всем нулевым x, y, z в прямоугольной системе координат (ξ, η, ζ), то есть минимизации по целым не всем равным нулю переменным суммы квадратов уклонений – ПОКФ $f(x, y, z) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Он показал, что для представляющей ПОКФ решетки объем стандартного параллелотопа равен $\sqrt{D}$. Идея решетки стала очень важна для Минковского в теории чисел (ТЧ), так как любая теорема о ней – теорема о числах. Так родилась геометрическая ТЧ.

Минковский рассмотрел сферы с центрами в точках решетки и диаметрами, равными минимуму расстояния между ними – $\sqrt{M}$. Так как они не пересекаются и еще остается пустое пространство, то объём сфер меньше объемов P и выходит оценка:

$V_{\text{сферы}} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{M}}{2}\right)^3 < V_{\text{параллелотоп}} = \sqrt{D} \Rightarrow M < c\sqrt[3]{D}$. Он также сказал, что результат имеет силу для любой размерности и отражает свойство ПОКФ.

Так как M – минимум КФ для целых не всех нулевых значений переменных, неравенство в n-мерном случае примет вид $M < kD^{1/n}$, как у Эрмита, но Минковский получил точнее константу и, что важно (в том числе, по его собственным словам), нашел более естественный подход.

Геометрическое доказательство теоремы минимума для *n* переменных. Сказав, что результат обобщаем на n измерений, Минковский не дал доказательства в лекции 1887 г., как и в письме Д. Гильберту 1889 г. (см. [298]). Он опубликовал первое доказательство (геометрическое) в 1891 г. в статье [330] о ПОКФ и их приложения к ТЧ. Только в конце вступления он подчеркнул, что для доказательства полезно расширить геометрическую интуицию с трёх на n измерений. Действуя, как в лекции, он вокруг каждой точки решетки строил n-мерный куб и получал, что минимум ПОКФ f по целым не всем нулевым значениям переменных равен $M < nD^{1/n}$. Он тут же получил меньшую (для больших n) верхнюю границу, использовав сферы диаметра $\sqrt{M}$.

Он снова подчеркнул естественность подхода и то, что это сделало возможным новые приложения теоремы.

Этап №2: исследования метода и построение «измерительных» тел. Минковский развил прием со сферой (кубом) в более общий метод, приведший его к введению понятия нигде не вогнутого тела с центром (симметрии), звёздного тела («Eichkörper» – измерительного или калибровочного тела, работавшего измерительным прибором) и обобщению понятия длины.

Теорема о выпуклом теле (точке решетки). Как видно из записи речи 1891 г. [332] интерес Минковского сместился от проблемы минимума к изучению геометрического метода доказательства: он ввел трёхмерную решетку не как геометрическое представление ПОКФ, а как набор целых точек в прямоугольной системе координат. Термином «геометрия чисел» («Geometrie der Zahlen») он обозначил геометрическое исследование решетки, связанных с ней тел и их расширений до произвольных размерностей, но подчеркнул, что любой факт о решетке имеет арифметическую суть, и ее изучение оправдано своим отношением к ТЧ. То есть он не строил обособленную теорию, а изучал метод ТЧ. «Геометрия» же подсказывала вопросы и методы. Идеи речи легли в основу одноименных книги и области математики.

В речи он обратил внимание на специальный класс тел (что показало отход от ПОКФ) с центром в начале координат и нигде не вогнутой границей и сказал, что если их объём не менее 2^3, то тело содержит точку решетки кроме начала координат – это теорема Минковского о выпуклом теле для трех измерений (см. [298]).

Минковский уже показал (см. выше) эквивалентность вопроса существования не всех нулевых целых значений переменных, для которых f принимает значение N, и вопроса содержания в сфере с центром в **0** и радиусом $N^{1/2}$ других точек решетки. Для решетки в прямоугольной системе координат точки, для которых $f(x, y, z) = N$, образуют эллипсоид. И минимум достигается, когда эллипсоид содержит отличную от **0** точку решетки.

Осознав, что доказательство в [330] основано на описании вокруг каждой точки решетки сначала n-мерных кубов, затем сфер и том, что эти тела не имеют общих внутренних точек, а причина тому (на современным языком) – выпуклость, для чего с точки зрения их формы достаточно требовать нигде не вогнутой границы и симметрии вокруг центра, в речи он говорил уже не о эллипсоидах, а о классе таких тел.

Звёздное тело и лучевая функция. Минковский доказал теорему о выпуклом теле в статье [331]. В ней дан план книги [326] и оправдание геометрического подхода (см. [298]). Он рассмотрел решетку в прямоугольной системе координат для трех измерений и сказал, что в книге будет для n. Он представил лучевые функции (которые назвал обобщениями длины отрезка) и соответствующие звёздные тела (на современном языке – единичный шар, отвечающий определяющей радиальное расстояние лучевой функции).

Пусть a и b – произвольные переменные точки. Минковский рассмотрел функцию $S(ab)$, которую в отличии от обычной длины назвал лучевой функцией, со свойствами:

1) $S(ab) > 0$ при $a \neq b$, $S(ab) = 0$ при $a = b$;
2) Если для некоторого $t > 0$ и точек $a \neq b, c, d$: $d - c = t\,(b - a)$, то $S(cd) = tS(ab)$ (то есть cd сонаправлен ab и их отношение длин t:1).

Если **0** – начало координат, и задано множество $\{u\colon S(0u) \leq 1\}$, содержащее в любом направлении от **0** ненулевой отрезок и называемое звёздным телом лучевой функции, то $S(ab)$ задана для всех a, b.

Если потребовать ещё $S(ac) \leq S(ab) + S(bc)$, то такую лучевую функцию он назвал выпуклой и сказал, что её звёздное тело вместе с любыми точками u, v содержит весь отрезок uv (в современной терминологии – выпуклое, в тогдашней – нигде не вогнутое тело с **0** как внутренней точкой); с другой стороны, любое нигде не вогнутое тело, для которого **0** – внутренняя точка, есть звёздное тело определенной выпуклой лучевой функции (оба заявления он доказал в [326]).

$S(ab)$ называется симметричной если $S(ba) = S(ab)$, что равносильно тому, что **0** – центр звёздного тела (на современном языке он ввел абстрактное понятие метрики, индуцирующей норму, – выпуклую симметричную лучевую функцию).

То есть около 1891 г. Минковский понял, что главное свойство описываемых вокруг точек решетки тел – выпуклость (и симметрия относительно этой точки), а затем осознал, что не обязательно мерить расстояния между точками решетки с помощью ПОКФ, а подойдет любая выпуклая симметричная лучевая функция.

Минковский доказал теорему о выпуклом теле (о решетке) через звёздные тела, рассмотрев выпуклую лучевую функцию и доказав (впервые в печатном виде) существование наименьшего радиального расстояния (M) прямоугольной решетки. Он рассмотрел тела вокруг a и c (разных точек решетки): $S(au) \leq ½M$, $S(uc) \leq ½M$. В силу выпуклости S тела выпуклы и не имеют общих внутренних точек. Если же лучевая функция еще и симметричная, то тела касаются. Дальше он действует, как в лекции и статье 1891 г.: строит систему непересекающихся нигде не вогнутых тел с центрами в точках решетки и получает $1 \geq (M/2)^3 J$, где J – объём звёздного тела. Объём тела $S(au) \leq ½M$ равен $(M/2)^3 J$. Так как наименьшее расстояние в решетке $M \leq 2J^{-1/3}$, то существует хоть одна точка решетки q, для которой $S(0q) \leq 2J^{-1/3}$. Это, по сути, теорема о выпуклом теле (если объём звёздного тела не менее 2^3, то оно содержит хоть одну точку решетки кроме **0**). Он сам считал ее одной из плодотворнейших в ТЧ (см. [298]).

Хотя Минковский доказал свойство звёздных тел, которое, по сути, является (на современном языке) выпуклостью, он не думал о них в таком ключе, а использовал их как калибровочные тела, определенные не через выпуклость, а через лучевую функцию.

До своей книги Минковский не давал определения нигде не вогнутого тела: в речи 1891 г. он рассматривал тела конкретного вида (окружающие **0** так, что ориентированная наружу граница нигде не вогнута), а в статье, прочтенной в Чикаго в 1893 г. – первый такой объект – звёздное тело. Вероятно, он считал определение самоочевидным, а звёздное тело – важным инструментом для обобщения понятия расстояния для ТЧ, но недостаточно интересным геометрическим объектом самим по себе. Только в последней главе книги он дал определение, включающее в себя современное понятие ВМ, что показывает, что он постепенно понял пользу выпуклости и начинал интересоваться такими телами самими по себе.

Этап №3: идея ВМ – начало ТВ. Минковский занялся геометрией нигде не вогнутых тел, которые скоро назвал выпуклыми, и издал четыре статьи (пятая незаконченная вышла посмертно). Началось приведшее к современной теории систематическое изучение ВМ, которые из инструмента превратились в объект основного интереса ученого. В первой из статей [324], Минковский хотел доказать теорему, которую, по его словам (см. [298]), давно предполагал: выпуклое тело, состоящее из конечного числа сплошных тел с центром, которые касаются друг друга, тоже имеет центр. Сходство задачи с методом, использованным в доказательствах предыдущих периодов, наводит на мысль, что утверждение появилось еще тогда. Он доказал это для частного случая выпуклых политопов трехмерного пространства, но сказал, что можно обобщить на многообразия любых размерностей.

Влияние Г. Брунна на теорию ВМ Г. Минковского. Вступления к таким учебникам по ТВ, как [161] и [304], а также исторические исследования ([298], [235], [266], [265]) содержат историю вопроса. Из них мы знаем, что первыми систематически изучали ВМ немецкие математики Брунн, и последовавший за ним Минковский. Многие источники оставляют впечатление, что работа Минковского по ВМ продолжила работы Брунна. Если читать первую статью Минковского по ВМ без учета предыдущих работ, то можно прийти к такому же выводу. Однако, вероятнее (см. [298]), Брунн увидел анонс «Геометрии чисел» Минковского и сказал ему о своей диссертации, Минковский добавил ссылку на работу Брунна и указал ему на некоторые неточности в его работе, после чего Брунн издал работу с исправлениями.

Что касается влияния Брунна на Минковского, то Брунн прямо говорил, что его теорема не годна для доказательства экстремальных свойств сферы, а Минковский именно так ее применил (см. далее), благодаря чему она стала фундаментальным результатом современной ТВ. То есть, хотя Минковский ссылается на Брунна, он работал совершенно независимо, продвинул теорию и занялся ее приложениями. Именно его следует назвать главным основоположником современной теории ВМ (сравнение их см. в [297]).

Дальнейшая работа Минковского по ТВ. В 1901 г. вышли две следующих статьи о ВМ. В первой [328] – об обосновании длины кривой и площади поверхности как пределов длины многоугольников и площади многогранника – он говорил о важности ВМ для обобщения понятия площади. Главным было использование этих соображений для нового и более строгого доказательства теоремы о минимальности площади сферы среди выпуклых тел равного объема. Использовав результат предыдущей статьи и дав ссылку на Брунна, он отметил, что тот сам писал о невозможности такого использования его результата. То есть, интерпретация и использование для построения общей теории ВМ – целиком заслуга Минковского. Во второй статье [329] продолжены исследования сферы и в результате введено ключевое понятие ТВ – смешанные объемы выпуклых тел.

Последующие статьи (одна из которых вышла посмертно) последовательно развивают ТВ и вводят ныне стандартные понятия опорной и разделяющей плоскостей, смешанных объёмов, центра тяжести. Основной упор – на геометрической теории ВМ трёх измерений, но, например, существование опорных гиперплоскостей доказано для n-мерных звёздных тел.

Таким образом: Этап №1 состоял в решении старой задачи минимума в теории приведения ПОКФ новым методом – геометрическим, – который оказался столь мощным, что превратился в 20 в. в новую математическую дисциплину – геометрию чисел. Не будучи первым, кто интерпретировал геометрически ПОКФ, Минковский развил метод и саму ТЧ намного дальше, и это породило новый вопросы, ведущие к созданию того, что сейчас называется геометрической теорией чисел, что намного больше самой теоремы.

На этапе №2 Минковский переключился с задачи минимума и стал изучать сам метод, ввел лучевую функцию, звёздное тело и нигде не вогнутые тела с центральной точкой и без, ставшие вместе с понятием решетки очень плодотворными инструментами ТЧ-исследований, позволившими, в том числе, элегантно через геометрическую интуицию доказать теорему минимума. Мы видим Минковского как очень современного математика – идущего путем абстракции, аксиоматизации, n-мерности, что характерно для 20 в.

На Этапе №3 новый подход, развитый для ТЧ, привел Минковского к осознанию выпуклости: он ввел и стал изучать выпуклые тела как геометрические объекты в отрыве от ТЧ, проблемы минимума и теоремы о выпуклом теле. Это привело к началу современной ТВ и вдохновило других (в начале, особенно, К. Каратеодори ([168], [167]) и Э. Штейница [366]), подхватившиx и развивших ТВ в разных направлениях и для разных целей. То есть идея возникла в одной области чистой математики, соединилась с другими и создала новые, ставшие абсолютно независимыми от начальной.

Возникновение ТЛН в выпуклости, также, как и теория ВМ, связано с именем Минковского**.** В 1896 г. Минковский издал книгу [326] по новой геометрической ТЧ, которая стала очень важной, так как дала новый инструмент решения важных задач ТЧ и потому что развитая в книге теория заложила фундамент аналитической ТВ (в приложении к первой главе – первая работа по ТЛН в этом контексте). Книга вышла в то же время, как и первые статьи Фаркаша по принципу неравенств Фурье. Минковский создал ТЛН независимо от него. Потребность ТСЛН появилась, когда Минковский исследовал выпуклые тела и их приложения к задачам ТЧ о КФ, и этот контекст определил форму ТЛН Минковского.

Геометрия чисел. В [326] Минковский изучает свойства границы звёздного тела («Eichfläche») A и в процессе строит «Zellen» Z_i – типа гипер-тетраэдра с вершиной в **0** и основанием F_i («Flächenzelle») из n «Basisecken» (n точек $a_1, \ldots, a_n$ на A, таких что n направлений $0a_1, \ldots, 0a_n$ линейно независимы). Минковский заполняет звёздное тело такими Z_i, чьи внутренние точки взаимно не пересекаются. Он различает «innerer» точки (внутренние точки Z в сегодняшнем понимании) и «inwendiger» (внутренние точки стенок Z, рассматриваемых как множества точек гиперплоскости) [326, С. 19–20].

Он рассматривает $P = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ и хочет приблизить A с помощью $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Для этого он доказал, что только точки из $\bigcup_i F_i$ принадлежат границе P, и в процессе использовал лемму о том, что: если точка a принадлежит границе P, то среди стенок отдельного Z_i, в котором содержится a, существует хотя бы одна стенка, содержащая «inwendiger» точку b множества P. Существование такой точки b, по его доказательству, эквивалентно существованию решения конкретной СЛН [326, С. 24–25]. Отсюда – потребность в СЛН.

Кроме того, Минковский представил свою геометрию чисел не как синтетическую, а как аналитическую геометрию, и один из важных его результатов: через каждую точку из A проходит хотя бы одна опорная гиперплоскость звёздного тела, то есть все точки звёздного тела лежат по одну сторону от нее (аналитически же гиперплоскость выражается линейным уравнением, полупространство – ЛН) [326, С. 33–34]. Он построил доказательство через выпуклость звёздного тела. В 1939 г. Канторович использовал теорему отделимости (Минковского) для доказательства существования введенных им разрешающих множителей (РМ), ведущих к решению оптимизационных задач.

В приложении Минковский обращается к СЛН:

$$\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, ..., \qquad (1.3)$$

где ξ_1, ξ_2, … – конечное число линейных форм: $U_1x_1 + ... + U_nx_n$ от переменных $x_1, ..., x_n$ с постоянными коэффициентами $U_1, ..., U_n$ [326, С. 40]. Он показывает достаточность рассмотрения случая, когда среди $\xi_1, \xi_2, ...$ – n линейно-независимых.

Он различал такие типы решений (1.3): *действительные* – нетривиальные; если $A = (a_1, ..., a_n)$ – действительное решение, то и tA – действительное решение для любого $t > 0$ – его он называл *кратным* A. Он не считал кратные решения существенно разными. На основе этого он характеризовал главный тип решений – *экстремальные* или *фундаментальные* – действительные, которые нельзя записать как сумму двух существенно разных решений [326, С. 41]. Фундаментальные решения – главные в его исследовании решений СЛН, так как из них строится общее решение.

Сначала он понял, что если для нетривиального решения A среди $\{\xi_i\}$ есть $(n - 1)$ линейно независимых, обращающихся в 0, то A – фундаментальное. Геометрически это значит, что A лежит на ребре, где соответствующие $(n - 1)$ плоскости $\xi_i = 0$ пересекаются. Он не дал эту геометрическую картину фундаментальных решений, но его интуиция пришла из неё ([326, V и VI]). Этим обусловлен и выбор терминологии.

Он показал (см. подробно [296]), что любое нетривиальное решение (1.3) можно записать как положительную линейную комбинацию фундаментальных [326, С. 43], а также что число существенно различных фундаментальных решений конечно. Он назвал систему фундаментальных решений полной, если любое решение представимо как их неотрицательная линейная комбинация.

Использование Минковским СЛН в приложениях геометрии чисел. Второй и, вероятно, главной причиной разработки Минковским ТСЛН в [326] была необходимость в этой теории в отсутствующей главе 7, которая, как считается, соответствует статье [325], где он представлял КФ точкой в $n\cdot(n + 1)/2$-мерном многообразии A. Он хотел найти в A область B, где каждый класс ПОКФ представлен точкой. Если это внутренняя точка B, то КФ представляется одной и только одной точкой. Две КФ эквивалентны, то есть в одном классе, если переходят одна в другую линейным преобразованием с целыми коэффициентами и определителем ±1. (см. подробнее [296]). Он ввел упорядочивание в классах эквивалентности ПОКФ и показал существование «наинизших» («niedriger») КФ в каждом классе (которые, по сути, тоже что и приведенние формы в определении Эрмита ([271], [379], [380]). Минковский ввел более простое определение приведенных форм (теперь называемых приведенными по Минковскому).

Условие, что КФ является приведенной по Минковскому – это то, что коэффициенты КФ есть решения СЛН. Он получил результат, который можно на геометрическом языке интерпретировать так: пространство приведенных КФ – выпуклый конус с вершиной в $\mathbf{0}$, ограниченный конечным числом гиперплоскостей, проходящих через $\mathbf{0}$ [325, С. 68]. Он сделал, как в предыдущей работе, и получил, что существует конечное число «реберных» форм («kanten»), таких что любая приведенная форма представима как их неотрицательная линейная комбинация [325, С. 90].

Таким образом, работая над ТЧ, Минковский пришел к изучению СЛН и выпуклых тел и к 1896 г. показал, что любой полиэдральный конус $\{x \mid Ax \leq 0\}$ конечно порожден; если матрица A имеет полный ранг по столбцам, то этот конус порожден лучами, каждый из которых определяется $(n - 1)$ линейно независимыми уравнениями из $Ax = 0$. Из чего он, предполагая полный ранг A по столбцам, получил лемму Фаркаша. Из хода его доказательства видно, что он знал о двойственности лучей и неравенств и о возможности приведения неоднородного случая к однородному.

Минковский говорил, что главными для развития геометрии чисел были письмо Эрмита к Якоби и статья Дирихле, подсказавшие Минковскому интерпретировать результат Эрмита геометрически через свойства эллипсоида. Когда он понял, что главное в его доказательстве – что эллипсоиды ограничены и выпуклы с $\mathbf{0}$ в центре, эта идея определила круг рассматриваемых задач ТСЛН и взгляд на ее построение, но не повлияла на подход к доказательству результатов о ЛН (он игнорировал понятую им идею о важности выпуклости). Через 20 лет А. Хаар первым доказал результаты Фаркаша и Минковского через ТВ.

1.6. Первая теория линейных неравенств на основе теории выпуклости: Хаар

Хаар первым положил ТВ в основу ТЛН (этот процесс завершился в 1930-х гг.). Заинтересованный работой Минковского, он решил по-новому подойти к теориям Фаркаша и Минковского и в 1917 г. представил, а в 1918 г. опубликовал статью по ЛН [268], где назвал странным, что Минковский не положил в основу ТЛН геометрическую интерпретацию, и написал: «ТЛН была впервые разработана Минковским и Фаркашем. Оба автора получили совершенно разными путями две главные теоремы… Цель этой работы – построить эту теорию по-новому». Хаар рассмотрел систему:

$$a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \dots + a_{kn}u_n + a_{kn+1} \geq 0 \ (k = 1, 2, \dots) \qquad (1.4)$$

и её однородный аналог, где $a_{kn+1} = 0$, и хотел показать, как с подходящей геометрической интерпретацией ЛН и переменных можно построить ТЛН на простых теоремах о выпуклых телах ([268, С. 1]). Он дал новое доказательство леммы Фаркаша для однородных и неоднородных СЛН с n переменными. Число ЛН может быть конечным или бесконечным (в последнем случае множество точек, координатами которых являются коэффициенты $p_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$ соответствующих ЛН (1.4), должно быть замкнуто). Его доказательство леммы Фаркаша основано на простой аналитической геометрии и теореме **Каратеодори** о наименьшей выпуклой области, содержащей замкнутое множество. В 1911 г. Каратеодори опубликовал статью с простым изложением фундаментальной теоремы: любая точка такого множества представима как центр тяжести распределения положительных масс (с общей массой равной единице) в не более чем (n + 1) точке множества [167, С. 200] (то есть для любой точки выпуклой оболочки подмножества евклидового пространства найдётся содержащий её невырожденный симплекс с вершинами в этом подмножестве).

Хаар считал, что Минковский и Фаркаш, изучая, когда ЛН – следствие СЛН, сделали одно и тоже (получили две главные теоремы и общее решение), и разница теорем – в пути к результату. Мы видим, что разнятся не только подходы, но и формулировки результатов. Теоремы вытекают одна из другой и эквивалентны математически, но не исторически: форма разная из-за контекста и цели. Главный результат Фаркаша – лемма (метод решения был позже), Минковского – характеризация экстремальных решений и построение общего решения из них. Главный вопрос в контексте Факркаша – тот, на который лемма дает ответ. Минковскому важна была структура решения. Оба нашли общее решение СЛН, но в очень разной форме: Фаркаш – как однородные линейные функции новых переменных (без различия типов решений и нахождения базиса множества решений). Фундаментальные решения Минковского можно выделить из «однородных линейных функций» Фаркаша, но Фаркаш это не сделал и не ясно, понимал ли он о существовании базиса множества решений. Общее решение Минковского показывает подход через фундаментальную геометрическую структуру этого множества. Их результаты дают совершенно разную информацию о множестве решений.

1.7. Теория линейных неравенств в США в 1920 гг.

Ни Фаркаш, ни Минковский не были мотивированы СЛН, а создали ТСЛН как инструмент. Иначе было в 1920-е гг. в США, где ТСЛН развили снова и опять независимо.

У. Ловитт. Всё началось с заметки 1916 г. [321], где изучено, как S человек голосуют за трёх кандидатов, и каждый дает каждому кандидату одно из трёх мест (это получило название «preferential voting»). Ловитт искал условия, когда можно приписать веса голосам за каждое место так, что любой заданный кандидат может выиграть. Не известно, почему он обратился к этой искусственной задачи без реальных приложений. Он был математиком широкого круга интересов и, возможно, задача возникла из преподавания. Он дал геометрическое решение без СЛН, рассмотрев 6 плоскостей.

Обращение к ЛН. Ловитт ничего не публиковал по СЛН, но, очевидно, задачу можно сформулировать как решение СЛН, что и сделал в 1917 г. **Л. Дайнес** в статье-ответе Ловитту [216], ставшей первой в серии статей о СЛН. Он подошел алгебраически, поскольку считал, что это дает напрямую необходимые условия существования решения, выражает явно диапазоны возможных весов и обобщается на n кандидатов.

В этой работе он создал метод исключения (см. [296]), идеи которого позже использовал в развитии ТСЛН. Прямым следствием метода стало доказательство главной теоремы его статьи: необходимым и достаточным условием (НДУ) существования весов, при которых А выигрывает, является то, что на каком-то шаге метода последовательного исключения переменных все ЛН в системе будут одного типа (он делил ЛН на 3 типа).

Дайнес в 1919 г. абстрагировался от голосований: и в [223] изучил связь матрицы коэффициентов СЛН и существования решения, а также характера решения в случае существования. Для этого он ввел терминологию, так как, по его словам [223, С. 191]: «в отличии от СЛУ, нет ни терминологии для описания решения через матрицу, ни общепринятого алгоритма его отыскания».

Он стал строить ТСЛН подобно матричной теории СЛУ и рассмотрел однородную СЛН со строгими неравенствами, ввел ряд понятий (I-rank, I-определенность – положительность или отрицательность – по отношении к данному столбцу, I-дополнение, I-минор) и доказал две основные теоремы для однородной СЛН: «НДУ существования решения системы – положительность I-ранга» и «если I-ранг $= k > 0$, то размерность решения равна k – 1».

Предложенный Дайнесом процесс решения через I-дополнения и I-миноры громоздок, но он становится намного яснее, если понять, что он отражает процесс исключения из статьи о голосовании. Сами теоремы аналогичны старым (за исключением того, что I-ранг дал дополнительную информацию о числе свободных переменных в решении, и даны две аналогичные теоремы для неоднородных СЛН), доказательства тоже – через процесс исключения (с главным достоинством – конструктивностью, то есть возможностью реального отыскания общего решения), но переписаны в новых терминах.

Новшество работы [223] – терминология, включившая изучение СЛН в рамки теории матриц, как это уже было с СЛУ, и то, что СЛН превратились из средства в цель.

В. Карвер. В отличие от предыдущих появлений ТСЛН теперь инициативу подхватили: Карвер, опубликовал статью [169, С. 212] – под тем же названием, что и Дайнес, в том же журнале и сославшись на Дайнеса. В отличие от Дайнеса, он ищет НДУ не-существования решения СЛН, делает это не конструктивно, а также поднимает вопросы независимости системы и эквивалентности систем. Он рассмотрел систему:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \beta_i > 0\,, i = 1, \dots, m \qquad (1.5)$$

и ввел терминологию: СЛН совместна (есть решение), несовместна (нет решения) и неприводимо-несовместна (несовместна, но любая ее подсистема совместна).

Главная теорема первой части статьи: НДУ несовместности (1.5) – существование таких констант $k_1, \dots, k_{m+1} \geq 0$, что: $\sum_{i=1}^{n} k_i L_i(x) + k_{m+1} \equiv 0$, где $L_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j + \beta_i$ и хотя бы одна из k положительна. В отличие от Дайнеса, Карвер дал неконструктивное доказательство, используя тот факт, что ранг матрицы несовместной системы меньше m.

Изучая эквивалентность СЛН, Карвер ввёл понятия независимой системы, то есть не содержащей лишних ЛН (то есть удовлетворяющихся любой точкой, удовлетворяющей остальным ЛН). Он доказал теорему: если две системы, каждая из которых независима и совместна, эквивалентны, то число ЛН в них одинаково и каждое ЛН одной системы эквивалентно одному и только одному ЛН другой, то есть ЛН двух систем идентичны с точностью до положительной мультипликативной константы.

Продолжение работы по СЛН. Воодушевленный статьей Карвера Дайнес опубликовал в 1925, 1926, 1927 гг. три работы по зависимости/независимости СЛН, дальше изучил теоремы несуществования решений и применил разработанные инструменты к вопросу о положительных решениях СЛУ.

В первой статье он ввел термин определенной линейной зависимости, показал эквивалентность своего результата 1919 г. и Карвера (см. [296]) и указал на возможность обобщения заменой матрицы коэффициентов функцией $A(p,q)$ на множестве произвольной природы [218, С. 58].

В 1926 г. [220, С. 41] Дайнес так переформулировал теорему 1925 г.: НДУ неразрешимости СЛН $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j > 0, \quad (i = 1, 2, \dots . n)$ является существование такого решения ассоциированной СЛУ $\sum_{i=1}^{n} y_i a_{ij} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots . m)$, где не все y_i равны 0 и те, которые ненулевые, положительны.

Такая переформулировка теоремы Карвера явно показывает двойственность СЛН и ассоциированной СЛУ. Такие теоремы Т. Моцкин назвал «transposition» теоремами (мы их называем теоремами об альтернативах), поскольку матрицы коэффициентов являются транспонированными друг к другу (этот тип теорем был переоткрыт в начале 1930-х и в 40-е и сыграл большую роль в теории математического программирования (МП) и ТИ).

В [221] Дайнес разработал алгоритм определения положительных решений СЛУ для определения разрешимости соответствующей СЛН, а также дал ссылку на **К.Ф. Гуммера** (Гуммер представил статью на основе доклада, но вышел только реферат), который дал НДУ существования положительных решений однородной СЛУ и «распространил результат на конечные системы уравнений со счетным числом переменных и также на непрерывно бесконечный случай, где суммы членов заменены определенными интегралами» [267, С. 488].

Интересно понять, что двигало исследователями США. Очевидно, импульс Дайнесу к изучению СЛН дала статья Ловитта, но, скорее всего, он был в основном вдохновлен отсутствием ТСЛН. В отличии от Минковского и Фаркаша Дайнес и Карвер работали над ТСЛН не ради каких-то приложений в или во вне чистой математики. Этот сюжет не имел особой важности в более широком контексте математики того времени и вряд ли мог быть важен сам по себе. Возможную причину интереса Дайнеса к СЛН дает вторая часть его выступления «Линейные неравенства и некоторые связанные свойства функций» на Объединенном собрании Математической ассоциации Америки и Американского математического общества в 1929 г. Там он сказал о возможных обобщениях ТСЛН и (с ссылкой на работу Э. Мура) предложил изучать неравенство вида $J_q\, \alpha(p, q)\, \xi(q) > 0$, где p и q – переменные из классов элементов P и Q, соответственно, α – заданная действительнозначная функция, ξ – неизвестная функция, которую надо найти, J_q – линейный оператор достаточно общего вида [219, С. 399].

Дайнес работал над этим обобщением по меньшей мере с 1926 г. (см. [296]). Курс на обобщение иллюстрирует общую тенденцию того времени в США: в этом духе писали Э. Влек и Э. Мур (см. [296]). Причем, Влек настаивал, что, хотя часто обобщение даже на n размерностей или переменных того, что уже сделано для двух или трех, – важная и сложная задача (так как решение для частного случая двух или трех переменных может обладать особенной структурой и быть не типичным), но обобщение на счетную размерность дает принципиально другой уровень. Мур был очень влиятелен и задавал тон. Хорошо знакомый с его идеями Дайнес (см. [296]) в 1927 г. издал открываемую ссылкой на Мура статью-обобщение ТЛН о функциях, которые где-то положительны и нигде не отрицательны на классе элементов абсолютно любой природы, в котором общая переменная принимает значения [222, С. 463]. То есть работа Дайнеса была частью тенденции обобщения (с равенств на неравенства и, затем, с конечного на континуальное число переменных).

В отличие от Фаркаша и Минковского, не имевших (кроме Хаара) прямых последователей в ТЛН, работа Дайнеса нашла широкую аудиторию: публикации в престижных журналах, лекция на объединенном заседании Американского математического общества и Математической ассоциации Америки говорят об интересе к ТСЛН. В результате множество новых математиков узнало о ней и присоединилось к исследованиям, строя связи с другими областями, а также находя более старые работы этой тематики. ТСЛН обретала место внутри ТВ.

1.8. Фудзивара Мацусабуро

Первыми на работы Дайнеса и Карвера отреагировал японец Фудзивара. В статье 1928 г. он не столько развил теории американцев, как связал ТЛН с более ранними работами другого японца **С. Какейа** о линейных дифференциальных неравенствах и сказал, что СЛН, линейные интегральные неравенства и линейные дифференциальные неравенства «принадлежат к одной группе» [251, С. 330]. Он не сослался на Минковского, но (см. [296]) он знал о его «геометрии чисел» и был знаком с ТВ. Не известно, знал ли он о работе Хаара, но он использовал ТВ и особенно идею о центре масс.

Фудзивара дал НДУ существования и не существования решения СЛН $Au \geq 0$ и дал геометрическую интерпретацию в терминах положения начала координат относительно границы наименьшего выпуклого полиэдра, содержащего m точек, являющихся линейно независимыми решениями СЛУ $A^T v = 0$ [251, С. 331]. Он подчеркнул, что условие Дайнеса несовместности $Au \geq 0$ – существование положительных решений $v_1, \ldots, v_m > 0$ для $A^T v = 0$, а также проинтерпретировал работу Р. Штимке в этом же ключе как «обратную задачу», что стало первой ссылкой на результат Штимке в ТЛН.

Затем Фудзивара также подошел к интегральному ЛН $L(\phi) = \phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy \geq 0$ и получил, что НДУ существования решения – прямое следствие теоремы Какейа о системе интегральных равенств из [276, С. 189–190].

В статье 1930 г. Фудзивара рассмотрел результат, использованый **А. Губером** в статье [273, С. 58–59] для характеризации области интегрирования, заданной СЛН. Губер доказал под руководством своего учителя **Ф. Фуртвенглера**, что если хоть одна из $L_i(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, (i = 1, \ldots, r)$ положительна для каких-то $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, то существует положительное решение $p_1, \ldots, p_r > 0$ СЛН: $M_i(p) = \sum_{k=1}^{r} a_{ki}p_k, (i = 1, \ldots, n) > 0$.

Фудзивара доказал (как в первой статье), что условие Губера и Фуртвенглера не только достаточно, но и необходимо для существования положительных $p_1, \ldots, p_r$: $M_i(p) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. [252, С. 297–298]. Заслуга Фудзивары в основном – переформулировка результатов в терминах ВМ, и в том, что сделал он это понятнее чем Хаар, показав, что существование решения СЛН зависит только от того лежит ли начало координат в наименьшем выпуклом множестве, содержащим точки коэффициентов системы.

1.9. Стокс и Шлаух

Следующий вклад в ТЛН сделала Р.В. Стокс [371]. Она хотела дать геометрическую теорию решения СЛН, продолжала работы Дайнеса (см. [296]) и модифицировала теорию для работы с системами нестрогих и строгих неравенств, а также равенств. В итоге работы Минковского, Дайнеса и теория однородных СЛУ стали предельными случаями. Но главным новшеством стал подход к развитию теории и численного метода.

Стокс дала для решений СЛН геометрическую интерпретацию, сходную с Хааром (работа Хаара, будучи опубликована в венгерском журнале, вероятно, не была ей знакома). Большинство результатов получены, не обращаясь к выпуклости, и только в конце она дала НДУ решения в терминах ВМ и получила результаты сходные с Фудзивара [371, С. 803–805]. На базе своей теории она создала численный метод нахождения фундаментальных решений.

Х.М. Шлаух, очевидно, не знала работу Стокс и, также вдохновленная работами Дайнеса, развила теоремы Дайнеса и Карвера по НДУ существования и несуществования решений на системы, содержащие одновременно равенства и неравенства [357].

К этому моменту ТСЛН с конечным числом неравенств и неизвестных достигла зрелости благодаря Дайнесу, и в 1933 г. он совместно с **Н. Маккоем** подытожил это в [224], где даны все изученные разными авторами системы, методы и обобщения.

1.10. Моцкин и Вейль

Хотя Дайнес и Маккой кратко обсудили важность наименьшего содержащего данный набор точек ВМ в их статье 1933 г., но в основном они фокусировались на аналитическом методе Минковского и *I*-ранге Дайнеса. Стокс тоже поместила результаты, сформулированные в терминах выпуклости, в конце статьи под заголовком «Другая форма необходимых и достаточных условий решения» [371, С. 803].

Первое после Хаара представление ТЛН полностью через ТВ появилось в 1935 г. в работе Вейля [388] о фундаментальной теореме о выпуклых замыканиях замкнутых ограниченных множеств S в n-мерном пространстве. Точки выпуклых замыканий таких множеств S могут быть описаны или как центры масс не более чем $n + 1$ точки из S или как точки, принадлежащие всем «опорам» S (он так называл полупространство, содержащее S) [388, С. 3]. По фундаментальной теореме два описания эквивалентны. Г.

Вейль интересовался случаем конечного S и хотел вывести фундаментальную теорему конечными методами, а не через теорию множеств (как для общего случая). Как он заметил: «… рассматриваемое могло бы быть названо элементарной теорией конечных СЛН» [388, С. 3]. Он видел теорию конечных СЛН как изучение выпуклых замыканий конечных множеств и получил результаты (типа леммы Фаркаша, представления решений как неотрицательных линейных комбинаций экстремальных решений, двойственности начальной СЛН и двойственной – полученной рассмотрением экстремальных решений начальной СЛН как коэффициентов) как следствия фундаментальной теоремы.

Из утверждений, явно сформулированных Фаркашем, принимая во внимание принцип двойственности, тут же следует утверждение, что любой конечно порожденный конус является полиэдральным, которое в таком виде появилось в 1935 г. у Вейля [388]. В исследованиях Вейля, Минковского и Вороного определяется связь многогранников и полиэдров: по теореме Вейля-Минковского то, что множество – ограниченный полиэдр эквивалентно тому, что оно – многогранник.

В 1936 г. Дайнес опубликовал последнюю статью по СЛН [217] с акцентом на геометрической ТСЛН (ТВ). Он уже был знаком со статьями Вейля, а также монографией В. Фенхеля и Т. Боннезена [161], подытожившей успехи выпуклой геометрии до этого времени. На основе фундаментальной теоремы он показал вывод своей ТЛН, возможных обобщений, и теоремы Карвера вместе со своей версией этой теоремы (которую он в 1926 г. дал в форме теоремы об альтернативах).

Существенный вклад в ТСЛН – диссертация Моцкина 1936 г. [335], которая исторически важна по двум причинам: она стала кульминацией ТСЛН до 1935 г. и вдохновила развитие в абсолютно новом контексте после Второй Мировой Войны.

Он сделал почти исчерпывающий обзор достижений ТСЛН, включая Вейля (он ошибочно датировал его работу 1934 г., но очевидно, что получил он ее позднее марта 1935 г., после завершения диссертации, а знал ли он эту работу ранее – не ясно). Он прокомментировал некоторые из работ и сравнил достижения Ж.Б.Ж. Фурье и П.А. Гордана – это первое упоминание Гордана в связи с СЛН.

Моцкин закончил диссертацию в 1934 г., но опубликовал лишь в 1936 г. [335]. Он подошел к СЛН с неожиданного ракурса. Правило знаков Р. Декарта говорит, что число положительных корней многочлена не превосходит числа перемен знаков коэффициентов

– k. Был вопрос, как меняется k при линейных преобразованиях коэффициентов. Над этим многие работали (см. [296]) и в 1930 г. Я.И. Шёнберг нашел все линейные преобразования, не увеличивающие k для случая, когда ранг матрицы преобразования равен числу независимых переменных. В диссертации Моцкин решил задачу для общего случая: оказалось, для определения того уменьшает ли преобразование число перемен знаков достаточно знать знаки всех миноров матрицы. Но этому посвящен лишь конец текста, основное же внимание уделено СЛН, которые появились потому, что знание знаков миноров также достаточно для ответа на более общий вопрос об условиях их разрешимости [335, С. 1].

Рассмотрев СЛН с точки зрения всех комбинаций знаков и записав неоднородную систему в виде $xA + c \in V$, где V – m-мерная область $\mathbb{R}^m$, задаваемая ограничением координат условиями (=, >, <, ≥, ≤ 0), Моцкин доказал существование базиса для решений СЛН для всех комбинаций знаков и очень важную теорему об альтернативах (значение которой полностью поняли лишь в конце 1940-х) в наиболее общей форме (см. Приложение 2).

Моцкин там же дал метод решения типа исключения, аналогичный использованному ранее Фурье и Дайнесом [223]. И, главное, он завершил начатое Хааром и продолженное Вейлем становление ТСЛН внутри ТВ (она положена в основу изложения; все результаты представлены аналитически и геометрически).

1.11. Гордан и Штимке

Как сказано выше в 1926 г. Дайнес переформулировал теорему Карвера об условиях несуществования решений СЛН в форме, явно показывающей двойственность СЛН и сопряженной СЛУ. Через 10 лет Дайнес понял, что эту теорему можно доказать, как простое следствие фундаментальной теоремы о выпуклых замыканиях выпуклых ограниченных наборов точек. Штимке и Гордан тоже имели причастность к получению такого типа теорем об альтернативах.

Вероятно (см. [296]), первым был Гордан, получивший в 1873 г. [261] теорему о существовании положительных решений СЛУ (см. Приложение 2 и, подробнее, в [296]), которую доказал индукцией по числу уравнений, долго перебирая разные случаи (см. [296]). Он не сказал, что побудило его заняться этим вопросом, но в заключении дал приложение к диофантовой однородной СЛУ, что полностью коррелирует с другими его работами того времени и, особенно, его хорошо известной теоремой 1868 г. о конечном базисе инвариантов бинарных форм, что было его главной областью. Шло соревнование Англии и Германии, и первый прорыв сделал Гордан с конструктивным, но технически сложным доказательством. Он решил его упростить. К 1872 г. он понимал, что факт конечности числа неприводимых положительных решений системы диофантовых уравнений можно использовать для доказательства конечности полной системы инвариантов и коинвариантов, что он и сделал в 1885 г. Гордан не интересовался СЛН, и теорема в его виде не показывает связи двух СЛУ с транспонированными матрицами коэффициентов. Но с современной точки зрения ясно, что теорему об альтернативах можно получить легко из его теоремы (см. [296]).

Статья Штимке тоже связана с теоремой об альтернативах. Он закончил диссертацию летом 1914 г., но погиб в первой мировой войне, и работу напечатали лишь в 1925 г. [369], а в 1915 г. издали заметку [368, С. 340] с доказательством двух утверждений, одно из которых – аналогично Гордану (и тоже не показывает отношения между двойственными системами). Штимке использовал индукцию по числу переменных. В статье он говорит, что занялся этим, ища критерий существования базиса бесконечных модулей (им же посвящена глава в диссертации) [369, С. 10], не уточняя, как пришел к вопросу о положительных решениях СЛУ.

1.12. Вороной Георгий Феодосьевич

Изучение вопросов ТЧ привело Вороного к исследованию в его работах свойств многогранников посредством решения конечной СЛН. Кроме вывода условий Гордона полной размерности конуса (то есть разрешимости системы строгих неравенств) и Фаркаша и Минковского конечной порожденности полиэдрального конуса, он ввёл понятие полярного конуса C^* полиэдрального конуса C и вывел ряд его свойств.

1.13. Геометрическая теория полиэдров и двойственность

Бурное продвижение геометрическая теория полиэдров получила в 19 в. Среди главных авторов были О. Коши, Я. Штейнер, Дж. Сильвестр, А. Кэли, А. Мёбиус, Т. Кирман, А. Пуанкаре, Л. Шлефли, П. Тет (см. подробно [132, Т. 1, С. 333]).

Что касается самой концепции двойственности в геометрии (в соответствии с ней в большом количестве теоретических фактов, касающихся проективной плоскости, понятия точки и прямой для пространства двух, и точки и плоскости для пространства трех измерений могут быть заменены одно другим), то она развивалась в работах Ж.-В. Понселе, Ж.Д. Жергонна, Я. Штейнера и фон Штаудта. Ю. Плюккер указал на тот факт, что коэффициенты однородной СЛУ могут быть рассмотрены в качестве координат, что в свою очередь приводит к двойственности гиперплоскостей и прямых, которые проходят через начало координат. Таким образом ему удалось внести ясность в происхождение данного явления (см. подробно [132, Т. 1, С. 67–68, 333]).

Глава 2. Развитие линейного программирования в ранних работах Канторовича

Важнейший этап появления и развития ЛП пришелся на драматическое время в истории человечества – Вторую мировую войну и послевоенные годы, когда шло открытое противостояние мировых политических систем. В это время математика как наука в целом к ставшим уже традиционным областям приложений (естествознанию и инженерии) прибавила ряд новых. Наиболее заметным из них стало применение математического аппарата для решения проблем управления (военными подразделениями, в экономике, производстве и других областях). Задачи данной области зачастую (особенно на Западе) объединяли под названием исследование операций (ИО). В этой зарождавшейся области приложений основополагающую роль было призвано сыграть незадолго до этого появившимся ЛП и ТИ. И если в предыдущем столетии математика в экономике делала лишь робкие шаги (А.О. Курно, К. Маркс, У.С. Джевонс, Л. Вальраса, В. Парето), то теперь за дело взялись ведущие математики: Л.В. Канторович создал ЛП, Дж. фон Нейман – ТИ. (подробнее см. [100]).

Одно из отличий капиталистической экономики от социалистической состояло в том, что первая обладает естественным аппаратом, позволяющим определять цены и ренты на все виды товаров и услуг, а также наблюдать за тенденциями их изменений. Этим аппаратом являются рынки и биржи, которые считаются принципиально стихийными механизмами, параметры моделей которых характеризуют капиталистическую экономику и не регулируются искусственно. В социалистической экономике, таким аппаратом не обладавшей, возникала необходимость в некоторых показателях, которые могли служить ориентирами при осуществлении экономического управления. Требовалась разработка научных методов такого управления.

Имелось еще одно важное отличие капиталистической экономики от социалистической: для первой более характерна оптимизация работы одной отдельно взятой компании, а во второй чаще возникала задача оптимизации функционирования группы предприятий в составе целой отрасли или вообще всей системы взаимосвязанных объектов. Эти обстоятельства сыграли определенную роль в том, что модели и методы ЛП впервые появились в СССР. Они оказались эффективным средством решения экономических задач, что способствовало их разработке в качестве инструмента проведения плановых расчетов.

В этой главе проанализировано создание ЛП Канторовичем, показана в историческом аспекте значимость работ, повлиявших на зарождение ЛП в его исследованиях, дано описание его математического творчества с конца 1920-х гг. и исследований некоторых других ученых, имеющих непосредственное отношение к советской экономической школе. Отмечается большая ценность работ Канторовича для приближенных методов вычислений, получивших впоследствии широкое применение в математической экономике.

2.1. Идеи Канторовича в контексте работ советских экономистов 1910–30 гг.

Для определения значения идей Канторовича для экономико-математических методов, надо понять их связь с работами его предшественников и современников. В этой связи остановимся на анализе достижений некоторых ученых, оказавших большое влияние на внедрение математических идей и методов в область экономической науки. Несмотря на то, что проведенные в данной работе исследования, безусловно, не могут полностью охватить всё разнообразие достижений и методов в данной области для рассматриваемого временного периода, они призваны дать представление относительно особенностей того научного контекста, в рамках которого происходили последующие исследования Канторовича (подробнее см. [12]).

Задолго до того, как Канторович начал проводить свои научные изыскания в области экономики, в России и СССР уже существовал опыт отдельных попыток применения методов математического и статистического анализа для решения задач экономики и планирования. Такие исследования стали предприниматься уже в 1910–1920 гг.: среди этих работ отметим сильные в контексте мировой экономической теории тех лет труды Е.Е. Слуцкого [363] и А.А. Конюса [89], в которых ученые изучали модели потребления, исследования Г.А. Фельдмана по моделям роста и планирования [136], [135], труды Н.Д. Кондратьева по «длинным циклам» [87]. В ЦСУ СССР были выполнены работы по шахматному балансовому анализу экономики (см. в [80]). Впоследствии это направление получило дальнейшее развитее, было математизировано и усовершенствовано В.В. Леонтьевым с широким использованием сведений и материалов экономики США [112], [153]. В тот же временной период Л.П. Юшков [149] выдвинул идею сформулировать оптимальные подходы к понятию норматива эффективности, которая впоследствии получила чрезвычайно плодотворное развитие в творчестве В.В. Новожилова [119].

Первые исследования по ЛП можно отнести к 1938−1939 гг. Они были начаты в Ленинградском университете при решении Канторовичем «Задачи фанерного треста» [39]. Задача заключалась в оптимальном распределении работы по станкам (см. [91, С. 294]: «Название треста и то, что Канторович занимался раскроем, приводит некоторых авторов к ошибочному заключению, что это была задача о раскрое фанеры (см., например, Большая российская энциклопедия. Т. 12. М.: Изд-во Большая Российская энциклопедия, 2008, статья «Канторович»). В задаче искался план загрузки станков с наибольшей производительностью.»). В процессе исследования было установлено, что критерием оптимальности плана является существование так называемых РМ для всех ингредиентов продукции и ресурсов. Сами РМ получили экономическую интерпретацию и позднее были названы объективно обоснованными оценками [72]. По сути, Канторович проинтерпретировал РМ как цены.

Первой фигурой, к которой мы обратимся, будет Слуцкий. Деятельность Слуцкого в области экономики имеет особое значение для формирования правильного представления о характере научного контекста, в котором впоследствии предстояло работать Канторовичу, что обуславливается двумя изложенными ниже факторами.

Во-первых, работы этого ученого составляют часть «предыстории» рассматриваемых Канторовичем вопросов в силу того, что и математическая постановка задач (экстремальная задача с ограничением типа равенств), на основании изучения которых были достигнуты одни из главных результатов (уравнение Слуцкого), и, соответственно, математический аппарат, который был применен для решения этих задач (ММЛ), могут быть названы в качестве главных результатов, которые были достигнуты к тому моменту, когда Канторович начал проводить свои изыскания в области экономической математики, плодом которых стало открытие ЛП.

Во-вторых, Слуцкий – это советский учёный, и результаты его научной деятельности достаточно широко известны и доступны в СССР. Канторович имел хорошую возможность ознакомиться с ними, чего нельзя утверждать относительно более поздних исследований американских учёных, которые изучали аналогичные вопросы в более поздний временной период (не зная о достижениях Канторовича они впоследствии «переоткрыли» в своих работах ЛП).

Две других фигуры – В.В. Новожилов и В.В. Леонтьев, также работавшие в одно время с Канторовичем. Предложенные ими модели тесно связанны с исследованиями Канторовича и, более того, могут быть переформулированы таким образом, что будут частными случаями изучавшихся им проблем.

Слуцкий Евгений Евгеньевич оказал большое влияние на развитие эконометрики в двух важных областях: теории поведения потребителей и анализе временных рядов. Он вошел в историю математической экономики благодаря «уравнению Слуцкого». Изучая влияние изменения цены товара на спрос в работе 1915 г. [363], он первым рассмотрел общий эффект как составной, представив его в виде суммы двух независимых простых эффектов: эффекта дохода и эффекта замены. Первый – следствие влияния цены товара на реальный доход – отражает изменение спроса при изменении дохода и неизменных ценах; он может привести и к увеличению, и к сокращению потребления товара. Второй – результат относительного изменения цен при неизменном реальном доходе – приводит к росту потребления относительно подешевевшего товара. Чтобы выделить один эффект, надо избавиться от влияния другого.

Существует два подхода к определению реального дохода: Дж.Р. Хикса и Е.Е. Слуцкого. По Хиксу, реальный доход одинаков, если достигается одинаковая линия уровня функции «удовлетворения»; по Слуцкому – если можно приобрести одинаковый набор товаров. Подход Хикса больше соответствует порядковой теории полезности, подход Слуцкого позволяет дать количественное решение на основе статистических данных.

Пусть p_i – цена i-го товара, x_i – его количество, u – функция удовлетворения, M – бюджет. Решения систем $\begin{cases} u(x_1, \dots, x_n) \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M \end{cases}$ и $\begin{cases} u(x_1, \dots, x_n) = \check{u} = \text{const} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M \to \min \end{cases}$ называют спросом по Маршалу $\hat{x}_i = \varphi_i(p_1, \dots, p_n, M)$ и Хиксу $\check{x}_i = \psi_i(p_1, \dots, p_n, \check{u})$.

$\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \psi_i}{\partial p_j} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial M}$, где $i, j = 1, \dots, n$ – уравнение Слуцкого.

Обозначив функцию расходов через $M(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \check{x}_i = m(p_1, \dots, p_n, \check{u})$, получим 2-ю версию уравнения Слуцкого $\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial M} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_i} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial M}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Слуцкий также составил матрицу: $\left(\frac{\partial^2 m(p,\bar{u})}{\partial p_i \partial p_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ и, показав ее отрицательную полуопределенность, описал динамику спроса в зависимости от изменения цен. Именно он сформулировал наиболее важное условие равновесия как равенство предельных норм замещения соотношению цен соответствующих благ.

Новожилов Виктор Валентинович, представитель Ленинградской экономической школы, проводил свою исследовательскую деятельность примерно в одинаковый с Канторовичем временной период. В 20-х гг. XX в. он участвовал в проведении экономических реформ в СССР. Он считал главной проблему измерения затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве, для решения которой использовал математические методы нахождения общего максимума от капиталовложений. Эти модели, выдвинутые в работах Новожилова, напрямую связанны с исследованиями Канторовича и, в дополнение к этому, часто их можно переформулировать в терминах ЛП, в результате чего эти модели можно будет рассматривать в качестве частного случая тех вопросов, исследованием которых занимался Канторович (В. Голубничий писал, что Новожилов применил множители Лагранжа до Канторовича, однако это представляется не вполне обоснованным – см. [12, С. 139]).

Новожилов сразу же, в отличие от Канторовича, получил признание в СССР и заграницей как один из ведущих теоретиков оптимального планирования, разрабатывавший вопросы теории дифференциальных затрат (определение которых ввел впервые именно он), учитывающих ограниченность средств производства. В 1926 г. выходит его статья [120], содержавшая анализ проблемы диспропорции спроса и предложения товаров с точки зрения политики цен. Начиная с 1929 г. Новожилов в своей исследовательской деятельности сконцентрировался на изучении вопросов, связанных с проблемой создания математических методов, предназначенных для определения экономической эффективности, которые могут использоваться в процессе планирования (см. также 3.5). При продолжении исследований на эту тему, стала явно проявляться потребность применения более сильного математического аппарата, чем тот, который был в распоряжении исследователя до этого момента. Такое положение дел очень удачно совпало с появлением соответствующего метода в работах Канторовича. Статья [119] подытожила предыдущие работы Новожилова и была отмечена Ленинской премией (совместно с академиками Немчиновым и Канторовичем). В этой работе результат использования каждого продукта характеризуется потребительской оценкой – величиной, на которую улучшается значение функционала плановой задачи при дополнительной единице продукта/ресурса (потребительские оценки получаются при составлении оптимального плана и являются по существу объективно обоснованными оценками Канторовича, то есть это – частный случай ЛП с одним РМ).

В целом обзор вклада Новожилова см. в [105]. Можно сказать, что он получил общую теорию стоимости (также как Канторович из частной задачи распределения, но в его исследованиях это был капитал) и ее связь с распределением ресурсов: стоимость получается из оптимального распределения.

Скажем пару слов о сути рассмотренной в работе Новожилова [120] проблемы. В капиталистической экономике продавец гонится за покупателем, производство ограничено не производственными силами, а сбытом. В социалистической экономике покупатель ищет товар. Автор пришел к выводу, что недостаток товаров не абсолютен, а относителен (в сравнении с денежным спросом) и возникает, когда цены не уравнивают спрос и предложение.

Новожилов показывает, как расширение безубыточного производства (пропагандировавшаяся тогда идея) лишь усилит товарный голод: только устранив избыток денежных доходов над реальным доходом (суммой цен произведенных потребительских благ) можно устранить недостаток товаров, но при росте производства растет сумма заработных плат, суммы за сырье и так далее, то есть растет денежный доход населения и, следовательно, спрос.

Леонтьев Василий Васильевич, как и Новожилов, работал примерно в тот же временной период, что и Канторович. И хотя наиболее известные результаты его научной деятельности относятся к тому времени, когда он уже работал в США, начинал он свой путь в науке в СССР в стенах ЛГУ – то есть там же, где позднее учился Канторович.

Круг вопросов, к которым в своем творческом поиске обращался Леонтьев на стыке 1920-х и 1930-х гг., включал в себя темы эластичности спроса и предложения и кривые безразличия, а в используемом математическом аппарате, описывающем основную модель этих экономических процессов, главная роль принадлежала системе линейных уравнений и неравенств.

Большой интерес представляет модель Леонтьева для межотраслевого баланса, которая и получила название «затраты – выпуск» (вообще говоря, она есть частный случай ЗЛП). Она описывается СЛУ, где параметры – коэффициенты затрат на производство. Началом научного поиска Леонтьева в этом направлении можно назвать 30-е гг.: в 1936 г. вышла его первая статья по этой тематике, отличающаяся высокой аналитической строгостью. Анализ по этому методу относится к проблемам, изучающим взаимосвязь отношений в экономическом пространстве, представленном системой уравнений, описывающей экономику как единое целое. Эту область экономики называют теорией всеобщего равновесия, создателем которой был французский экономист Л. Вальрас. Эту систему взаимозависимостей Вальраса как инструментарий первым на практике стал систематически применять Леонтьев в процессе всестороннего формирования экономической политики государства.

Однако необходимо заметить, что главные идеи Леонтьева уже были им сформированы ранее: ещё в те годы, когда он был студентом в Европе (в 1925 г. он отправился из СССР в Германию, где проходил обучение в Берлинском университете и проводил научные изыскания для написания своей докторской диссертации), например, в статье 1925 г., темой которой был экономический баланс СССР (см. [12, С. 161]).

Леонтьев показал, что коэффициенты, выражающие соотношения между секторами, оцениваемы статистически, устойчивы и прогнозируемы. Практическое применение метода отражено в [112]. Модель строится в предположении, что затраты потребляющей отрасли определяются выпуском ее продукции, то есть коэффициенты производства фиксированы.

Рассмотрев правительство и совокупность индивидуальных потребностей как отрасли, получают «замкнутую» модель. Если заданы общий объем выпуска и коэффициенты производства, можно определить объем спроса конечных потребителей на данную продукцию. Решив уравнение коэффициентов относительно вида затрат, можно получить структурное уравнение.

Предположив же, что ряд переменных системы определяется внешними обстоятельствами, получаем «открытый» вариант (он имеет место, если пренебречь одним из основных соотношений «замкнутой» системы, так что единственности решения уже нет). В этом случае сумма коэффициентов затрат хотя бы в одной отрасли производства будет меньше 1 (ей может быть любая отрасль, но наиболее вероятно –

домашние хозяйства, так как здесь главное влияние – это количество поставляемого труда, и могут быть рассчитаны разные варианты этого «выпуска», обеспечивающие полную занятость рабочей силы). В открытом варианте применима обратная последовательность анализа: конечный спрос определен заранее, значит, могут быть вычислены объемы выпуска, удовлетворяющие данному «товарному остатку».

Немчинов был высокого мнения о достижениях Леонтьева и так их описал: Леонтьев объединил таблицы «баланса производства и распределения общественного продукта, дал математическую интерпретацию баланса, построил уравнения связи затрат и выпуска продукции, которые были в свое время сформулированы в работах Л. Вальраса и В.К. Дмитриева [125, С. 18]» [12, С. 161].

При этом, как сказал В.А. Залгаллер (см. [131, С. 111]): «...всё, что придумал Леонтьев, это только кусочек от того, что сделал Леонид Витальевич, объяснивший математическую подоплеку основных экономических понятий».

Не все признали метод «затраты–выпуск» эффективным способом изучения экономики. Негативно были восприняты фиксированные коэффициенты. Но, модифицировав метод с учетом более поздних открытий в ЛП, можно обеспечить и анализ меняющихся производственных функций. В этом случае уровень использования производственных затрат станет переменным и можно установить критерии оценки метода производства, основанные или на минимальных издержках производства, или на максимальном «благосостоянии». Таким образом, систему, описываемую в работах Леонтьева, можно рассматривать в рамках общей теории ЛП в качестве особого случая.

В 1973 г. за развитие метода «затраты–выпуск» и за его применение к важным экономическим проблемам Леонтьев был удостоен Нобелевской премии по экономике. Он также являлся членом академий многих стран, был президентом Американской экономической ассоциации, получил почетные докторские степени университетов Брюсселя, Йорка, Лувена, Парижа.

2.2. О математическом творчестве Канторовича с конца 1920 гг.

Первые шаги Канторовича к разработке модели и методов ЛП были предприняты в качестве ответа на запрос о необходимости решения совершенно конкретной экономическо-производственной «задачи фанерного треста». Однако для понимания причин, по которым эти методы были предложены именно Канторовичем в тот самый момент времени и почему они получились такими, важно иметь представление об истоках и линии его научной жизни, которые предшествовали обращению направления его творческого поиска в сторону математических методов экономики. Для формирования такой картины приводится обзор математических исследований, в контексте которых (прежде всего, его работ по функциональному анализу (ФА)) ученый начал свой анализ поставленной перед ним частной задачи, что, в конечном счете, привело к рождению ЛП.

Канторович родился 19.01.1912 в Петербурге. Его отец был врачом. Незаурядный талант Канторовича проявился очень рано: поступив в 14 лет в ЛГУ (где встретил своих будущих друзей на всю жизнь, среди которых были Д.К. Фадеев, И.П. Натансон, С.Л. Соболев, С.Г. Михлин), в 15 он активно занимался наукой на семинарах В.И. Смирнова, Г.М. Фихтенгольца и Б.Н. Делоне, а в 23 стал доктором наук без защиты диссертации (см. биографию и обзор исследований в [40], [104], [102], [110], [111], [84], [94]).

Будучи еще студентом 1-го курса и участвуя в семинаре Г.М. Фихтенгольца, он должен был подготовить доклад об условиях интегрируемости функции по Риману. Канторович, ознакомившись с имеющейся на эту тему в доступных ему учебниках информацией, не ограничился пересказом готовых результатов, но задался вопросом об условиях совпадения верхнего и нижнего римановых интегралов с лебеговым. Отвечая на этот вопрос, он получил ряд новых результатов (включавших в себя определение полунепрерывной функции и ряд утверждений). Таким образом, ему удалось ответить на сформулированный им же вопрос (искомым условием оказалось следующее: функция должна быть почти везде полунепрерывной, соответственно, сверху и снизу.) Вполне закономерно выяснилось, что полученные им результаты уже были получены ранее. Это же относится и к еще одному результату, который появился в процессе данного исследования, – характеристике функций, которые могут являться колебаниями функции одной переменной (таковой может быть любая полунепрерывная сверху функция). Выяснилось, что данный результат двумя годами ранее уже был получен Е.М. Ливенсоном, совместная с которым статья по этому вопросу планировалась для публикации в бюллетене студенческого научного кружка, чего, правда, не состоялось по причине окончания работы последнего.

Так начались исследования Канторовича по дескриптивной теории функций, получившие успешное продолжение ([58], [62], [283], [286], [282]).

Прежде чем перейти к разговору о конкретных областях математики, обозначим несколько моментов. Наиболее значительные достижения в математики были сделаны Канторовичем в Ленинграде. До конца 1930-х гг. он больше занимался чистой математикой, а в следующей декаде – вычислительной. В это время он стал в своих направлениях флагманом в СССР и одним из наиболее выдающихся математиков Мира. Чтобы понять величину его гения приведем письмо Н.Н. Лузина Канторовичу 1934 г. [126]: «Вы должны знать, каково мое отношение к Вам. Вас всего, как человека, я не знаю еще, но угадываю мягкий чарующий характер. Но то что я точно знаю – это размер Ваших духовных сил, которые, насколько я привык угадывать людей, представляют в науке неограниченные возможности. Я не стану произносить соответствующего слова – зачем? Талант – это слишком мало. Вы имеете право на большее…».

Дескриптивная теория функций. Как уже было сказано, упомянутый выше семинар вскоре прекратил свое существование, а студент Канторович сделался участником только что открытого также Фихтенгольцем семинара по дескриптивной теории функций, который начался с темы о классификации функций Бэра и Юнга. Именно эти вопросы легли в основу первых трудов Канторовича, который в качестве основной темы исследования выбрал задачу получения дескриптивной характеристики четвёрки функций, которые могут являться обобщёнными производными непрерывной функции. В процессе изучения этого вопроса появилась задача, которая ставилась для функций любых классов, в том числе и трансфинитных, выявления тех функций Юнга второго класса, которые могут являться верхним и нижним пределами последовательности непрерывных функций. В результате исследований в течение 1928–1929 гг. ему удалось получить результаты как по вспомогательному, так и по основному вопросу. В тот самый момент, когда результаты по вспомогательному вопросу должны были быть опубликованы, вышли статьи В.В. Степанова [367] и Ю.А. Гольдовского [259], содержавшие решение этих проблем для функций Юнга второго класса. В итоге Канторовичу пришлось переработать статью, сосредоточившись на обобщении вышеобозначенных работ, в результате чего появилась публикация [284]. Результаты же по общей проблеме были опубликованы в 1932 г. в [58].

После этого в круг внимания Канторовича попали сформулированные Фихтенгольцем вопросы об универсальных функциях, которые Канторовичу также удалось успешно решить, и о чём он сделал первое в его жизни выступление перед

Ленинградским физико-математическом обществом. В этом исследовании он обратился к абстрактному понятию аналитической операции над множествами, которое тесным образом связано с тем рядом исследований, которому ему предстояло посвятить следующий период своего научного творчества.

Функции над множествами, аналитические и проективные множества. Когда в 1928–1929 гг. опять же под руководством Фихтенгольца начал работать семинар, целью которого было объявлено исследование *A*-множеств и смежных вопросов, Канторович стал принимать в нем активное участие. В силу того, что степень разработанности вопросов, касающихся аналитических множеств была уже весьма высокой, участники семинара сосредоточили свои усилия на изучении проблем, связанных преимущественно с проективными множествами, о которых в то время было известно намного меньше. Канторович достаточно быстро получил важные результаты, опубликованные в «Докладах Академии наук Франции» [282].

Канторович в результате своей совместной с Ливенсоном исследовательской деятельности сумел установить ряд закономерностей, одна из которых давала описание того, каким образом для δs-операций Хаусдорфа ведут себя множества индексов, то есть системы последовательностей, по которым производится суммирование множеств, в случае объединения множеств. Оказалось, что их удобно изучать с помощью изображения на вещественной прямой, рассматривая их не как множество последовательностей, а как подмножества множества рациональных чисел.

Продолжая работу в этой области, Канторовичу удалось решить и ряд других вопросов, среди которых можно, во-первых, отметить то, что он смог получить представление для проективных множеств второго класса. Для *A*-множеств оно было известно: через *A*-операцию с кортежами. Для проективных множеств ничего подобного не существовало. Работа была опубликована в 1929 г. [282]. А, во-вторых, годом позже Канторовичу удалось найти решение проблемы Лузина о том, что все множества системы Е.А. Селивановского (полученные аналитическим путём) принадлежат пересечению проективных множеств не выше второго класса и дополнительного класса и показать, что множества, полученные в результате борелевской надстройки над системой *A*-множеств и *CA*-множеств также укладываются в этот класс.

Конструктивная теория функций. Следующая смена предмета научного поиска произошла, когда в быстро расширявшемся круге интересов Канторовича оказалась конструктивная теория функций и он обратился к исследованию полиномов С.Н. Бернштейна. В 1930 г. в Докладах Академии Наук СССР и Известиях Академии наук СССР были опубликованы первые результаты ученого ([51], [55], [43]), полученные в этом направлении, среди которых наиболее важным в свете изучаемого нами вопроса о его последующей деятельности экономической направленности представляется то, что Канторович выдвинул предложение об использовании вместо значений функции в отдельных точках более устойчивых средних значений функции в соответствующем интервале и показал, что такая замена возможна. После этого стало возможным написать полиномы не только для непрерывной, но и для любой суммируемой по Лебегу, функции и доказать их сходимость почти везде к значениям порождающей функции. Канторович построил подобного рода полиномы для функций первого класса Бэра и установил их сходимость всюду, за исключением множества точек первой категории. Эти результаты были опубликованы в двух заметках 1930 г. ([283], [51]) и были доложены на Первом Всесоюзном математическом съезде в Харькове, в них же было отмечено следствие о почленном дифференцировании последовательности полиномов Бернштейна абсолютно-непрерывной функции.

Вслед за этим были получены результаты относительно приближения непрерывной функции многочленами с целыми коэффициентами [43]. Наиболее интересной, по мнению Канторовича, была работа по сходимости полиномов Бернштейна за пределами основного интервала [55].

Интерес к этой теме оказал большое влияние на научное творчество ученого последующих периодов, так как к полученным в его результате знаниям и опыту в области конструктивной теории функций Канторович не раз прибегал в своих будущих исследованиях, касающихся как «чистой», так и прикладной математики.

Приближённые методы анализа. Увлечение Канторовича другой областью – приближенными методами анализа, которую он успешно разрабатывал в начале 1930-х гг., началось с собственного изложения результатов А.Н. Крылова [92] по-новому: в интегралах Стилтьеса обычных несобственных и интегралах Стилтьеса высшего порядка [66]. С этим же связано несколько работ об интеграле Стилтьеса, относящихся уже к теории обобщённых функций (или теории распределения конечного порядка). Одновременно с этим Канторович занимался составлением совместно с В.И. Крыловым курса по вариационному исчислению [130], который опирался преимущественно на материалы лекций Н.Г. Чеботарёва и В.И. Смирнова. Многие полученные в те годы результаты вошли в написанную им совместно с Крыловым и много раз переизданную в СССР и заграницей книгу [79].

Однако к 1932 г. Канторовичем был разработан новый вариационный подход, который значительно обобщил метод Ритца (см., например, [63], [144]). В то время как метод Ритца предполагает поиск решения в виде линейной комбинации определенных априорно заданных функций с неопределенными коэффициентами, определяемых с помощью условия минимизации некоторого интеграла (иными словами, поиск решения уравнения в частных производных либо проблемы об экстремуме двойного интеграла сводится к матричной задаче), в методе Канторовича форма разыскиваемого решения включает и произвольные функции одного переменного (то есть часть структуры приближённого решения имеется в заданном виде, а другая часть находится из самой задачи о минимизации интеграла, превращающейся в одномерную задачу) и, более того, в некоторых ситуациях появляется возможность отыскивать не просто численное решение задачи, а приближенное аналитическое. Данный подход позднее был использован в [35] при создании алгоритма, аналогичного методу Галёркина–Бубнова.

Также в этой области Канторовичем были получены значительные результаты по приближённым методам применительно к конформному отображению близких областей [49], [44], где были использованы идеи отыскания отображающей функции в виде ряда по степеням малого параметра, а сами члены ряда находились или из бесконечной СЛУ или последовательными приближениями. Была доказана сходимость метода в определенных границах изменения параметра. Разработка такого метода стимулировалась разработкой и применением методов теории функций комплексного переменного в работах по гидродинамике, решению уравнений в частных производных. В [79] впервые опубликованы многие новые результаты, касающиеся исследования погрешности и сходимости известных ранее методов. Также был развит метод решения граничной задачи, основывающийся на сведении её к бесконечной СЛУ и интегральных уравнений, а также по изучению погрешности и сходимости уже имеющихся методов. Дается первое систематическое изложение различных приближенных методов решения интегральных уравнений. Рассматривается применение вариационных методов к приближенному решению уравнений в частных производных, а также методы приближенного конформного отображения; изучаются приложения методов приближенного конформного отображения к нахождению решений основных краевых задач.

В работе был рассмотрен метод коллокации в применении к уравнениям с частными производными. Основой этого метода является замена исходного уравнения системой уравнений, заданных на отдельных линиях. Фактически требовалось, чтобы приближенное решение удовлетворяло исходному уравнению только на указанных линиях (например, учитываются данные эксперимента).

Как впоследствии отмечал Канторович: «В исследованиях сходимости приближённых методов были существенно использованы методы конструктивной теории функций» [110, С. 59].

Теория полуупорядоченных пространств. В начале 1930-х гг. Канторович приступил к исследованиям по ФА – области математики, в которой впоследствии он стал одним из крупнейших в мире авторитетов. Началось это увлечение в 1933 г. Как только открылся научный семинар по ФА, Канторовичу в 1934–1935 гг. сразу удалось добиться больших результатов в этом направлении, среди которых – теорема об общей форме линейного функционала в пространстве всех измеримых ограниченных функций, полученная в совместном с Фихтенгольцем исследовании, вместе с параллельным установлением мощности множества функционалов в данном пространстве [238], [137]. Далее он провел исследование [54] условий возможности продолжения семейства всех линейных функционалов с сохранением нормы и аддитивности и получил теорему, говорящую, в каких пространствах это возможно. Она замечательна тем, что (см. [40]): «Как было отмечено в рецензии в Zentralbladt, таких пространств, кроме гильбертова, нет… тем самым установлено еще одно свойство, выделяющее пространство Гильберта из класса всех нормированных пространств, как это делает С.С. Кутателадзе [101]».

После этого в 1935 г. интерес ученого перешел к изучению объектов, известных сегодня как обобщенные функции ([50] и [42]). Об этих работах И.М. Гельфанд писал: «По существу Леонид Витальевич первым понял значение обобщенных функций и написал об этом задолго до Лорана Шварца… сделанная намного позже работа А.Г. Костюченко и моя об использовании обобщенных функций для спектрального анализа операторов была именно той, которую Леонид Витальевич не написал в свое время. По существу же он четко и ясно понимал эту работу, какие теоремы можно получить» [99, С. 89].

Предмет научных изысканий Канторовича 1935–1936 гг. родился из мысли о необходимости добавления к аппарату ФА таких пространств, где есть порядок, в результате разработки которой появились полуупорядоченные пространства, иначе – векторные решётки, то есть пространства, наделённые определённым образом согласованными векторной и порядковой структурами [53] (см. также определения в Приложении 2), ставшие объектом активных изысканий как в СССР, так и за рубежом. В 1938 г. работа «Функциональный анализ на основе теории полуупорядоченных пространств», отмечена первой премией Всесоюзного конкурса работ молодых ученых. Появившийся класс полуупорядоченных векторных пространств, где каждое непустое порядково-ограниченное множество имеет точные грани, называется теперь пространствами Канторовича или *K*-пространствами (его исследования см. в [74]).

Данным направлением активно занялись Х. Фрейденталь и Г. Биркгоф; также во второй половине 1930-х гг. смежные исследования проводил М.Г. Крейн, в работах которого изучались нормированные пространства с конусами положительных элементов. А в 1980-е гг. *K*-пространства опять «придумали» и назвали «булевы линейные пространства» (см. [38, С. 21]).

Как сейчас известно любое *K*-пространство является эквивалентной моделью действительных чисел (см. подробнее о принципе переноса для *K*-пространств в статьях Кусраева А.Г. и Кутателадзе С.С. [94], [96], [97]) и тем самым расширяет возможности построения ТЛН. Что интересно, Канторович говорил, что экономическая математика тесно связана с *K*-пространствами, что и было позже показано через связь ЛП и *K*-пространств: *K*-пространство – максимально общая структура, где работает ЛП; «выполнение в абстрактной структуре любой из принятых формулировок принципа двойственности с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является *K*-пространством» [104, С. 31].

Сам же Канторович занялся вопросами аналитического представления линейных операций, которые преобразуют одно пространство в другое, и вопросами, связанными с функциональными уравнениями в линейных пространствах, в ходе разработки которых ему, во-первых, удалось представить в терминологии полуупорядоченных пространств принцип мажорант, а также ряд связанных с этой темой фундаментальных теорем, а, во-вторых, пришлось сделать дальнейшее обобщение – так появились пространства, которые нормируются элементами полуупорядоченных пространств (например, для банаховых пространств – пространства-$\boldsymbol{B}_K$). Применив принцип мажорации к численным методам (к бесконечным линейным системам), Канторович получил новые результаты по сходимости, оценкам и характеристикам приближённого решения [56], [285].

Функциональный анализ и приближенные методы. Эта тематика получила особенно активную разработку в творчестве Канторовича уже позднее – в послевоенные годы. Очень значимая работа этого периода «Функциональный анализ и прикладная математика» [71], вышедшая в 1948 г., демонстрирует варианты различных приложений ФА к исследованию вопросов вычислительной математики. Вместе с исследованием различных типов методов в данной статье была изложена и общая теория приближенных методов. К другим особенно значимым статьям по последней теме необходимо отнести [36]. Канторович получил методы, которые, исходя из разрешимости приближенного уравнения, отвечают на вопрос о существовании точного решения исходной задачи и нахождении области, где оно лежит. Данные работы привели к тому, что появилась новая область исследований, которую стали называть «доказательные вычисления» [46], [48], [47].

Метод имеет многочисленные применения, в том числе для понижения размерности систем, в частности – при применении метода агрегирования экономических систем. Интересным также является подход – нормировка исходного пространства элементами полуупорядоченных пространств [67], [41]. Например, функция может быть нормирована не просто своим максимумом на интервале, а набором максимумов на подынтервалах. Таким образом, занимая одно из центральных мест в математическом творчестве Канторовича, теория *K*-пространств позже нашла свое применение в экономике и, более того, во многом определили их дальнейшее развитие.

Занимаясь вычислительной тематикой, Канторович внес вклад в прогресс вычислительной техники: он заведовал проектированием устройств и стал автором ряда изобретений, предложив среди прочего идею специализированных процессоров для повышения производительности ЭВМ. Не обошел он стороной и программирование, которым с начала 1950-х гг. занималась группа под его руководством. Причем не только для численных решений, но и аналитических выкладок (тогда это было совсем нетипично). Исследования были передовыми по тому времени (см. [111, С. 52–55]).

К концу 1930-х гг. Канторович вырос в математика с широким диапазоном исследований, получивших известность в научных кругах всего мира.

2.3. О начале творчества Канторовича в области экономики

Зарождение интереса Канторовича к экономике. Хотя интерес Канторовича к экономике проявился еще в студенческие годы, весь первый период своего научного творчества он был увлечен преимущественно математикой.

Широкой публике Канторович известен больше не как математик, а как экономист. По его словам, интерес к экономике у него был всегда: он с большим интересом слушал лекции по политэкономии, после 3-го курса проходил практику экономистом. Естественно, выбор научных тем определяется не только персональными интересами, но и внешними факторами. В 1936–1937 гг., работая над вопросами теории полуупорядоченных пространств, он почувствовал некоторую неудовлетворенность. Конечно, его работы были интересными и успешными, но мир находился под угрозой фашизма. Канторович вспоминал: *«Было ясно, что через несколько лет наступит тяжелейшая война… И я почувствовал ответственность… У меня было ясное ощущение, что слабым местом… было состояние экономических решений»* [110, с. 50].

Начало исследований. Канторович начал заниматься вопросами линейной оптимизации в 1938 г. в связи с задачей оптимальной загрузки станков фанерного треста. Он сразу заметил, что многие другие экономические проблемы приводят к аналогичным математическим задачам – максимизации функции при многих ограничениях. Следует заметить, что в ряде практических задач не могут непосредственно быть применены традиционные методы математического анализа, так как при этом возникает огромное количество (часто миллионы) систем уравнений, что совершенно не применимо практически.

Сначала для решения стоящей перед ним задачи Канторович предложил метод, о котором, по воспоминаниям автора, впервые был сделан доклад на Октябрьской научной сессии Ленинградского педагогического института им. Герцена в 1938 г. (в соответствии с [40] текст [110, С. 51–52] является записью этого доклада). Однако этот метод не был достаточно алгоритмичен. В конце того же года в связи с некоторыми идеями ФА Канторович предложил общий метод решения подобных задач, – метод РМ.

Из текста видно, как ученый пришел к РМ (анализируя задачу при двух ограничениях) и что он набросал алгоритм СМ. СМ естественнее с геометрической точки зрения, чем метод РМ, построенный на основе теоремы двойственности (ТД), и, соответственно, логически должен был предшествовать ему. Однако, Канторович во всех работах использовал РМ. Невольно встает вопрос, как вышло, что пропущена логически напрашивающаяся стадия. Этот доклад отвечает на него, показывая, что идея СМ была, но не получила продолжения. Конечно, СМ лишь обозначен без подробностей, но, зная глубину понимания Канторовича, очевидно, он видел, как эту идею развить. Причины, почему это не было сделано, автор [38, С. 633] видит в том, что в отсутствии вычислительных машин СМ был неосуществим (см. 4.2: у Данцига было такое же мнение годы спустя) и в том, что метод РМ плюс к ответу несет информацию о свойствах этого ответа (см. ниже).

В итоге, Канторович остановился на методе РМ, показавшемся ему перспективным благодаря алгоритмичности и выявленному автором содержательному экономическому значению РМ. Этот метод оказался одним из самых простых и эффективных численных методов ЛП, сделав решение задач такого рода осуществимым практически.

И еще одно соображение: как говорилось выше, у Канторовича рос интерес к экономике и чувство гражданской ответственности в обстановке надвигавшейся войны. Он смотрел на задачу с новой, экономической, точки зрения. Он писал (см. [111, С. 378]): «Каждый раз, когда я начинал заниматься этим кругом вопросов, я должен был выбирать, уделять ли мне внимание математической стороне вопроса – настолько простой в сравнении с другими математическими вопросами (как я мог судить по собственному опыту), что любой математик мог бы формализовать и “навести строгость” на изложенные идеи, или же экономической, прикладной стороне, которая была новой, нетривиальной и вызывала сомнения и возражения. Я, естественно, предпочитал последнее».

По результатам соответствующих исследований «в мае 1939 г. он делает доклад на специально созванном в университете совещании с приглашением работников промышленности, а по материалам доклада и обсуждения пишет небольшую книгу [39], которую издательство университета очень оперативно издает.» [91, С. 294]. Эта книга стала первым трудом Канторовича по экономической тематике.

Работа [39] была переведена на многие языки. Английский перевод издан в 1960 г. [277] вместе с вводной статьей Купманса [306] и стал трудом года по ИО, а Канторович получил диплом Американского общества ИО.

Общая характеристика работы 1939 г. Дается общее описание и анализ работы [39], ее ценности с точки зрения математики и приведенных в ней конкретных примеров, иллюстрирующих применения математических методов для организации производства. Приведены основные типы задач ЛП, сформулированные и решенные автором, и их важнейшие применения.

Ценность работы [39] с математической точки зрения состоит в изложенном в ней методе решения задачи на экстремум, выходящем за рамки классического математического анализа. Также интересно описание применения математических методов для организации производства на конкретных примерах. Это – первая публикация на тему ЛП, как в творчестве Канторовича, так и в мире. В ней поставлены основные задачи ЛП и перечислены его важнейшие применения на примере девяти экономических задач, описан метод их решения. Три приложения к работе содержат изложение и обоснование разработанного автором метода решения указанных экстремальных задач – метода РМ. Сначала приводится алгоритмический способ решения проблемы, а в заключении описаны два подхода к доказательству существования решения. В книге рассмотрены три типа задач.

Задача А. Есть n станков, вырабатывающих изделия из m деталей. При обработке k-ой детали на i-ом станке, в день производится $a_{i,k}$ штук деталей. Обозначим через $h_{i,k}$ время для обработки k-ой детали на i-ом станке. Надо определить $h_{i,k}$ так, чтобы получить наибольшее число комплектов. Решение этого вопроса приводит к задаче определения $h_{i,k}$ ($i = 1, ..., n$; $k = 1, ..., m$) из условий:

1) $h_{i,k} \geq 0$;

2) $\sum_k h_{i,k} = 1$;

3) если положить $\sum_i a_{i,k}\, h_{i,k} = z_k$, то $z = z_1 = z_2 = \ldots = z_m$ максимально.

Задача В. Найти числа $h_{i,k}$ ($i = 1, ..., n$; $k = 1, ..., m$) из условий:

1–3) *задачи А* и условия

4) $\sum_{i,k} c_{i,k}\, h_{i,k} \leq C$.

Задача С (наиболее общая). Найти числа $h_{i,l}$ из условий:

1) $h_{i,l} \geq 0$;

2) $\sum_k h_{i,k} = 1$;

3) если положить $\sum_{i,l} \gamma_{i,k,l}\, h_{i,l} = z_k,$, то $z = z_1 = z_2 = ... = z_m$ максимально.

Все три задачи легко модифицируются. Возможен вариант, допускающий некомплектное производство, например, некомплектные детали надо докупать по более высокой цене, или сверхкомплектные детали дешевле оцениваются, чем общий комплект, и поэтому для оценки стоимости продукции существенную роль играет число полных комплектов. Возможны и другие постановки задачи. Дан способ сведения к этим задачам вопросов, возникающих при требованиях:

– наиболее полного использования механизмов;

– максимального уменьшения отходов;

– максимального использования комплексного сырья;

– наиболее рационального использования топлива;

– наилучшего выполнения плана строительства при наличных материалах;

– наилучшего распределения посевной площади;

– наилучшего плана перевозок.

Данциг писал, что [39] «…содержит почти все области приложений, известные в 1960 г.» [22, С. 29] и «Если бы первые работы Канторовича были бы в должной мере оценены в момент их первой публикации, то, возможно, в настоящее время линейное программирование продвинулось бы значительно дальше» [22, С. 29–30].

Значение работы 1939 г. В [39] дан метод решения класса задач выбора самого выгодного из огромного числа вариантов. Он делает решение вопроса осуществимым даже в сложных случаях, когда выбор производится из миллиардов возможностей с учетом дополнительных условий. Также найден экономический смысл РМ (впоследствии стало ясно, что они – аналог цен западной теории стоимости), рассмотрены вопросы их применения в случае изменений плана, нахождения коэффициентов эквивалентности продукции и кооперирования производителей.

Конечно, работа являлась далеко не законченной, но ее можно считать базой последующих исследований. Вскоре после неё было проведено глубокое изучение экономического смысла РМ, опубликованное, однако, лишь в 1959 г. в работе [72]. В этой работе дана постановка экстремальных задач с ограничениями в функциональных пространствах как в линейном, так и нелинейном случаях. Намечены задачи НЛП, а также его применения к экстремальным математическим задачам. В конце 1940-х гг. сделано много расчетов без применения вычислительных машин [78].

Математическая часть работы 1939 г. Остановимся подробнее на идее предложенного метода. Для определенности рассмотрим задачу *A*. Метод основан на следующем факте: оказывается, существуют такие множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, отвечающие каждой детали, что их нахождение почти сразу приводит к решению задачи. Если для каждого i рассмотреть произведения $\lambda_1 \cdot \alpha_{i,1}, \lambda_2 \cdot \alpha_{i,2}, \ldots, \lambda_m \cdot \alpha_{i,m}$ и выделить k, для которых оно максимально, то для всех прочих k можно принять $h_{i,k} = 0$. Немногие выделенные $h_{i,k}$ легко определить из условий 1–2 задачи *A* и условия $z_1 = z_2 = \ldots = z_m$. Найденные $h_{i,k}$ дают максимум z – решение задачи. Таким образом, вместо поиска $n \cdot m$ неизвестных $h_{i,k}$, надо найти m неизвестных λ_k. Сами λ_k легко находятся последовательными приближениями. Решение осуществимо практически, контролировать его правильность легко. Большинство $h_{i,k}$ равны 0, то есть производство осуществимо практически: большинство станков работает с одним видом деталей, и только на некоторых происходит одна замена в течение дня, необходимая для комплектности.

В [39] подробно изложен этот метод, являющийся одним из наиболее эффективных для решения задач такого рода. Рассматривается в основном применение метода к задаче *A*, хотя далее говорится и о других задачах. Сначала приведены идея и алгоритм решения задачи *A* для $m = 2$, затем путь распространен на любое m. Даны примерная схема вычислений для конкретной простой задачи и указания действий в вырожденных случаях, описан алгоритм контроля решения, соображения о нахождении приближенного решения для ускорения поиска, применение метода к задачам *B* и *C* с примерами, подробно решена задача *A* в сложном случае фанерного треста. В дополнении приведены аналитическое и геометрическое (с использованием теоремы отделимости Минковского) доказательства существования РМ и геометрическая интерпретация ЗЛП.

Идеи, изложенные в [39], включая концепцию двойственности ЛП, позже были представлены и оформились в работах Данцига и книге фон Неймана [115].

Интересно замечание Канторовича о важной роли РМ. В ходе решения они выступали только как техническое средство, и могло показаться, что метод не имеет особых преимуществ по сравнению с другими, кроме простоты и краткости. Но это не так: λ_k имеют гораздо большее значение – они дают не только решение, но и позволяют указать ряд его важных характеристик (тут важна локальная устойчивость λ_k). Дело в том, что λ_k – показатели производительности станков при оптимальном распределении. С их помощью решается, например, вопрос об изменениях решения при небольших вариациях условий, о целесообразности кооперирования, об оценке потерь при отступлении от оптимального плана.

2.4. Экономические исследования Канторовича довоенных лет

Ученик и соратник Канторовича А.Г. Аганбегян в своих воспоминаниях писал: *«Меня всегда поражало, что человек, не имевший систематического экономического образования, не связанный с решением экономических проблем даже эпизодически, будучи профессиональным математиком, причем не прикладником, а очень крупным теоретиком, исключительно глубоко разбирался в экономике, видел причины многих явлений – глядел вглубь. Его суждения иногда были парадоксальны... Он, возможно, благодаря своему математическому мышлению или природному складу ума как-то проникал внутрь проблем и это давало блестящий результат. Идеи Канторовича осуществили в экономической науке огромный прорыв и положили начало очень широкому направлению исследований. Он дал совершенно новый инструментарий исследований как теоретических экономических проблем, прежде всего, связанных с экономическим равновесием, с экономической динамикой, так и прикладных вещей, связанных с эффективностью»* [110].

Как уже говорилось, книга [39] содержала постановку задачи минимизации линейной функции на множестве, задаваемом линейными ограничениями типа равенств и неравенств. Канторович разработал теорию этих задач и предложил методы их решения. После работы [39] Канторович продолжил исследования математических методов экономики, и уже через год были готовы две работы. Первая – заметка [60] – содержала наиболее общую математическую трактовку предложенного автором вариационного принципа и метода РМ, и также общую формулировку условий экстремума при наличии ограничений в бесконечномерном пространстве. Вторая – статья [76], которая была впервые доложена в 1940 г. Хотя эта работа и носила чисто прикладной характер, она также содержала постановку и решение ставшей классической ТЗ. Продолжением последней стала статья 1942 г. [52], рассматривающая бесконечномерный аналог ТЗ.

2.5. Исследования Канторовича довоенных лет и современная наука

Положение работ Канторовича в истории оптимизационных методов экономики. В классической математике задачи на условный экстремум рассматривались только для ограничений типа равенств, и в этом случае в качестве аппарата для их решения использовался ММЛ. Сам Лагранж, если бы исследовал неравенства, то, возможно, мог бы получить результаты и для общего случая, однако он их не рассматривал: у него были исключительно равенства и для них – ММЛ. Когда все фигурирующие в задаче объекты удовлетворяли условиям гладкости и условия представлены только в форме равенств, то нужно было поступать с функцией Лагранжа $\mathcal{L}$, как будто бы переменные независимы, то есть просто дифференцировать $\mathcal{L}$ по x. Если же рассматривается выпуклая экстремальная задача с неравенствами, то здесь уже необходимым условием является следующее. Во-первых, сама $\mathcal{L}$ достигает минимума: если $\hat{x}$ – решение, то существует такое $\hat{y}$, что выполнено условие минимума: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n_+}\mathcal{L}(x,\hat{y})=\mathcal{L}(\hat{x},\hat{y})$. Во-вторых: $\hat{y}\geq 0$, и должно быть выполнено условие дополняющей нежесткости: $\langle\hat{y},A\hat{x}-b\rangle=0$. Необходимое условие получил Каруш (о нем чуть ниже).

В то же время изучением СЛН занимались Фурье, Минковский, Вейль и другие. И хотя ими были достигнуты значительные успехи, и созданный в процессе их исследования аппарат позволяет получить условия экстремума в задачах с ограничениями-неравенствами, первые работы по экстремальным задачам с ограничениями общего вида появились только в конце 1930-х – начале 1940-х гг.

К следующему периоду можно отнести исследования Чикагской школы (Г. Блисс, О. Больца, Е. Макшейн, Л.М. Грейвс, М.Р. Хестенс и др.), для представителей которой характерен интерес к возможно более широкой постановки вариационных задач. В этой связи надо упомянуть исследования Ф. Валентайна 1937 г. по условиям экстремума для задач вариационного исчисления при наличии разного рода ограничений типа неравенств; Каруша, исследовавшего гладкие конечномерные задачи минимизации с общими ограничениями и пришедшего в 1939 г. к условиям экстремума I и II порядков, и Ф. Джона, который в качестве темы исследования избрал экстремальные проблемы в геометрии и получил сходные результаты (см. [88, С. 12]).

Интерес к данному направлению появился не сразу. Так, например, Каруш, получив результаты, написал диссертацию, защитил ее в Чикаго, но она нигде не была опубликована, и никто про это, соответственно, не узнал. И потом, когда вдруг выяснилось, что это направление действительно очень важно, это же (необходимые условия) разработали Кун и Таккер.

В СССР, как уже было сказано, пионером в этой области был Канторович. Первая его работа этой тематики вышла в 1939 г. и содержала постановку задачи минимизации линейной функции на множестве, задаваемом линейными ограничениями типа равенств и неравенств. Он разработал теорию этих задач и предложил некоторые методы их решения. В 1940 г. появилась его заметка, содержавшая общую формулировку условий экстремума при наличии ограничений в бесконечномерном пространстве. Но эти работы, как и те, что упоминались в связи с исследованиями чикагской школы, не получили единодушного признания и широкого распространения.

Значительно позднее, в конце 1940-х гг., в США вновь возвращаются к этим вопросам. Основными действующими лицами здесь стали Данциг и, частично, фон Нейман. Тогда же вошло в употребление название «линейное программирование». О рождении названия «ЛП» Данциг в своих воспоминаниях [192] говорил так: «Военные свои различные планы или намечаемые графики учений, снабжения и развертывания воинских подразделений называют программами. Впервые проанализировав задачу планирования из Военно-воздушных сил и увидев, что она может быть сформулирована в виде СЛН, я дал моей первой статье название «Программирование в линейной структуре». Летом 1948 г. мы с Купмансом посетили корпорацию RAND. В один из дней мы прогуливались вблизи побережья Санта-Моника. Купманс спросил: «Почему бы “программирование в линейной структуре” не сократить до “линейного программирования”?». Я ответил: «Отличная идея! Начиная с этого момента, так и будет». Очень важную роль сыграл именно Данциг, так как под воздействием его исследований и организационной деятельности выяснилось, что данное направление имеет очень большое значение, в результате чего ученые из разных других областей стали проявлять большой интерес к этой области, и туда направили свои усилия люди, которые не имели отношения ни к экстремальным задачам, ни к теории неравенств. Появились работы Гейла, Куна, Таккера; затем присоединились и другие ученые (например, Ки Фань). Они все работали в рамках одного временного промежутка и в сходных ведомствах.

Естественным развитием ЛП стало его обобщение на нелинейный случай, получившее в общем случае название МП (автор этого названия – Дорфман), а при выпуклых минимизируемой функции и ограничениях – выпуклого программирования. Основными авторами, после работ которых по условиям экстремума и методам его нахождения эти направления стали широко известны и начали активно разрабатываться, были Г. Кун, А.У. Таккер и Р. Курант.

Также прослеживается родство этих вопросов с теорией задач оптимального управления, которая появилась в результате взгляда на них с несколько иных позиций. Здесь необходимо отметить достижение таких ученых как Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский и Р.В. Гамкрелидзе, сформулировавших и доказавших необходимые условия оптимальности в форме так называемого принципа максимума [124]. Позволяющий рассматривать оптимальное управление в областях в виде замкнутых множеств (в отличие от классического вариационного исчисления, работающего с области выбора оптимального управление в виде открытых множеств) принцип максимума Понтрягина был им сформулирован в виде гипотезы; первое доказательство для линейных систем с управлением дал Гамкрелидзе, для нелинейных – Болтянский. О том, как этот принцип вписывается в общую концепцию развития методов оптимизации по пути обобщения понимания ММЛ см. в [25].

Сходными вопросами занимался также Р. Беллман, а позднее появился и цикл работ А.Я. Дубовицкого и А.А. Милютина, Б.Н. Пшеничного, Л. Нейштадта, Г. Халкина, Дж. Варги и др., в которых были предложены общие схемы получения условий экстремума для абстрактных задач оптимизации с ограничениями, позволяющие охватить и теорему Куна–Таккера, и принцип максимума, в то время как в исследованиях Р. Рокафеллара получил завершенную форму ВА, оказавшийся исключительно удобным аппаратом исследования экстремальных задач.

Связи с экстремальными задами, ФА, дискретной математикой. Канторович уже перед войной стал создателем замечательной школы в области ФА. Он часто упоминал о большом влиянии этих идей на его творчество при разработке ЛП, поэтому видится уместным показать некоторые связи этих областей. Сходным образом понимал ситуацию фон Нейман; его основная теорема ТИ, модели экономического поведения и другие экономико-математические результаты несут явный отпечаток идей ФА и двойственности. При таком подходе, двойственность естественно рассматривается в терминах ФА. РМ представляют, по существу, решение двойственной задачи (эта терминология появилась позднее).

Как пишет А.М. Вершик: «*Теория двойственности линейных пространств с конусом* (здесь и деле в этой цитате курсив наш. – *А.А.*) дает естественный язык для задач линейного программирования в пространствах произвольной размерности… *Теорема Хана–Банаха и теоремы линейной отделимости* – фундаментальные теоремы классического линейного функционального анализа – есть чистейший выпуклый геометрический анализ. То же относится и к общей *теории двойственности линейных пространств.*

Классическая теория линейных неравенств Г. Минковского – Г. Вейля в современной форме появилась в работе Г. Вейля тридцатых годов чуть раньше работ Л.В. Канторовича – эта связь особенно прозрачна. *Теорема об альтернативах, леммы Фаркаша и т.д., двойственность Фенхеля–Юнга в теории выпуклых функций и множеств* – все это объединилось с теорией ЛП уже в пятидесятые годы. Однако заслуга Леонида Витальевича, по-видимому, не сразу узнавшего обо всех этих связях, в том, что он нашел единый подход, базирующийся на идеях функционального анализа и вскрывающий идейную суть вопроса. Это одновременно давало и базу для численных методов его решения. Не преувеличивая можно сказать, что функциональный анализ стал фундаментом всей математической экономики» [110, с. 141].

Если смотреть хронологически, то взгляды Канторовича прежде всего перекликаются с теорией наилучшего приближения, и, в первую очередь, с исследованиями Крейна по *L*-проблеме моментов. Сам «Крейн одним из первых обратил внимание на это» [110, с.141].

Хотя экономические проблемы, по своему существу, являются конечными (так как имеется лишь ограниченное множество продуктов и ресурсов, а время можно считать дискретным), конечные модели получаются слишком громоздкими и, соответственно, необозримыми для анализа и для расчета. По этой причине оказывается гораздо эффективнее вместо них использовать родственные им непрерывные континуальные модели. Такова, например, модель развития (роста) при техническом прогрессе с вмененными основными фондами (Солоу, Канторович), которая описывается функциональным уравнением, в свою очередь хорошо поддающимся не только общему теоретическому анализу, но и практическому расчету.

Для проведения исследований экономических моделей часто применяются различные *численные методы* нахождения решений. Как показала практика, наиболее плодотворными среди них оказались следующие их группы:

1. Метод наискорейшего спуска и градиентные методы.
2. Методы ньютоновского типа.
3. Общая теория приближенных методов.
4. Принцип мажорант и методы последовательных приближений.

Сейчас эти методы хорошо изучены, они широко представлены в литературе по ФА и во многих работах по различным разделам прикладной математики. С их помощью часто можно установить на основании проведенных расчетов существование решения, область, в которой оно единственно, а также и некоторые другие свойства этого решения. Как известно, Канторович в свое время сам очень многое сделал для развития данного направления. Так, например, в работах [71], [36] разрабатывается общая теория методов приближенных вычислений (демонстрируются различные варианты применения ФА для изучения проблем вычислительной математики), основанная на следующей идее: пространство, в котором задано исходное уравнение, отображается на более простое пространство; а уже в этом более простом пространстве ведется исследование приближенного уравнения. Канторович доказал достаточно общие теоремы, дающие возможность установить разрешимость приближенного уравнения, а также сходимость приближенного решения к точному решению в зависимости от свойств исходного уравнения. Также Канторовичу удалось получить ряд результатов, которые позволяют на основе разрешимости приближенного уравнения устанавливать существование точного решения исходной задачи и даже определять область его расположения.

Данная тематика напрямую связана с *теорией K-пространств*, которая является одним из основных достижений Канторовича в ФА. Среди прочих она имеет и такое значение: при построении банаховых пространств в качестве нормы вместо чисел можно использовать элементы *K*-пространства, конечномерного или бесконечномерного. Например, в качестве нормы функции берется не ее максимум на интервале, а набор локальных максимумов на подынтервалах, что дает значительно более точное описание. Применительно к экономике этот подход оказался полезен при агрегировании, если оно делается более детальным, чем обычная стоимость, образом. Так при применении метода агрегирования экономических систем появляется возможность понижения размерности и при этом – исследования близости приближенного решения (расположенного в аппроксимирующем пространстве, которое получается агрегированием переменных), имеющего место при использовании агрегированной модели, к искомому решению (в исходном пространстве).

С другой стороны, важно заметить, что ЛП тесно связанно и с дискретной математикой**.** Так основную задачу теории антагонистических матричных игр с нулевой суммой (а именно теорему о минимаксе) связал с ЛП (теоремами двойственности) еще фон Нейман (см. воспоминания Данцига, цитированные в работе [17]). Более того, в итоговом доказательстве теоремы фон Неймана о минимаксе фактически содержалась теория двойственности. По этой причине, можно сказать, что оба эти подхода чрезвычайно полезно рассматривать в их взаимосвязи, так как в этом случае полнее раскрываются идеи каждого из них, а изучаемая задача и пути ее решения становится более ясными.

Приближенные методы находят в экономике естественное применение: сложной модели, расположенной в некотором пространстве, сопоставляется более простая, с меньшей размерностью модель в этом же или другом пространстве посредством однозначного или одно-многозначного соответствия. При этом, как уже говорилось, принципы и теоремы общей теории часто дают возможность на основе исследований более простой системы дать точные заключения о начальной системе: устанавливать существование решения, его единственность, асимптотические свойства и т.д.

Теорема Хана–Банаха–Канторовича. Теорема Хана–Банаха о продолжении линейных функционалов в аналитической и геометрической формах (см. Приложении 2), имеющая особое значение для ВА, относится к основополагающим: на этой базе были разработаны теоремы об отделимости (см. Приложении 2), являющиеся неотъемлемой частью ВА. На них строится весь дальнейший аппарат, в частности, важнейшая теорема о достижении минимума выпуклом функционалом на выпуклом множестве, замкнутом относительно сходимости по мере (см. Приложение 2). Важнейший шаг при исследовании экстремальных задач для выпуклых числовых функционалов – применение теорем отделимости [70, Т. III, §2], основанных на теореме Хана–Банаха о продолжении линейных функционалов (см. [70, Т. II, §4.1]). Очень ценным для разных приложений оказалось то, что теорема Хана–Банаха обобщается на случай продолжения мажорируемых линейных операторов со значениями в K-пространстве [53] (см. этот результат из [74, С. 334] в Приложении 2) и позволяет изучать выпуклые операторы F: $X \to Y$, где X – векторное пространство, а Y – K-пространство, то есть операторы, для которых справедливо неравенство Йенсена: $F(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \leq \alpha \cdot F(x) + \beta \cdot F(y)$, $\alpha, \beta \geq 0$; $\alpha + \beta = 1$; $x, y \in X$.

Таким образом, теория K-пространств нашла широкое применение в ВА при исследовании экстремальных задач и в экономико-математических моделях.

Теория выпуклых операторов и её приложения к исследованию задач выпуклого программирования в K-пространствах подробно изложена в книге [2] (см. также обзор [95]). Также об этих вопросах можно прочесть в монографии [70].

Влияние экономических задач на математический аппарат. Особый интерес представляет «*обратная связь*» математических методов экономики и чистой математики, когда разработанный в связи с запросами экономики математический аппарат позволил получить существенное продвижение и в рамках самой математики. Рассмотрим это влияние более конкретно.

ТСЛН развилась на сто лет позже, чем теория СЛУ, и инициировано это было именно необходимостью решения задач, продиктованных потребностями экономики того времени.

ТЗ была математически оформлена и получила эффективные методы решения (например, метод потенциалов) около 1940 г. Первоначальное ее изложение под названием задачи о перемещении масс было дано в 1942 г. Канторовичем в статье [52], в которой исследуется бесконечномерный аналог ТЗ, которая была изучена в работе [76]. Возникнув сначала из экономики, в статье [52] задача уже формулировалась в абстрактном виде для произвольного метрического пространства, то есть получила значительные обобщения. Более того, в данной работе естественным образом введено понятие расстояния между двумя множествами одинаковой массы в компакте как минимальный объем затрат по перемещению одной массы из одного места в другое. Эта метрика (Монжа–Канторовича–Васерштейна) впоследствии нашла свое применение в теории вероятностей для распределений, собственно в ФА, эргодической теории, статистической физике и космологии, приведя к ряду новых результатов. В ставших же продолжением [52] работах [83], [82] появилось функциональное пространство Канторовича–Рубинштейна, часто применяемое в экономике и теории вероятностей.

Этим значение работы [52] не ограничивается: на её основе Канторовичу в 1948 г. в статье [59] удалось получить более полное решение проблемы Монжа. Так математические методы, рожденные в качестве ответа на запрос со стороны экономики, пройдя некоторый путь развития, оказались способными дать сильный толчок для развития других, не связанных с ними напрямую, областей чистой математики и позволили решить давние чисто математические задачи, подойдя к ним с новой стороны (заметим, что чистая математика продолжает стимулироваться ТЗ, причем на самом высоком уровне: пример – книга [382] лауреата Филдсовской премии 2010 г. С. Виллани, в которой ТЗ связывается с динамическими системами, дифференциальной геометрией, вероятностью и кривизной Риччи). Более подробно это описано в пункте 3.4 (другие примеры применения ЛП к проблемам чистой математики см. в [20], [23]).

ЛП изменило положение в проблемах аппроксимации (см. [75]): если раньше использовался преимущественно метод наименьших квадратов (так как кроме теоретических обоснований были и хорошие алгоритмы), то ЛП позволило использовать равномерное приближение (там, где это теоретически оправдано) в большом классе задач, когда мы строим на конечном множестве приближение в виде линейно зависящей от параметров функцией. Аналогична ситуация, когда для решения линейных интегральных или дифференциальных уравнений используют приближение правой части при помощи линейной комбинации заданных функций.

Бесконечномерные задачи также не избежали подобного влияния ЛП. К вариационному исчислению можно подходить с точки зрения НЛП в бесконечномерном пространстве. Оказалось, самые существенные достижения, связанные с двойственностью и численными методами, допускают обобщение с конечной на бесконечную размерность. Говоря об алгоритмах, заметим, что вышеназванные соображения (наряду с вычислительной математикой и теорией приближений) способствовали распространению алгоритмического подхода в ФА.

Значительно повысилось роль дискретной математики, статус которой уравнялся с непрерывной, что объясняется как внутренними изменениями, так и влиянием извне – появлением ЭВМ. Вообще развитие ЭВМ и программирования имеет сильнейшие двустороннее влияние с математической экономикой и моделированием (см. [75]).

Отчасти это объясняется необходимостью упрощений, но зачастую самой сутью прикладных задач. Особо отметим влияние СМ и другие оптимизационные алгоритмы, а также графы (ТЗ и, соответственно, потоки в сетях) и комбинаторику. С дискретным программированием связаны метод ветвей и границ и динамическое программирование.

Было создано множество алгоритмов для ЗЛП, их эффективность растет и делает доступными всё более сложные проблемы (причем, часто получается использовать специфику задачи). Для НЛП тоже найдены методы (например, часто используют линеаризацию или выделение возможных направлений), но в целом, эти задачи, конечно, гораздо труднее. Интересно, что идеи многих методов, таких как декомпозиция и штрафные функции, почерпаны в экономической интуиции.

Математическая экономика становится полигоном приложения всё более сложной математики (например, модель экономического равновесия обращается к теоремам о неподвижных точках точечно-множественных отображений, дифференциальной геометрии и теории меры; см. далее [75]).

См. в [75] ряд других приложений (регуляризация некорректных задач) и влияний (в теории вероятностей, математической статистике, случайных процессах, математической физике).

2.6. Результаты работ довоенных лет с современной точки зрения

1) Поставленная задача ***C*** при условии исключения особых случаев эквивалентна основной задаче ЛП. Ее можно также сформулировать следующим образом:

Задано выпуклое многогранное множество M и направленная прямая (ось) B. Тогда прямая задача звучит так: найти точку из M, лежащую на оси B и при том как можно выше. А двойственная задача – так (по существу, эта формулировка содержится в [128]): найти гиперплоскость, пересекающую ось B как можно ниже и разделяющую M и положительную часть оси B.

2) Для этой проблемы – нахождения экстремума линейных функций при ограничениях в форме равенств и неравенств или же максимума вогнутой кусочно-линейной функции на выпуклом множестве – даны НДУ оптимальности решения, которые опираются на существовании в точке максимума опорной гиперплоскости, чьи коэффициенты – РМ – есть решение двойственной задачи. То есть, дана характеристика оптимального решения через двойственные переменные (РМ), но, заметим, что ни для применения, ни для

доказательства метода нет необходимости прибегать к двойственности – достаточно свойства опорной гиперплоскости.

3) На базе НДУ были получены итеративные алгоритмы поиска решения (методы РМ), равные по широте применимости и эффективности разработанным позже (СМ Данцига). Заметим, метод РМ, как он был описан, чуть хуже СМ для реализации на ЭВМ (что тогда вообще не рассматривалось), так как на определенных этапах надо было принимать решения, которые не являлись «механическими». Именно в силу удобства СМ стал стандартом де-факто. СМ тоже итеративный (см. далее), в нем также появляются множители Лагранжа (Канторович на каждой итерации корректирует множитель, а потом – переменную, а Данциг – наоборот). Что интересно, метод РМ оказался эффективнее СМ (см. примечание редактора в [31, С. 659] со ссылкой на [378]). «Метод корректировки множителей [39], входящий в эту группу методов, совпадает, по существу, с методами одновременного решения прямой и двойственной задач. Он ближе всего к разработанному в 1957 г. методу Данцига–Форда–Фалкерсона» [24] (см. [111, С. 377]). В 1940 г. издана статья Канторовича [60], рассматривающая абстрактно (с использованием терминологии алгебры и ФА) тот же вопрос, что и [39], на которую он не сослался: «…учитывая обстановку, я не хотел, чтобы та моя практическая работа была использована вне страны» [40, С. 201].

4) Для ТЗ дана эффективная модификация метода РМ – метод потенциалов, описанный в работах [76], [52] и примененный позже (как метод последовательного улучшения плана) к другим проблемам в работе [78]. Он наиболее близок модифицированному СМ (см. [129, С. 419–420.]). Также в [76] дан критерий оптимальности решения, поставлены более общие задачи. В 1942 г. вышел абстрактный вариант этой работы [52] с бесконечномерными обобщениями задачи и методов ее решения (подробно о взаимоотношении разных методов см. [129]; точка зрения Канторовича на достигнутое в довоенные годы – в [111, С. 375–380.]).

Дабы создать полную картину перечислим не изученные (или недостаточно глубоко разобранные) в довоенные годы моменты:

- не исследованы случаи нерегулярные (в [76] было некоторое исследование для ТЗ), отсутствия допустимых решений и неограниченности целевой функции;
- как говорилось, методы даны не в столь «механической форме», как СМ (тем не менее достаточно полно для применения во всех регулярных случаях);

- не исследована глубоко двойственность и не сформулирована четко двойственная задача (однако, в доказательстве существования РМ доказано, что они – коэффициенты разделяющей гиперплоскости [39], из чего ясно видно, что еще тогда была осознана важность теорем отделимости и двойственности).

Глава 3. Линейное программирование в работах Канторовича 1940–50 гг.

Анализ ранних работ Канторовича проведен автором данной работы в Главе 2 и [7], [10], [11]. Все последовавшие за опубликованными в книге [39] исследования Канторовича в области математических методов экономики можно разделить на две группы: те, которые были ориентированы на практическое применение и носили более частный характер, и те, которые имели большее теоретическое значение, не относясь к конкретным экономическим примерам (см. также [8], [9]).

3.1. Применение линейного программирования к частным задачам

Во время войны Канторович продолжил работы по применению ЛП, в том числе в раскрое: в работе [68] на конкретных примерах рассмотрены возможности сокращения и максимального использования отходов металла (основные моменты были включены в [78]). К работам чисто прикладного характера также относится статья 1949 г. [64], содержащая решение задачи сочетания максимальной эффективности распиловки деревоматериалов с получением заданного ассортимента продукции.

В конце 1940 г. Канторович написал (с Гавуриным М.К.) [76] и сразу же послал в журнал «Железнодорожный транспорт». Доклад по [76] состоялся в начале 1941 г. в Ленинградском Доме ученых. Опубликовали же эту работу лишь в 1949 г. в сборнике «Проблемы повышения эффективности работы транспорта» в урезанном виде (см. [40]). Эта работа дает первое подробное изложение задач о наиболее эффективных перевозках грузов и алгоритмы решения этих задач в виде созданного авторами метода потенциалов (специальной модификации метода РМ), критерий оптимальности решения, экономическую интерпретацию РМ через территориальные цены, изучение рационального размещения производства.

Из-за задержки публикации работы на Западе не знали об открытии Канторовича и ТЗ переоткрыли в США. Но и там результаты сначала не публиковались: ЛП оставалось в закрытых документах RAND (см. Главу 4), и лишь в 1951 г. вышел сборник [150].

Приоритет Канторовича помогла установить опубликованная в 1942 г. [52] (см. 3.2), где «…был и критерий и метод потенциалов. В конце приводились две задачи – задача о железнодорожных перевозках (со ссылкой на находящуюся в печати нашу статью с М.К. Гавуриным)… Эта работа, опубликованная в 1942 г. на русском и английском языках…» [40].

На Западе широкий круг ученых впервые смог узнать о вкладе Канторовича в ЛП из опубликованного в 1958 г. в «Management Science» [279] перевода [52]. Вот как Купманс описал события, которые сделали это возможным, в предисловии к английскому переводу [277]: «Несколько лет назад Мервилл М. Флуд сказал мне, что после лекции, которую он читал в декабре 1949 г. по ТЗ, математик Макс Шифман упомянул в дискуссии, что он видел аналогичные идеи в работе Канторовича «О перемещении масс» 1942 г. Ссылки на эту статью были включены в две работы Флуда, опубликованные в 1952 и 1953 гг. Вплоть до 1956 г. я упорно разыскивал эту работу, после чего написал профессору Канторовичу, послав ему несколько репринтов и попросив несколько в ответ» (Купманс имел ввиду работы [240], [239]).

В [38, С. 505] дана другая версия, что стимулом стала [59], содержавшая ссылку на [52] вместе с главными идеями [59]. Шифман заметил ее, только вышедшую в главном математическом журнале СССР. Купманс же был заинтересован подробностями, поскольку на Западе именно он открыл ЛП и ТЗ (см. 4.2). Купманс в 1957 г. получил от Канторовича вместе с [39] и [76] и в предисловии к переводу [306, С. 365] написал: «Обе статьи являются исключительными документами в истории науки управления, линейного программирования и экономической теории вообще» [38, С. 463].

В 1951 г. вышла (совместно с В.А. Залгаллером) книга [78], в которой содержится отчет о применении ЛП к вопросу рационального раскроя материалов. Это было первым (причем, несмотря на отсутствие вычислительных мощностей и сложность расчетов, успешным) приложением ЛП к производственным задачам такого размера. В книге даны новые приемы решения ЗЛП и на их базе – подробный анализ проблем экономии материала при раскрое. Книга замечательна по ряду причин. Она сочетала практическую направленность с тем, что на конкретных примерах даны общие принципы и в общем виде, вошедшие позже в [72].

Интересна история появления такого авторского коллектива математиков, изучающих чисто технологическую задачу. **Виктор Абрамович Залгаллер** был студентом матмеха ЛГУ и слушал лекции Канторовича, который высказал желание сделать учебник по спецкурсу на основе своего конспекта, что Залгаллер и осуществил за 17 дней. Скоро началась война, и Залгаллер ушел в народное ополчение (см. [28]).

Окончив (в 1948 г.) после войны матмех с отличием, и по принципиальным соображениям (см. [91, С. 298]) не воспользовавшись рекомендацией в аспирантуру, он столкнулся с проблемами с трудоустройством. Канторович устроил его на Вагоностроительный завод им. Егорова. Лениздат в 1951 г. опубликовал книгу [78] по итогам работы Залгаллера по успешному применению на производстве нового метода промышленных расчетов.

В чисто математическом приложении в книге дано доказательство методов, на которых основаны расчеты. Они созданы Канторовичем преимущественно до войны в [39], о которой не знали за пределами СССР: лишь в 1960 г. ее перевели на английский и издали при содействии Купманса. Интересна хронология работ в СССР и США. Применение на вагоностроительном заводе Канторовичем и Залгаллером математических методов раскроя совпадает с первыми публикациями исследований Данцига. Как замечено в [91, С. 298]: Данциг «стал склоняться к названию «линейное программирование» для новой дисциплины, и термин вскоре стал общепринятым. Итог несколько парадоксален: применение линейного программирования в СССР уже было, а самого линейного программирования пока не было».

Книга [78] также замечательна тем, что в ней представлен ряд интересных приемов, потребность в которых возникла потому, что расчеты вычислительно трудоемки, а Залгаллер считал всё вручную. По сути, авторы создали метод последовательных улучшений допустимого базисного решения, который наиболее близок модифицированному СМ Дж. Данцига, А. Ордена, Ф. Вулфа 1953 г. [207], и методу генерирования столбцов, при реализации которого возникла шкала (таблица) индексов, которая «была фактически функцией Белмана для соответствующего уравнения динамического программирования. Это тем более любопытно, что динамическое программирование в то время еще не было создано. Само уравнение было заменено описанием: “Если от начала любой ступени графика отложить влево по оси OX длину любой заготовки, то график должен при этом понизиться не меньше, чем на индекс этой заготовки”» [91, С. 300]. Также в книге «фактически используются идеи… метода “ветвей и границ”» [38, С. 8.]. Многие моменты были в промежуточной стадии развития: были даны лишь указания и пример вычисления без функционального уравнения.

Весной 1940 г. Канторович выполнил и сдал в печать работу [64] в журнал «Механическая обработка древесины», но в публикации отказали. В 1941 г. Канторович передал работу в журнал «Лесная промышленность», но теперь помешала война. В итоге журнал опубликовал эту работу лишь в 1949 г., когда Канторович получил Государственную премию [38, С. 6, 477]. В этой работе модифицирован метод РМ и даны технические детали приложений.

Еще одной работой экономического направления стала работа 1958 г. [32], разъясняющая связи ЛП с оптимальным решением задач оперативно-производственного планирования.

Столь широкий круг применений разработанных Канторовичем методов является лучшей иллюстрацией принципа Петербургской–Ленинградской школы, восходящей к П.Л. Чебышёву, который считал все области математики единым целым, саму ее – связующем звеном науки, техники, технологии и производства, а теорию неотделимой от практики (см. [99, С. 89]).

3.2. Методы и их применение к общим и теоретическим проблемам

Как уже говорилось, творчеству Канторовича присуще взаимопроникновение прикладных и теоретических исследований. Это произошло и с экономико-математической тематикой. Ранее уже упоминалась работа 1940 г. [60]; а в статье 1957 г. [45] дана постановка и анализ общей задачи производственного планирования. Канторович закончил [45] в 1941 г. и выступил с ней в ЛГУ 12 мая 1941 г. В [45] показано применение математики к рациональному планированию на примере моделей из [72].

Отдельно остановимся на знаменитой работе [72] 1959 г., за которую Канторович был удостоен Ленинской премии в 1965 г. Несмотря но то, что она была готова в 1942 г. (тогда она называлась «Экономический расчет наиболее целесообразного использования ресурсов», но потом Канторович изменил название на «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов») одновременно с [68], издали ее лишь в 1959 г.: «…во время войны Канторович пытался привлечь внимание руководства страны к своим работам. Свою рукопись Канторович направил на рассмотрение в Госплан СССР и в Институт экономики АН, но она была отвергнута тамошними экспертами как противоречащая экономической теории Маркса» [91, С. 294] (заметим, направить в Госплан помог С.Л. Соболев [12, С. 126]). Канторович выступал в 1942 г. в МИ АН СССР, в 1943 г. в Институте экономики АН СССР в Москве. Как пишет сам Канторович ([40]): «…инженеры отнеслись к этой работе совершенно иначе. Так военное заведение, где я работал, в 1943 г. собиралось выдвинуть ее на Сталинскую премию… Оно обратилось к проф. Г.М. Фихтенгольцу, который ознакомил с этой работой А.А. Вознесенского. Ректор прозондировал почву в Москве и затем решительно отверг эту возможность. Все говорило о том, что необходимо на определенное время оставить эти работы. Их продолжение становилось опасным – как я узнал впоследствии, мои предположения были небезосновательными. … в середине пятидесятых годов мои работы были вновь посланы в Госплан и другие органы и опять были встречены отрицательно...».

Эта работа также сочетает прикладные и теоретические исследования, которые были, по возможности, отделены друг от друга и изложены в разных частях книги. Эта работа подытоживает предыдущие исследования. В одной части она содержит анализ разработанных экономических приложений ЛП, в другой – наиболее полное изложение математической теории и вычислительных методов ЛП.

Сам Канторович охарактеризовал книгу как первую в СССР монографию, исследующую экономику СССР посредством матмоделей и систематического использования оптимальности и двойственности (что в терминах экономики есть связь «цены-план») и подвел такой итог исследования: оптимально в данных условиях установленный набор цен дает оптимальное использование ресурсов.

В начале 50-х гг. в США посредством ЛП показали, что критерий паретто-оптимальности состояния – существование неотрицательных равновесных цен. Примечательно, что это, безусловно, очень существенное достижение «...хотя чуть иначе сформулированное, фактически содержится в тексте Л.В. Канторовича 1942 г.» [38, С. 4**]**.

На стыке 1942–1943 г. на основе [72] Канторович написал Секретарю ЦК ВКП(б) Г.М. Маленкову записку «Показатели работы предприятий нуждаются в пересмотре», которую при жизни автора не издали (опубликована в [65] и [110, С. 375–396]).

Статью 1943 г. «Об исчислении общественно-необходимого времени в условиях социалистического производства», предлагавшую «допустимую» идеологическую интерпретацию появившихся в [72] объективно обоснованных оценок, Канторович послал в журнал «Под знаменем марксизма», а через два года получил обратно «в связи с закрытием журнала» [38, С. 5]. Когда в 1957 г. он возобновил попытки опубликовать ее, потребовалось еще три года, чтобы она появилось в существенно сокращенном виде и с измененным названием [57], а полноценная версия так и не вышла при его жизни.

Продолжением упомянутой выше работы [76] стала статья 1942 г. [52], которую необходимо выделить особо, так как в ней был рассмотрен бесконечномерный аналог ТЗ, и которая примечательна еще и тем, что, основываясь на ней, в 1948 г. [59] Канторовичем было получено более полное решение известной проблемы Монжа.

В 1945 г. выходит работа Канторовича [61] с методом наискорейшего спуска (градиентный метод) для отыскания минимума квадратичных функционалов в линейном метрическом пространстве для широкого класса проблем. С помощью этого метода можно находить решения, доказывать их существование и исследовать их свойства. Дана реализация метода для системы линейных алгебраических уравнений, интегральных уравнений Фредгольма, обыкновенных дифференциальных уравнений, предельных задач для уравнений в частных производных, функциональных уравнений в гильбертовом пространстве. Показана сходимость к решению со скоростью геометрической прогрессии. В заключении подчеркнуто, что данный метод принципиально применим и для не квадратичных функционалов, в том числе – при решении систем нелинейных алгебраических уравнений. Этот метод «связан с общими концепциями автора, относящимися к трактовке экстремальных проблем...». Частичное развитие метод получил в заметке Канторовича [60], где дан критерий оптимальности для бесконечномерного выпуклого программирования: существование линейного функционала, который имеет минимум там же, где выпуклый функционал, и является опорным к графику функционала. «В современных терминах этот линейный функционал задает решение двойственной задачи» [127, С. 265]. Также даны пути создания итеративных алгоритмов и исследованы оптимальные и экстремальные или Парето-эффективные решения. «Аналогичный метод был предложен в работе Р. Куранта 1943 г., но им не был указан ключевой его момент – выбор длины шага в направлении градиента» [38, С. 8].

Особняком стоят еще две совместные с Г.Ш. Рубинштейном работы Канторовича: статьи 1957 г. [83] и 1958 г. [82]. Они посвящены обобщениям ЗЛП на пространства вполне аддитивных функций множеств. В 1959 г. вышла [77], с которой Канторович начал рассматривать однопродуктовые динамические модели роста основных фондов и продукции при оптимальном плане (эта тема тогда же начала развиваться на Западе).

3.3. Признание вклада Канторовича в экономическую науку

Сегодня авторитет Канторовича в качестве одного из основателей школы ФА, и родоначальника ЛП общепризнан и не вызывает никаких сомнений. Изданная в 1948 г.

его большая статья [71] отмечена Сталинской премией. Несмотря на то, что само название статьи звучало тогда парадоксально (в сознании большинства ученых того времени между ФА и прикладными задачами лежала пропасть) развитые в ней идеи стали классическими. Как отметил С.Л. Соболев: «Уже через несколько лет представить вычислительную математику без функционального анализа было так же невозможно, как и без вычислительных машин» [110, С. 3]. Но не всё и не всегда было гладко – скорее наоборот: с момента, как он начал серьезно заниматься экономикой, его работы наткнулись на сильнейшее сопротивление. Многие из его статей по разным причинам не были своевременно опубликованы.

Канторович всегда опережал свое время, что вызывало трудности восприятия и продвижения его идей. С работами в области экономики ситуация усугублялась тем, что надо было иметь дело не с абстрактной математической материей, а с ортодоксальными и политизированными взглядами консервативно и враждебно настроенных людей.

Однако математика часто приходила ему на помощь. «В 1948 г. в соответствии с весьма секретным Постановлением Совета Министров СССР Л.В. Канторович был демобилизован…, и ему было поручено возглавить в Ленинградском отделении Математического института АН СССР (ЛОМИ) специальную группу для проведения расчетов по Атомному Проекту» [78, С. 294]. Всё прошло успешно и Канторовича наградили специальной Правительственной премией. В это же время он получил Сталинскую премию за серию статей о приложении ФА в численных методах (1949 г.).

Эти успехи помогли ему издать несколько статей экономико-математического содержания, например, – [64], поданную еще в 1940 г. Чуть раньше он устроил Залгаллера на Вагоностроительный завод им. Егорова для применения методов раскроя, что прошло успешно, и они совместно издали книгу [78].

Также положительный сдвиг во взаимоотношениях с властью произошел, когда в 1957 г. Канторовича пригласили в новое Сибирское отделение АН. В 1958 г. он стал членом-корреспондентом АН по отделению экономики.

В целом же, конечно, сразу бросается в глаза разница между историей ЛП и его приложений в США (см. Главу 4), где влияние государства и организационных структур в виде военно-университетского комплекса оказывало сильнейшую поддержку, и в СССР, где математической экономике противостояли ортодоксально настроенные экономисты-марксисты. При Хрущеве стало чуть легче и Канторович опять стал популяризировать это направление (тем более, что в это время такие исследования уже разрослись на Западе (см. Главу 4).

Хорошие новости пришли в 1959 г. Президент АН СССР в [118, С. 61] объявил: «можно ожидать резкого повышения роли математики в науке, технике, планировании народного хозяйства».

Однако, свобода всё ещё была очень ограничена. К счастью, Канторович обретал и поддержку таких экономистов как Новожилов (с 1940 г. – они вместе вели семинар в Политехническом институте) и Немчинов, который сильно помог публикации [72]. В издательстве ЛГУ ее издать не осмелились, в итоге это сделало в 1959 г. Издательство АН СССР. Когда книга была уже набрана, Канторович решил переименовать получаемые математически и имеющие экономическую интерпретацию «наиболее целесообразные оценки» в «объективно обусловленные оценки» (см. [91, С. 296]: «противники могут говорить о субъективности “наиболее целесообразных оценок”, но сказать о субъективности “объективно обусловленных оценок” они не смогут – всем будет смешно. Слово “субъективизм” было политическим обвинением в антимарксизме, означавшим “следование буржуазной апологетической субъективистской трактовке стоимости”»). Есть две даты издания [72]: 1959 и 1960 г. Как пояснил автору диссертации Романовский И.В.: «Книга вышла в 1959 г. и была немедленно распродана несмотря на большой тираж. Л.В. предложил Издательству допечатать книгу, они согласились, но набор уже был рассыпан… И пришлось набирать снова. Набор стал немного другим, даже число страниц изменилось с 344 до 347. Наличие двух вариантов отражено в биобиблиографии Канторовича, М., Наука, 1989».

Таким образом, вышла книга [72], вызвавшая резкие нападки ортодоксальных экономистов и острые дискуссии, продолжавшиеся до середины 1960-х гг. Впрочем, последние имели и положительный эффект: за ними следили ученые в СССР и на Западе. Тогда же переводились, получая всемирную известность, ранние работы Канторовича по ЛП, обеспечившие его приоритет (например, [277]). Вскоре пришло признание в СССР: 1964 г. – избрание действительным членом АН по Отделению математики, 1965 г. – Ленинская премия. С начала 1970-х гг. Канторович, продолжая фокусироваться на экономической проблематике, работает в Москве. Заключительная точка в вопросе признания его работ в мире была поставлена в 1975 г. вручением ему совместно с Купмансом Нобелевской премии «за вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике» (Нобелевскую лекцию Канторовича см. в [37]). К сожалению, это мало помогло его попыткам внедрения новых идей в экономическую практику: «XX век» в виде политической ситуации в СССР постоянно препятствовал. Его противники использовали все доступные им методы нападения, однако Канторович не сдавался. Тем ни менее, надо отметить, что он умел ладить с властью и был достаточно гибок: он отступал на время, но затем возвращался к продвижению своей позиции.

Иногда критика доходила до абсурда. Появляющиеся в ходе применения предложенного Канторовичем метода множители Лагранжа он сам называл разными словами (сейчас они называются двойственными оценками и отражают, насколько важны данные ресурсы) и развил на их основе теорию дифференциальной ренты. Однако, на Западе они чаще фигурировали под именем «теневых цен» ресурсов, а Марксизм-Ленинизм ни с чем теневым даже в терминологии ничего общего иметь не мог. Сам Канторович чаще всего называл их «объективно обусловленными оценками», чтобы отвести претензии, но противники продолжали атаковать: «Это против Маркса!», а он старался убеждать, что это – лишь оценки.

Потом, когда умер И.В. Сталин, было совещание, где С.Л. Соболев, А.А. Ляпунов, А.Н. Колмогоров и прочие защищали Канторовича, но все говорили что-то общее о его таланте, а Колмогоров, что в то время было поразительно и казалось невозможным, сказал по существу, что не надо бояться слов: у Маркса – одни слова, у Канторовича – другие, но и те, и другие могут отражать истину. Вообще, Канторович всегда ощущал поддержку математиков, некоторые из которых периодически помогали продвижению ЛП (отметим здесь В.И. Смирнова, Г.М. Фихтенгольца, В.А. Тартаковского, С.В. Валландера).

Чтобы лучше показать социально-экономический контекст, в котором работали Канторович и его коллеги, и разницу подходов в принятии управленческих решений в СССР и на Западе приведем его вспоминания [69]: «После того как были применены оптимальные методы и несколько сократился расход металла, оказалось, что резко уменьшилась возможность сдачи металлолома. В итоге был сорван план сдачи отходов металла, а раз один из показателей плана не выполнен, то предприятие не может быть премировано в полном размере. Тогда райком помог преодолеть эту трудность, и в виде исключения премия заводу была сохранена, несмотря на срыв одного из показателей. Второй казус этой ситуации: отраслевое начальство, получив рапорт о том, что завод на 4% увеличил использование металла при раскрое, предложило им не терять темпа и в следующем году опять подняло план использования металла на те же 4%. Выходило, что металл должен использоваться на 101%, и пришлось даже писать бумагу от академии, что больше 100% не бывает» (историю упорной борьбы Канторовича см. в [29]).

Ленинская премия. Чтобы понять тяжесть пути при продвижении и внедрении в практику экономических идей Канторовича в СССР обратимся к истории получения им Ленинской премии. В первый раз Канторовича выдвигали в 1962 г. за работы по ЛП. Но тогда признанию не было суждено осуществиться. Следующее выдвижение состоялось в 1964 г., когда были представлены работы: Канторовича [72], Немчинова [117], Новожилова [119]. Это были основополагающие труды тогда нового направления. Газета «Известия» опубликовала статью А.Г. Аганбегяна, А.Л. Вайнштейна и Ю.А. Олейника [1] о достижениях кандидатов. Но сразу нашлись противники: «Верные слуги “марксистской” экономики А. Боярский и Я. Кронрод направляют в газету “Известия” письмо “По поводу книги Л.В. Канторовича «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов»”, в которой они обвиняют Канторовича в преступлениях против “марксистской трудовой теории стоимости” и т. д. Одновременно Боярский и Кронрод направляют аналогичную кляузу в Комитет по Ленинским премиям. На это А.Н. Колмогоров даёт достойный ответ в публикуемом письме от 2 апреля 1964» [111].

Через некоторое время война за истину подошла к своей кульминации: в газете «Правда» была подготовлена большая статья с громким названием «В плену теоретических ошибок», которая была подписана четырнадцатью апологетами «единственно верной» экономической теории. Среди них были академики С.Г. Струмилин и К.В. Островитянов. Статья повторяет слово в слово обвинения вышеупомянутого письма. Отметим, что критике подверглась только работа Канторовича. К счастью, серьезный ответ С.Л. Соболева и А.А. Ляпунова не заставил себя ждать: в «Правду» пришла статья «Математика и экономика».

Две эти статьи были готовы к печати, но все же не были опубликованы. Возможно, по причине указания «сверху». Ленинская премия по экономике была вручена всем трем авторам, но только в 1965 г. Вероятно, это было связанно с изменением политической ситуации: Председатель правительства А.Н. Косыгин наметил программу экономических реформ, в которой работы Канторовича могли быть использованы. Возможно также, что на решение Комитета по Ленинским премиям повлияли академики М.В. Келдыш и В.А. Кириллин.

Сначала официальной мотивировкой выдвижения на премию была «разработка математических методов решения задач планирования и управления народным хозяйством», но к 22 апреля 1965 г. она изменилась: в «Правде» опубликовано постановление о присуждении трем ученым Ленинской премии «за научную разработку метода линейного программирования и математических моделей экономики». Формулировку изменили, чтобы исключение Канторовича из списка награждаемых стало невозможным.

Международное признание. Международное признание пришло не сразу, были и неприятные моменты. Зарубежные ученые узнали о трудах Канторовича с большим запозданием. Отчасти причиной этому стало тяжелое время: перед Великой Отечественной войной и во время нее Канторович написал около 20 работ экономико-математической тематики, но лишь две из них были своевременно напечатаны. Первая – заметка 1942 г. [52]. Из нее и узнали на Западе о работах Канторовича по ЛП. Случилось это лишь в 1953 г., когда в работе М.М. Флуда [239] по ТЗ появилась ссылка на единственную доступную зарубежному читателю упомянутую выше статью. Вторая – [68], опубликованная в 1942 г. под грифом ДСП (для служебного пользования). Работа Канторовича и Гавурина 1940 г. [76] по ТЗ, опубликована лишь в 1949 г. уже после переоткрытия этих результатов на Западе. Так же и знаменитая работа [72] была направлена в Госплан в 1942 г., а издана только в 1959 г.

Эти причины затруднили мировое признание приоритета советской науки в разработке методов ЛП. Но научная значимость работ Канторовича и его приоритет все же были признаны мировой общественностью, о чем свидетельствует, например, переписка Канторовича с Купмансом, который сыграл огромную роль в «открытии» советских работ на Западе (см.: [111]). В письме 12.11.1956 Купманс пишет Канторовичу: «Недавно мне представился случай познакомиться с экземпляром Вашей статьи “О перемещении масс”... Мне сразу стало ясно, что частью Вы развивали параллельно, но в большей части предвосхитили развитие транспортной теории в США, разработка которой началось в период с 1941 г… Ваша краткая статья в замечательно сжатой форме содержит математическое существо того, что содержится в этих работах» [111].

В 1958 г. работа [52] была перепечатана в «Management Science»; в 1960 г. там же был опубликован [277] – перевод книги [39]. Вводную заметку к этому переводу писал Купманс. С последней публикацией связан неприятный инцидент, напоминающий историю присуждения Ленинской премии, когда Чарнс и Купер опубликовали статью «весьма странного тона и содержания», а Купманс встал на сторону Канторовича (см. [12, С. 129–132.], [38, С. 506], [111, с. 330] и ответ Канторовича [111, С. 375–380]).

Об успешном завершении признания роли и приоритета работ Канторовича в развитии ЛП говорят многочисленные почетные степени и звания в наиболее уважаемых организациях всего мира. А в довершение – присуждение ему совместно с Купмансом Нобелевской премии 1975 г. по экономическим наукам «за вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике».

3.4. Решение проблемы Монжа на основе линейного программирования

Мы покажем очень интересное явление: ситуация, когда у метода, разработанного с целью решения достаточно конкретной практической задачи, сфера применения оказалась намного шире, чем первоначально планировавшаяся; и, более того, в дополнение к этому, метод оказался в состоянии оказать влияние на область чистой математики посредствам демонстрации совершенно нового (и значительно более простого, чем ранее) способа для решения классических математических задач, которые были сформулированы несколькими столетиями ранее. Речь идет о ЛП и его связи с полным решением известной проблемы Монжа, имеющей более чем 200-летнюю историю.

В 1781 г. выдающийся французский математик Монж, изучая вопрос о том, как можно при строительстве военных укреплений самым рациональном образом переместить землю из насыпи в выемку, сформулировал в [334] следующую задачу: необходимо разделить два равновеликих объема на бесконечно малые части и согласовать их друг с другом таким образом, чтобы перевозимые объемы земли и суммарные интервалы перевозки продукции были минимальны. Он высказал гипотезу (но не дал строгое доказательство), что необходимые способы переноса массы представляют собой семейство нормальных линий, относящихся к определенному однопараметрическому семейству поверхностей.

Несмотря на то, что данной проблемой занимались многие известные математики, строгое доказательство гипотезы было дано П. Аппелем только в 1884 г. в его более чем 200-страничных мемуарах ([156]). Первичное доказательство Аппеля было чрезвычайно сложным и пространным, хотя позже автору удалось сделать его проще и доступнее [155]. Тем не менее, оно продолжало оставаться весьма сложным и основывалось на продвинутых теоремах из вариационного исчисления, которое уже было хорошо развито к тому моменту.

Однако, доказательство гипотезы получается (причём для более широкого класса задач перемещения масс) в виде простого следствия признака оптимальности перемещения, разработанного Канторовичем и Гавуриным в [76] в связи с решением ТЗ и обобщённого затем Канторовичем в работе [52]. В итоге формулировка этой задачи в терминах непрерывных распределений масс стала называться задачей Монжа-Канторовича (см. также [154]).

Мы собираемся начать с терминологии и формулировки двух главных проблем: Транспортной задачи и Задачи перемещения масс. Затем вернемся к основному аспекту данного параграфа, заключающемуся в анализе связей двух этих проблем с задачей Монжа (покажем, что её решение – простое следствие накопленных при исследовании этих двух проблем знаний).

Транспортная задача. Проблема, представляющаяся особо важной в связи с рассматриваемой темой – задача перемещения масс – имеет прямую связь с ТЗ – простейшей ЗЛП с огромным числом приложений в планировании перевозок.

Пусть компоненты данного вектора

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \tag{3.1}$$

(точнее, их абсолютные значения) обозначают объемы производства (если $\varphi_k \leq 0$) или потребления (если $\varphi_k > 0$) некоторого однородного продукта в заданных m пунктах (например, городах или станциях) с номерами $k \in K = \{1 , 2, \ldots, m\}$. Кроме того, предполагается, что общий объем потребления совпадает с общим объемом производства, другими словами:

$$\textstyle\sum_{k \in K} \varphi_k = 0. \tag{3.2}$$

План перевозок определяется выбором матрицы $\psi = [\psi_{ij}]$, $\psi_{ij} \geq 0$, $i, j \in K$, элементы которой задают объемы перевозок из каждого пункта i в каждый пункт j в соответствии с этим планом. Очевидно, что в ходе осуществления выбранного плана перевозок в каждом пункте импортируется $\sum_{i\in K}\psi_{ik}$ и экспортируется $\sum_{j\in K}\psi_{kj}$ единиц рассматриваемого продукта, что в свою очередь означает, что ψ определяет допустимый план транспортировки, если отношения баланса удовлетворяют таким условиям:

$$\sum_{i\in K}\psi_{ik}-\sum_{j\in K}\psi_{kj}=\varphi_k, k\in K. \quad (3.3)$$

Общая стоимость, отвечающая осуществлению каждого такого плана транспортировок, в данной модели определяется так: $\tau(\psi) = \sum_i \sum_j r_{ij}\ \psi_{ij}$, где $r_{ij} \geq 0$ – заданные затраты на транспортировку единицы продукции из i в j.

В результате получаем, что система допустимых планов перевозки определяется множеством Ψ_φ, состоящим из неотрицательных решений СЛУ (3.3). Для того чтобы план являлся наиболее экономичным (оптимальным), требуется, чтобы общая стоимость его реализации была наименьшей.

Используя общие результаты ЛП (или напрямую), легко проверить, что сформулированная выше задача экстремума всегда разрешима. Допустимый план перевозок является оптимальным тогда и только тогда, когда существует такой вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, что для $i, j \in K$: $u_j - u_i \leq r_{ij}$, причем $\psi_{ij} \cdot (u_j - u_i - r_{ij}) = 0$. Требование равенства нулю произведения означает, что если в допустимом плане планируется ненулевая транспортировка из i к j, тогда соответствующее неравенство будет равенством (подробнее в [70, С. 294–297]).

Задача перемещения масс. Бесконечномерное обобщение ТЗ, описанное ниже, изучалось впервые в 1942 г. Канторовичем и получило обобщение в [52], см. также [59], [82], [83], где он рассматривает общую проблему оптимального перемещения массы в компактном метрическом пространстве.

В данной задаче конечное множество пунктов заменено произвольным метрическим компактом K с метрикой $r(t, s)$, которая показывает затраты, на перемещение единицы массы из $t \in K$ в $s \in K$. Аналогом вектора (3.1) является счётно-аддитивная функция φ, заданная на системе B борелевских множеств K и положительная вариация которой $\varphi_+(K)$ совпадает с отрицательной $\varphi_-(K)$. Другими словами, входящий и выходящий потоки равны (получаем условие-аналог (3.2)): $\varphi(K) = \varphi_+(K) - \varphi_-(K) = 0$, для $e \subset B$: $\varphi_+(e) = \sup\{\varphi(e'): e' \subset B, e' \subset e\}$, $\varphi_-(e) = \sup\{-\varphi(e'): e' \subset B, e' \subset e\}$; $\varphi_+(e)$ и $\varphi_-(e)$ понимаются как требуемое и существующее количество массы на e.

План перемещения массы на K определяется выбором конечной меры ψ, определенной на σ-алгебре $B^{\sim}$ борелевских множеств $K\times K$. В этом случае мера множества $e\times e' \subset B^{\sim}$ – $\psi(e, e')$ – определяет планируемое к перемещению из e в e'количество массы. План допустим, если удовлетворяет балансовым отношениям $\psi\ (K, e) - \psi\ (e, K) = \varphi\ (e)$, где $e \subset B$, играющим роль соотношений (3.3) ТЗ.

Совокупность допустимых перемещений ψ обозначим Ψ_φ. Общий объем затрат на реализацию ψ равен двойному интегралу: $\tau(\psi) = \int_{K\times K} r(t, s)\ d\psi(t, s)$. Оптимальное перемещение определяется функцией $\psi \in \Psi_\varphi$, минимизирующей $\tau(\psi)$.

Иногда эту проблему описывают в следующих терминах.

Пусть R есть метрическое компактное пространство (хотя некоторые из следующих определений и результатов могут быть установлены также для пространств более общего вида) и $\Phi(e)$ является распределением массы, то есть – функцией с набором свойств:

1) определена для борелевских множеств,

2) неотрицательна $\Phi(e) \geq 0$,

3) абсолютно аддитивна: $e = e_1 + e_2 + \ldots$; $e_i \cap e'_k = \emptyset,\ i \neq \mathrm{k} \Rightarrow \Phi(e) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2) + \ldots$

Пусть $\Phi'(e')$ есть еще одно распределение масс и $\Phi(R) = \Phi'(R) = 1$.

Определим перемещение масс – функцию $\Psi(e, e')$ пары (B)-множеств $e, e' \subset R$, которая:

1) неотрицательна и абсолютно аддитивна по каждому аргументу,

2) такая, что $\Psi(e, R) = \Phi(e)$; $\Psi(R, e') = \Phi'(e')$.

Функция $\Psi(e, e')$ характеризует массу, которая перемещается из e в e'.

Пусть $r(x,\ y)$ является известной непрерывной неотрицательной функцией – работой, необходимой для перемещения единицы массы из пункта x в пункт y.

Необходимая для осуществления перемещений данных распределений массы работа определяется так:

$W(\Psi,\ \Phi,\ \Phi') = \iint_{R\times R} r(x, x')\ \Psi(de, de') = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1,k=1}^{n,m} r(x_i, x'_k)\Psi(e_i, e'_k)$, где $\{e_i\}$ есть дизъюнкты и $\sum e_i = R$, $\{e'_k\}$ есть дизъюнкты и $\sum e'_k = R$, $x_i \in e_i$, $x'_k \in e'_k$, $\lambda = \max_{i,k}\{\mathrm{diam}\ e_i, \mathrm{diam}\ e'_k\}$. Данный интеграл существует.

Обозначим минимальную работу, необходимую для перемещения массы $W(\Phi,\ \Phi') = \inf_\Psi W\ (\Psi,\ \Phi,\ \Phi')$. В силу компактности множества функций $\{\Psi\}$ существует (не обязательно единственная) Ψ_0, доставляющая минимум $W(\Phi,\ \Phi') = W(\Psi_0, \Phi, \Phi')$. Ψ_0 назовем минимальным (оптимальным) перемещением.

Перемещение Ψ из x в y называют не равным нулю, и обозначают $x \to y$, если существует перемещение массы из x в y, – другими словами, если для любой окрестности U_x и U_y точек x и y: $\Psi(U_x, U_y) > 0$ (то есть $(x, y) \in \mathrm{supp}\, \psi$).

Перемещение Ψ называют потенциальным, если существует функция $U(x)$, для которой:

1) всегда $|U(x) - U(y)| \le r(x, y)$, 2) $U(y) - U(x) = r(x, y)$, если $x \to y$.

Можно показать, что описанная проблема экстремума всегда разрешима. И критерий оптимальности перемещения в этом случае не отличается существенно от того, что получен на основе общих результатов ЛП и показан ранее для случая ТЗ. Минимальное перемещение характеризуется с помощью НДУ, опубликованного Канторовичем в 1942 г. [52]:

Теорема: Перемещение минимально тогда и только тогда, когда оно потенциально.

Эта теорема кроме проверки минимальности перемещения путем построения потенциала (как в её доказательстве) в случае неосуществимости последнего дает путь постепенного перехода к минимальному перемещению. Канторович заметил полезность исследования пространства распределений масс, рассматривая $W(\Phi, \Phi')$ как расстояние (для случая, когда $r(x, y) = \rho(x, y)$ есть расстояние) и естественность такой метрики в этом пространстве. Он использовал эту теорему для ТЗ и «планирования участка», когда даны затраты на перемещение земли из (x_0, y_0) в (x_1, y_1), рельеф местности до планировки $z = f(x, y)$ и после $z = f_1(x, y)$, причем $\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint f_1(x, y)\, dx\, dy$. Надо найти план перемещения с минимальной ценой.

Задача перемещения массы может быть получена (и была исследована Канторовичем) как обобщение рассмотренных ранее практических задач по нахождению способа подключения пункта производства товара, расположенного на железнодорожной сети, к местам потребления этих товаров таким образом, чтобы обеспечить минимальные общие затраты на транспортировку этих товаров. ТЗ есть частный случай описанной выше общей проблемы.

Только через некоторое время после выхода в свет его исследования [52] Канторович заметил, что эта же общая проблема сдержит, как частный случай, еще одну важную проблему, которая гораздо раньше была исследована Монжем в работе о «разрезании и заполнении». И вышеупомянутая теорема может быть с успехом применена для ее анализа. Формулировка в терминах непрерывного распределения массы стала назваться «Задача Монжа-Канторовича».

Проблема Монжа. Формулировка Монжа задачи перемещения массы приведена в начале пункта 3.4. В связи с ее исследованием Монж разработал геометрическую теорию конгруэнтности. Как сказано выше, классическими методами проблема решается очень сложно. Тем не менее, решение более широкого класса задач получается как следствие признака оптимальности перемещения, разработанного Канторовичем и Гавуриным (вышеупомянутая абстрактная теорема) в [52], [76]. В [70, С. 298] см.:

Лемма: Пусть $u\colon K \to R$ потенциальна, и точки x, y и z_0 из K такие, что $u(y) - u(x) = r(x, y) = r(x, z_0) + r(z_0, y)$. Тогда множество $Uz_0 = \{z \in K \mid u(z) = u(z_0)\}$ находится между двумя сферами, которые проходят через z_0, и их центры находятся в точках x и y. Другими словами, для любой $z \in Uz_0$: $r(x, z) \geq r(x, z_0)$, $r(z, y) \geq r(z_0, y)$.

Идея в том, что если путь перемещения xy из x в y перехватить в точке z_0 эквипотенциальной поверхности, то эта поверхность должна лежать между двумя сферами (с центрами в точках x и y), которые пересекаются в точке z_0, и тем самым должна быть нормальной к пути xy.

Принимая во внимание критерий оптимальности, описанный выше, получается, что утверждение, аналогичное доказанному Аппелем, справедливо для любой задачи перемещения массы на выпуклых компактах в произвольном евклидовом или гильбертовом пространстве. И если перемещения оптимальны, то необходимые пути перемещения массы должны быть нормальными линиями к однопараметрическому семейству эквипотенциальных поверхностей (или, другими словами, поверхностей уровня) $u(z) = C = \text{const}$, соответствующему функции $u\colon K \to R$ из критерия оптимальности. Подробнее доказательство см. в [70, С. 294–311].

3.5. Вклад Канторовича в экономическую науку

Хороший анализ исследований Канторовича с точки зрения экономики дан в [12], [105, С. 635]. Остановимся на основных тезисах, представляющихся наиболее важными и выдержавших проверку временем. С появлением после смерти Сталина некоторой свободы обсуждения экономики, встал вопрос о возобновлении применения математики, которая долгое время была «в изгнании». Математика же подразумевает численные характеристики, что вновь подняло вопрос о сущности стоимости. В результате плюс к прямому значению термин «матэкономика» теперь означал пересмотр теории стоимости, а, вроде безобидная, задача распределения ресурсов подвергла сомнению подход Маркса. Р. Кэмпбелл объяснил очевидный кризис и неспособность теории Маркса эффективно развиваться в сравнении с теорией на Западе, добившейся объединения разрозненных идей в стройную систему, игнорированием исследований теории стоимости. Ключевыми шагами в развитии западной теории были концепция общего равновесия и предельной полезности, а также осознание того, что цены – лишь одна из сторон общей теории, неразрывно связанная с пропорциональным составом ассортимента продукции.

У марксистского же подхода наряду с частной проблемой – доктриной о сведении стоимости к труду – была и общая – непонимание того, что экономика должна изучать связь цен и количеств. При этом в СССР сознательно охраняли теорию Маркса по идеологическим причинам.

Заметим (см. [12, С. 91]), что до революции экономисты-марксисты не исследовали рационального распределения, при этом заявлялось грядущее низвержение капитализма коммунизмом в силу лучшего роста производительных сил при последнем, так как он даст вместо неупорядоченного рынка разумную программу.

В результате получался абсурд: плановая экономика, зиждясь на идее оптимального распределения ресурсов, не имела теоретической базы (в силу чего такие исследователи, как Б.Д. Бруцкус [13], Л. Мизес [333] утверждали, напротив, что при социализме даже теоретически невозможна рациональная организация).

Поэтому, если в рыночной экономике оптимальное распределение ресурсов общества было абстрактной теорией – результатом синтеза частных концепций в теорию выбора и стоимости, то в СССР была практическая необходимость реализации такого процесса, равно как определения производственных издержек и цен. Также при принятии локальных решений для выбора лучшего варианта надо считать эффективность, для чего нужно понимать стоимость и ее отношение к распределению ресурсов.

Кэмпбелл [105, С. 638] сравнил роль экономики в планировании с физикой в инженерии. Связь стоимости с распределением выяснили Канторович и Новожилов из исследований конкретных задач. Новожилов изучал задачу максимизации эффективности капиталовложений и понял, что это связано с эффективностью распределения всех ресурсов. К Канторовичу же обратились с очень частной задачей фанерного треста, но он увидел общий вопрос и пришел в результате к теории стоимости и распределения ресурсов общества. В результате вскрылись нестыковки теории трудовой стоимости. Всё это принципиально изменило подход к экономической науке в СССР и тем вызвало волну сопротивления.

Вклад работы [39] см. в пункте 2.1; в работе [72] Канторович дал методы и их применение к объединенным теперь (благодаря его исследованиям) теории стоимости и распределения ресурсов (даже термин «объективно обоснованные оценки» показывает, что теперь эти теории неразделимо связаны), а название работы подчеркнуло главную с его точки зрения задачу экономики. Также он показал, что при принятии децентрализованных решений надо вместо используемых цен брать объективно обоснованные оценки.

Так как объективно обоснованные оценки зависят не только от затрат, но и от спроса, то они могли решить ряд традиционных для СССР проблем (нерационального использования дефицитных ресурсов, выпуска ненужных продуктов). Таким образом, создав ЛП и применив его к общей экономической проблеме, Канторович одним махом получил все основные достижения западной теории производства (которая, между прочим, работала лишь с дифференцируемыми функциями). Вторая составляющая теории стоимости – теория потребления – разработана и опубликована Конюсом [90]. Объединение ее с теорией производства эквивалентно Западной теории стоимости.

Отметим также динамические модели, которые Канторович представил в [33], [72] и развил в [34], [73]. Математически только вводятся датированные переменные и специальная форма матрицы, но экономически это большой шаг, ведущий к динамически меняющимся объективно обоснованным оценкам. Канторович выделил две составляющие ([72, С. 284–287]): динамику общего уровня цен (через введение индекса) и их структуры (относительных цен). В результате он получил аналог процентной ставки и пришел к нормальной эффективности капиталовложений. К таким же результатам пришла и западная наука.

В [81] дан путь учета нелинейности, стохастики и дискретности.

В [337] продемонстрировано, как естественно получить метод декомпозиции на базе постановки ЗЛП в форме, данной в [72]. Тогда же и независимо подобный подход был предложен Д. Данцигом и Ф. Вульфом [214] (см. Гл. 4). Канторович неоднократно говорил о таком подходе, и подход на самом деле оказался очень важен, решая проблему расчёта больших задач, а в плановой экономике позволяя также иметь в некоторой степени децентрализованные планы, согласованные с общем планом (и составляющие его). Он уделил большое внимание этому в [81].

Насколько фундаментальны были экономические работы Канторовича видно даже из следующей ситуации. В период борьбы за них, он часто наталкивался на отказ или задержку публикаций. Однажды редактор на его вопрос относительно задержки одной статьи, извиняясь, ответил: «Мне нужно пропустить целый ворох статей, которые завтра уже будут никому ненужными, к их авторам надо быть снисходительными… А ваши статьи, Леонид Витальевич, можно будет напечатать и через 10 лет, и через 20, они все равно не устареют…» [69].

Канторович дал аналог капиталистического ранка для социалистической экономики (где конкурируют не агенты и товары, а планы при расчетах, что позволяет избежать потерь), позволяющий оптимально применять ресурсы.

Итог влияния Канторовича на экономику как науку можно подвести такой фразой: «…Канторович – знаменитый математик, но, несомненно, мы с полным правом можем включить его в ряд наиболее выдающихся экономистов последних десятилетий» [31, С. 668].

3.6. Организационная и издательская деятельность Канторовича

Канторович внес огромный вклад в судьбу СССР не только исследовательской, но также и преподавательской, организационной и издательской деятельностью. Остановимся на ключевых моментах (также см. [40], [102], [104], [110], [111], [84], [94], [85], [103]).

Его преподавательская карьера началась рано – сразу после окончания ЛГУ в 1930 г., через два года он стал профессором Ленинградского института инженеров гражданского строительства, еще через два – профессором ЛГУ.

Благодаря Канторовичу в 1948 г. на матмехе ЛГУ появилась впервые в СССР специализация «вычислительная математика» (позже – кафедра, первым заведующем которой стал В.И. Крылов, а с 1958 г. – Канторович), а в 1958 г. в ЛГУ – «экономическая кибернетика» (вклад Канторовича в обучение математической экономике см. в [15]). Отдельно отметим созданный в 1959 г. в ЛГУ «шестой курс» (см. [141], [16], [91], [27, С. 24–36]), куда вошли самые перспективные выпускники и аспиранты, некоторые москвичи (в том числе ставшие академиками А.А. Анчишкин и С.С. Шаталин) и граждане Чехословакии. Им читали математическую экономику Канторович, Залгаллер, Рубинштейн, Гавурин, а также И.А. Ибрагимов, И.В. Романовский, А.А. Корбут и Л.И. Горьков.

Канторович был редактором сборника исследований ученых США [113], заложившего вместе с работой Канторовича [39] направление исследований в СССР.

В 1958–60 гг. он руководил (вместе с Немчиновым) открытой им Лабораторией по применению математических и статистических методов в экономических исследованиях и планировании, а после организации СО АН переехал в Новосибирск (1960–1971 гг.) и вступил в должность заместителя директора Института математики и руководителя перенесенного туда ленинградского отделения Лаборатории, ставшего математико-экономическим отделом; заведовал кафедрой вычислительной математики НГУ.

Велись всесторонние исследования по математической экономике: экономическая динамика и равновесие, ВА, теория экстремальных задач, численные методы МП (и реализация на ЭВМ). Занимаясь построением математико-экономических моделей, он активно работал с молодыми учеными, среди которых был В.Л. Макаров (ставший потом академиком, директором ЦЭМИ).

Канторович открыл в НГУ обучение экономической кибернетике. Также он организовывал конференции по математической экономике. Одним из ярких событий стал международный симпозиум 1970 г., куда приехали в том числе: Ж. Абади, Д. Гейл, Я. Корнаи, Э. Маленво, Л. Клейн, Т. Купманс, Р. Стоун, Р. Фриш (четверо последних получили Нобелевскую премию).

С 1970 г. Канторович руководил Проблемной лабораторией Института управления народным хозяйством ГКНТ (Москва), а с 1976 г. – Отделом моделирования научно-технического прогресса ВНИИСИ. Нобелевская премии дала возможность выезда за рубеж в том числе для работы в Международном институте прикладного системного анализа (IIASA). Он был признан в СССР и в Мире: награжден множеством орденов, медалей, дипломов, премий, избран членом академий и обществ, почетным доктором университетов, состоял в различных редакциях, научных советах АН и занимал важные государственные должности: главного математика Госснаба СССР, руководителя созданного им научным совета ГКНТ по оптимизации и транспортного совета АН, члена ведомственных советов и комиссий (например, Госкомитета по ценообразованию и Министерства путей сообщения).

Несмотря на огромные усилия Канторовича по внедрению своих результатов и ряд занимаемых им высоких должностей из-за сопротивления ему удалось внедрить много меньше, чем это было потенциально возможно. Но ряд важных для СССР проектов всё же был осуществлен. Отметим методы раскроя (начатые в 1939-1942 гг. и внедренные начиная с 1948–1950 гг. на разных заводах), тариф на такси 1961 г. и систему оптимальной загрузки прокатных станов всего СССР 1964 г.

3.7. Наследие Канторовича

Круг решенных Канторовичем задач столь широк, что говорить об одной области его таланта невозможно, как и о том, в какой науке его деятельность имела большее значение: в математике или экономике. Начав как математик, Канторович стал ученым с мировым именем: среди прочего, создав сильнейшую школу ФА, принципиально новое направление (теорию полуупорядоченных пространств) и «универсальную эвристику» (см. [98, С. 16–19]). В математике укоренились пространства Канторовича, ядра Канторовича, метрика Монжа-Канторовича, метод Ньютона-Канторовича, вариационный метод Канторовича и разнообразные теоремы Канторовича. Отсюда – математический подход к экономике, которой он отдал вторую часть жизни, сочетая глубокую математическую интуицию с удивительной проницательностью в экономике. Его вклад в экономику сложно переоценить: им была создана абсолютно новая область – ЛП. Гармоничное сочетание самых разных вопросов – характерная черта его научного наследия: его работы дополняют друг друга, складываясь в цельную картину. Синтез позволял ему, не останавливаясь на частных моментах, видеть целостный результат. Вместе с тем Канторович не избегал частных проблем, приложений, изучал специфику областей применения созданного им аппарата. Как писал сам учёный [110, С. 24]: «…для моей деятельности характерным является постоянное взаимопроникновение теории и практики…» (что характерно для Петербургско–Ленинградской математической школы), свидетельство чему – всё его наследие. Его открытия решали инициировавшие их проблемы, создавали новые области и показывали направления развития.

Канторович был великим ученым, человеком и гражданином. Он постоянно стремился служить стране применением своих открытий, игнорируя открытое сопротивление. Величие его научного гения, гражданская воля и стойкость удивительно сочетались с человеческой добротой и мягкостью, дружелюбностью и заботой, простотой и легкостью общения (см. [131]).

Канторович до конца жизни был полон творческих сил и энергично работал. Уже в больнице перед смертью он диктовал статью «Мой путь в науке», которая вышла сначала в урезанном виде (см. [40]) и позже целиком (в [110]). Канторовича не стало 07.04.1986, его похоронили на Новодевичьем кладбище Москвы.

Канторович написал свыше 300 работ как теоретического, так и практического характера. Что замечательно, они прекрасно иллюстрируют его подход к науке, которую он понимал, как единое целое, а ее средства – не как специфические для каждой области, а, напротив, – как связующие эти области воедино. В его творчестве предельно абстрактная работа может соседствовать с абсолютно прикладной. И эта близость может обогатить обе. Мы уже говорили с этой точки зрения о работах [71], [39], [72], [76] и [52]. Добавим сюда же [14] – разработанные и внедренные тарифы на такси, неспроста опубликованные в главном журнале СССР по математике.

Максимально кратко прорыв, сделанный Канторовичем в экономике, можно описать так: он показал неразрывную связь (через объективно обоснованные оценки) оптимального плана и оптимальных цен, приняв ключевое участие в разработке концепции последних (см. [38, С. 16]).

Можно сказать, что Канторович был центральной фигурой в возрождении экономики в СССР и стремительном появлении школы математической экономики, а центр этих исследований перемещался по стране вслед за ним. Перемены быль столь значительны, что на Западе появилось выражение «математическая революция» [12, С. 156].

Наследие Канторовича – школы в математике и экономике – не только научные труды, но и люди: множество прямых учеников и огромное число людей, которых вдохновила и направила его деятельность. Для них он «был образцом честности, бескомпромиссности и твердости в науке, объективности и трудолюбия» [102, С. 25].

Глава 4. Данциг и линейное программирование

Данциг, чьё влияние на науку и практику выдвинуло его в число известнейших математиков 20 в, известен, прежде всего, как создатель ЛП и СМ. Однако его следует воспринимать как многостороннего исследователя, организатора и преподавателя.

Он оказал большое влияние на военное и индустриальное планирование и производство, экономику, математику, ИО, теорию вычислительных машин и систем, прикладную науку и технологии, что привело к росту соответствующих образовательных программ. Данциг лично имел более пятидесяти учеников.

Через шестнадцать лет после того, как Данциг сформулировал ЗЛП и создал СМ ее решения, в предисловии к своей ныне классической книге [186], он пишет:

«Решающим критерием при оценке той или иной теории является ее способность решать те проблемы, которые послужили исходным толчком для ее развития…

Эта книга посвящена теории систем линейных неравенств и их решению…

Эта книга основана на конструктивном рассмотрении исследуемых проблем. Она отражает начальную стадию развития теории, достаточно могущественной для того, чтобы справиться с теми трудностями, которые возникают при решении задач, лежащих в основе этой теории» [22, С. 7–8].

Таков был взгляд Данцига на ЛП и математику в целом:

- реальные задачи – источник развития математики не ради ее самой, а для практики (этот подход служил ему всю его долгую продуктивную жизнь: см. [3], [4]);
- хотя ЗЛП, на первый взгляд, связана с оптимизацией в условиях ограничений, в действительности она целиком состоит в решении СЛН;
- необходим конструктивный (особенно алгоритмический) подход к поиску именно тех типов решений, которые нужны в практических задачах принятия решений.

4.1. Путь к симплекс-методу

Данциг родился 8.11.1914 в США. Отец – математик – Т. Данциг и мать А. Оуриссон встретились в Сорбонне, изучая математику. Отметим основные, на наш взгляд, факты его биографии (подробнее о его детстве см. в [152], [153]).

Вначале ему не доставало интереса к школе, но в седьмом классе он увлекся естественными науками и математикой. Однако, он провалился на первом экзамене по алгебре (в девятом классе), но, проявив твердость и активно взявшись за дело, стал отличником по математике и естественным наукам, чрезвычайно увлекшись проективной геометрией и решая огромное количество задач, даваемых ему отцом, работавшим тогда на математическом факультете университета Мэриленда.

В 1936 г. Данциг получил бакалавра математики и физики в университете Мэриленда, а в 1938 г. – магистра математики Мичиганского университета. В Эн Арборе (Ann Arbor) он изучил курс статистики у Г.К. Карвера – учредительного редактора «Annals of Mathematical Statistics» и основателя Института математической статистики, но остальная часть учебного плана показалась Данцигу чрезмерно абстрактной, и после магистратуры он пошел в Бюро трудовой статистики (Bureau of Labor Statistics – BLS). Этот шаг оказался судьбоносным для него и математики. Он узнал множество практических приложений, а также получил задание написать обзор статей выдающегося математика-статистика Е. Неймана, работавшего в университетском колледже в Лондоне и вскоре переехавшего в Калифорнийский университет в Беркли. Статья очень заинтересовала Данцига: он увидел логический подход к статистике вместо «набора уловок», как казалось ему ранее. Его интерес к академической науке оживился, и он, пересмотрев планы на карьеру, написал Е. Нейману.

Так в 1939 г. Данциг стал докторантом математического факультета Беркли у Е. Неймана (заметим, что в этот же год Канторович издал знаменитую брошюру о ЛП [39] и, кроме того, уже был математиком с мировым именем). Там произошел случай, ставший легендой. Данциг опоздал на класс Е. Неймана. Зайдя, он увидел на доске две задачи, и принял их за домашнее задание. Они показались ему сложнее обычных, но ему удалось-таки их решить. Оказалось, что это были открытые проблемы математической статистики. Это определило научную деятельность Данцига у Е. Неймана: его диссертация [177] состояла из решений этих задач. Одно опубликовали уже в 1940 г. ([187]); второе, по не понятным причинам, – лишь в 1951 г. – причем как совместную статью с А. Вальдом [213], которая оказалась связана с ЛП: в [346] авторы построили «…наилучший критерий проверки простой гипотезы, имеющей единственную альтернативу. Для более общего класса гипотез авторы показали, что если существует критерий, удовлетворяющий их лемме в обобщенной форме, то он будет оптимальным» ([22, С. 30]), а в 1939 г. (и в [177]) Данциг впервые доказал существование такого критерия при достаточно слабых предположениях. Это – первое доказательство ТД ЛП и такого же утверждения в случае счетного (и даже несчетного при использовании интегралов) множества переменных (см. [22, С. 30]).

Когда в 1941 г. для получения Данцигом степени оставался лишь ряд технических процедур, он, почувствовав (как и Канторович по другую сторону океана) гражданский долг и страстное желание внести свой вклад, поступил в ВВС США, где создал систему для доклада данных боевыми единицами. Работа включала планирование и моделирование, что при примитивном состоянии вычислительных машин тех дней было сложность задачей. За это он в 1944 г. получил «Exceptional Civilian Service Medal».

В 1946 г. Данциг вернулся в Беркли для защиты диссертации. Примерно тогда же ему предложили там должность, но он стал математическим руководителем патентного ведомства ВВС США – второе важное решение на пути к ЛП и СМ.

4.2. Линейное программирование и симплекс-метод Данцига

Отметим, что к началу исследований Данцига по ЛП уже существовали работы двух основных авторов, внесших существенный вклад в разработку ЛП: Канторовича и математика-статистика-экономиста Купманса. Можно утверждать наверняка, что Данциг не был знаком с их работами.

Вклад Канторовича в ЛП описан в главах 2 и 3. Здесь же заметим, что две статьи по ЛП написаны им на английском языке (во время Второй мировой войны) и рецензированы на Западе [260] и [362]. Следовательно, нельзя говорить, что они были совершенно неизвестны на Западе.

Что касается Купманса, то он эмигрировал во время Второй мировой войны из Нидерландов в США в 1940 г. и служил в «Combined Shipping Adjustment Board», координировавшем торговый флот союзников, главным образом США и Великобритании. Первая статья Купманса, касающаяся ЛП, датируемая 1942 г., была засекречена, а открыто опубликована лишь в 1970 г. [307]. В 1947 г. ([308]) Купманс смотрит на эти вопросы через призму военного опыта, и развивает то, что позже назвали ТЗ [178]. Отметим, что эти работы фокусируются на моделировании специфического случая морских перевозок (на который Купманс ориентировался) и не алгоритмичны.

Позднее Купманс узнал о статье 1941 г. алгебраиста Массачусетского технологического института (MIT) Ф.Л. Хичкока [272] (см. комментарии в Приложении 9 и обзор в [291]), где даны модель и метод для специального класса ЗЛП – ТЗ (см.

историю этой проблемы в [359]). Напомним, первая работа Купманса по этой теме вышла годом позже, но отметим, Хичкок почти не говорит о применимости модели и метода. Подробный разбор проблемы с математической точки зрения и эффективные алгоритмы появились на Западе существенно позже ([308], [310], [179]). ТЗ (как и основная задача теории матричных игр) стимулировала развитие алгоритмов ЛП на Западе.

Как Данциг и Купманс не знали о Хичкоке, так и он не знал о Канторовиче. Вообще, критерий оптимальности в ТЗ рассматривался кроме Хичкока Канторовичем как самостоятельно [52], так и совместно с Гавуриным [76], а также Купмансом ([308], [310]), Фалкерсоном [253] и др.

У Данцига было и множество других предшественников (см. Гл. 1), здесь же упомянем работы фон Неймана [342], [340] и его совместную с О. Монгенштерном книгу [343] (см. 5.2), а также диссертацию Моцкина (см. 1.10.).

Однако вдохновили Данцига не они (о них он тогда не знал), а работа Леонтьева [320], на которую его внимание обратил бывший коллега по BLS (см. выше) Д. Эванс (опять видим роль выбранной Данцигом когда-то работы). По мнению Данцига [22, С. 24], огромный вклад Леонтьева в том, что он дал количественную модель воздействия государственной политики и потребительских тенденций на секторы промышленности со сложной системой взаимоотношений. Наибольшее впечатление произвели эмпиричность модели и организационный талант Леонтьева (сбор данных, решение модели, применение результатов): Данциг увидел их важность для успешных приложений.

Открытие Данцигом ЛП и СМ переплетено с историческим контекстом: Холодной войной и началом Компьютерного века. Огромный вклад ученых во время Второй мировой войны и после показал силу математического моделирования для практики (о взаимодействии науки и военных см. 5.3).

В США ЛП выросло из потребностей Второй Мировой Войны и шло сначала в учрежденном ВВС в 1947 г. проекте SCOOP (Scientific Computing of Optimum Programs**)** (см. [165]; см. также литературу в примечании №63 в [296]), который в большой степени обязан появлению компьютеров. Сначала в 1946 г. Данцига привлекли для разработки аналогового прибора, получающего уравнения всех типов, данные и правила и выдающего программу (план операций ВВС с огромным числом разных ресурсов).

С 1946 г. Данциг в Пентагоне проводил «механизацию» планирования для поэтапного развертывания тренировочной и снабженческой деятельности ВВС. Он не был связан с Office of Scientific Research and Development (OSRD), а работал напрямую математическим советником ВВС (см. 5.3). Данциг имел во время войны опыт обучения персонала расчетам таких программ, хотя тогда это делалось настолько медленно, что занимало более 7 месяцев на программу (см. [296]).

Но времена менялись, начинался компьютерный век, Данциг отказался от «аналогового прибора» и стал разрабатывать алгоритм (ставший в итоге ЛП) и содействовать развитию компьютеров [165, С. 177]. Скоро стало понятно, что теперь можно добавить в программу «цель», в результате в мае/июне 1947 г. появилась целевая функция. В итоге создали группу с Данцигом, позже ставшую проектом SCOOP, математизировавшую задачу в форме современной ЗЛП.

Подход Данцига к математизации этой задачи положил начало новой эпохе. Он создал линейную модель, отражающая доступные запасы и необходимый выпуск в многопериодном временном промежутке. Такие условия в большинстве случаев приводят к недоопределённой системе даже при неотрицательных переменных. Для выделения «наилучшего» решения, Данциг ввел линейную целевую функцию, что стало инновацией, чем Данциг чрезвычайно гордился и говорил: «линейное программирование является анахронизмом», указывая на экономистов Ф. Квеснея, Л. Варласа, В. Леонтьева и математика Дж. фон Неймана, которые, по мнению Данцига, должны были ввести целевую функцию [351, С. 102].

Открытие Данцигом ЗЛП и СМ было совершено независимо, но отнюдь не в изоляции. На каждом этапе этому способствовал ряд событий: формулировку он обсуждал с коллегами по ВВС (особенно М. Гейслером и М.К. Вудом) и персоналом NBS, а А. Кан из NBS предложил поговорить с Купмансом. В июне 1947 г. произошел визит, который, как выразился Купманс, закончился «неспешным началом». Но скоро Купманс (вероятно, оценив экономическое значение модели Данцига) раскрыл информацию о его работе 1942 г. по ТЗ и статье Хичкока 1941 г.

Еще один исключительно важный визит имел место в октябре 1947 г. Данцигу посоветовали встретиться с фон Неманом [183, С. 13], что было логично, так как последний во время и после войны занимал множество важных должностей в военных силах США [377, С. 42]. Впечатленный разговором Данциг написал яркий отчет (см. [153]), где рассказал, как начал с объяснения модели ЛП, описав ее фон Нейману так, как он сделал бы это «простому смертному». Фон Нейман же, что было совершенно нехарактерно для него, отрывисто сказал, чтобы Данциг «переходил к сути дела». Тогда Данциг быстро набросал геометрическую и алгебраическую версии задачи, после чего фон Нейман сказал: «не хочу, чтобы вы думали, что я вытаскиваю всё это из рукава экспромтом, как фокусник. Я только что закончил книгу с Оскаром Монгенштерном по ТИ. Что я делаю – я предполагаю, что две проблемы эквивалентны. Теория, которую я описываю для вашей задачи, аналогична той, что мы развили для игр» [194, С. 45]. В течение следующих полутора часов он читал Данцигу лекцию о математической теории ЛП. Так вскрылась связь ЛП и ТИ (см. [194], [183]). Фон Нейман (согласно Данцигу) указал ему на лемму Фаркаша, перевод на язык СЛН результатов ТИ, понятия двойственности и ТД ЛП, и выдвинул гипотезу эквивалентности ЗЛП и матричной игры двух лиц с нулевой суммой, сопоставив поиск оптимальной стратегии матричной игры и ЗЛП и в силу наличия двух игроков в первой предположив двойственность в ЛП.

ТИ уже была включена в ТВ и ТЛН и понимание этой связи с ТИ дало путь к открытию ТД ЛП. Связи ЗЛП и ТИ снабдили первую математическим фундаментом в виде ТЛН и ТВ, подсказали поиск ТД ЛП (так как решения игр двух лиц с нулевой суммой существуют парами – по одной оптимальной стратегии у игрока) и перевели исследования с практической задачи ВВС по логистике на путь, приведший к НЛП. Встреча расширила предмет ЛП и качественно повысила интерес математиков к области. Военно-университетский комплекс сыграл большую роль, так как эти связи были вскрыты в результате личных контактов Данцига и Неймана, а дальнейшему развитию помогло финансирование академических исследований военными.

Согласно Данцигу, он сам записал первое строгое доказательство ТД в заметке «A Theorem on Linear Inequalities» 5 января 1948 г. [194, С. 45], но не опубликовал, так как считал его полностью заслугой фон Неймана: «Потому, что это был не мой результат, а фон Неймана. Всё, что я сделал – записал для внутреннего пользования мое доказательство того, что изложил фон Нейман» [194, С. 45–46]. Фон Нейман тоже написал заметку для внутреннего пользования [340, С. 90] от 15-16 ноября 1947 г. (см. [296] с интересным обсуждением вклада и первенства фон Неймана, Данцига, Куна). В ней он искал $\max_x\{ax\}$ $(a \geq 0)$ с ограничениями $x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, $xA \leq \alpha$, $(\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_v \geq 0)$ [340, С. 90] и, рассмотрев случай, когда конечный максимум существует, определенным образом переформулировал начальную задачу. С современной точки зрения результат можно выразить так: если в прямой задаче существует конечный максимум, то в двойственной существует минимум, и они равны [340, С. 92: замечание Куна и Таккера]. Однако, в заметке нет явного двойственного утверждения: ни двойственной задачи, ни ТД, но фон Нейман в ней ввел двойственные переменные, хотя и без такого названия, и нашел область их допустимых значений. Фон Нейман сыграл огромную роль в создании и развитии ТИ и ЛП и этим способствовал дальнейшим исследованиям ТЛН.

Информация о результатах Данцига по ЛП и их применимости достигла Office of Naval Research (ONR) (см. 5.3). В мае 1948 г. Данциг вновь посетил Принстон, чтобы обсудить с фон Нейманом создание университетского проекта по ЛП. Летом его учредили под руководством принстонского математика Таккера (см. 5.3).

Что касается алгоритма для ЛП, Данциг предложил СМ летом 1947 г., за месяцы до своего знакомства с фон Нейманом. В процессе он обсуждал версии СМ с экономистами Л. Гурвицем и Т. Купмансом. Когда стало ясно, что СМ по сути идёт по граням многогранника, Данциг отверг его, сочтя (как и Канторович – см. 2.3) неэффективным для практики. К счастью для математики и приложений он преодолел эти сомнения, когда ему удалось проинтерпретировать СМ в виде того, что он называл «геометрией столбцов», что, предположительно было навеяно первой частью его докторской диссертации ([177], [213], [189]).

При ограничениях вида $x_1 + \ldots + x_n = 1$; $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$ (которые типичны, но ни самые общие, ни обязательные) остальные ограничения $A_{\bullet 1}x_1 + \ldots + A_{\bullet n}x_n = b$ эквивалентны требованию представления столбца b в виде выпуклой комбинации столбцов $A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n} \in \mathbb{R}^m$.

Присоединив коэффициенты целевой функции c_j к столбцам $A_{\bullet j}$, Данциг получил векторы $(A_{\bullet j}, c_j)$, а, присоединив переменную z к вектору b, – вектор (b, z). Далее он рассмотрел ЗЛП как задачу поиска положительно взвешенного среднего векторов $(A_{\bullet 1}, c_1)$, …, $(A_{\bullet n}, c_n)$, равного (b, z) с экстремальным z.

Было известно, что если линейная программа (в стандартной форме) имеет оптимальное решение, то существует решение – угловая точка области допустимых решений. Кроме того, такие точки соответствуют (не обязательно взаимно однозначно) базисным допустимым решениям ограничений, представленных в виде СЛУ. В условиях обоснованного предположения полного ранга изначальной системы ограничений приходим к рассмотрению невырожденных матриц следующего вида:

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ A_{\cdot j_1} & A_{\cdot j_2} & \cdots & A_{\cdot j_{m+1}} \end{bmatrix}$ таких, что $B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \geq 0$.

Столбцы $A_{\cdot j_1}, A_{\cdot j_2}, \dots, A_{\cdot j_{m+1}}$, рассмотренные как точки $\mathbb{R}^m$, находятся в общем положении. Таким образом, их выпуклая оболочка – m-симплекс.

Чрезвычайно важным было осмысление n точек $A_{\bullet j}$ как лежащих в плоскости $\alpha = \mathbb{R}^m$ и изображение кортежей ($A_{\bullet j}$, c_j) как точек на линиях, проходящих через $A_{\bullet j}$ перпендикулярно $\mathbb{R}^m$, на расстоянии c_j от α. *Линия требований,* состоящая из точек (b, z), $b \in \mathbb{R}^m$, z – (переменное) значение целевой функции, тоже ортогональна α. Для любого допустимого базиса линия требований пересекается с σ – выпуклой оболочкой соответствующих точек $\left(A_{\cdot j_1}, c_{j_1}\right), \left(A_{\cdot j_2}, c_{j_2}\right), \dots, \left(A_{\cdot j_{m+1}}, c_{j_{m+1}}\right)$ – в точке (b, z), ордината z которой является значением целевой функции, заданным ассоциированным базисным решением. (m + 1) вершина симплекса σ определяет гиперплоскость в $\mathbb{R}^{m+1}$. Вертикальное расстояние от точки ($A_{\bullet j}$, c_j) до этой гиперплоскости показывает, улучшила ли бы эта точка значение целевой функции базисного решения, которое было бы достигнуто, если бы она заместила один из базисных столбцов. Выпуклая оболочка этой новой точки и σ является (m+1)-симплексом τ в $\mathbb{R}^{m+1}$. Линия требований пересекает границу τ в двух точках: предыдущем решении и другой точке с лучшим значением целевой функции. В (невырожденном) случае, когда новая точка лежит внутри грани (m+1)-симплекса τ, назовем ее ρ, существует единственный (в настоящее время базисный) столбец, для которого соответствующий вес (барицентрическая координата) равен нулю. Эта точка расположена напротив новой грани ρ, где линия требований пересекает границу (m+1)-симплекса τ. Заметим, что ρ является m-симплексом и соответствует новому и улучшенному допустимому базису. Данный процесс осуществления смены базиса называется вращением симплекса.

Несмотря на этот успех сразу стала ясна необходимость огромного скачка в развитии вычислительных машин: даже в такой форме алгоритм был слишком трудоемок для актуальных задач. В течении года с появления СМ возникла программа колоссального и динамического масштаба – Берлинский воздушный мост – планирование авиарейсов и снабжения, тренировки пилотов: за 463 дня Британия, Франция и США перевезли воздухом более двух миллионов тонн грузов.

29.12.1947 на заседании объединенного ежегодного собрания Американской ассоциации по статистике (American Statistical Association – ASA) и Института математической статистики (Institute of Mathematical Statistics – IMS) Данциг прочел короткую лекцию «Математическая техника планирования программ» о СМ [230, С. 134].

Позже Дорфман вспоминал: «Нет никакого подтверждения, что статья Данцига привлекла какой-либо особенный интерес» [227, С. 292], что подтверждается отсутствием её публикации.

Через год метод появился повторно на объединенном национальном собрании IMS и Экономического общества. Речь Данцига «Программирование с линейной структурой» привлекла внимание. Её обзор [190] замечателен дальновидностью: упоминается модель ЛП, динамические системы, связи с ТИ, ссылки на вычислительные процедуры для «крупномасштабных цифровых компьютеров» и смелое предположение возможности практического решения этих задач. Последовали энергичное обсуждение и круглый стол с рядом важных фигур: Г. Хотеллинг, И. Капланский, С. Карлин, Л. Шепли и Дж. Тьюки.

Первая публикация математической модели Данцига для ВВС с обсуждением ЛП появилась в 1949 г. в [191]. Из списка литературы видно, что Данциг опирался на работы по экономике и ТИ Неймана: нет ни одной ссылки на работы по СЛН. Большие надежды экономистов на ЛП помогли продолжению проекта ONR по математической теории ЛП и ТИ. Также один из главных активистов в продвижении ИО – Ф. Морс – с первых шагов ЛП подчеркивал важность для ИО самого ЛП и фундаментальных исследований этой области (см. [294]).

ONR и RAND способствовали интересу к СЛН и ТВ и публикации сборника статей «Linear Inequalities and Related Systems» [314]. При этом ТД и связи СЛН и ТВ сами по себе (независимо от организаций) повышали интерес математиков к этим областям и ЛП.

Купманс в [309] рассказывает, как в 1944 г. он перешел в Комиссию Коулса (Cowles Commission): «…моя работа по транспортной модели расширилась в изучение анализа видов деятельности... в результате короткого, но важного разговора с Джорджем Данцигом, вероятно в начале 1947 г… последовали регулярные контакты и обсуждения, продолжавшиеся несколько лет. В некоторых из этих дискуссий участвовал Альберт У. Таккер из Принстона, внеся очень большой вклад в мое понимание математической структуры двойственности».

Важную роль в развитии ЛП (и НЛП) сыграла конференция «Conference on Activity Analysis of Production and Allocation» под покровительством Комиссии Коулса в 1949 г. с полусотней участников от университетов, государства и военных. Купманс играл значительную роль и был редактором Трудов конференции [150] с 25 статьями (автор пяти из них – Данциг). Представители тех же групп были на Симпозиуме по линейным неравенствам и программированию 1951 г. Там появились статьи Дж. Данцига и А. Ордена («Теорема двойственности, основанная на симплекс-методе» [206]) и М. Флуда [239] (о ТЗ с предшествующей литературой, включая статью Канторовича 1942 г., но без статьи Монжа 1781 г.), а также обзор А. Чарнеса, В. Купера и Б. Мелона по «Смешиванию авиационных бензинов» – данный тип вопросов стал важной областью ранних приложений ЛП. Виден переход от военных к гражданским приложениям (см. [352]).

Кроме ТЗ ЛП сразу нашло применение в сельском хозяйстве. Штиглер в 1945 г. в [370] рассмотрел наиболее дешевую «диету» с заданными свойствами (см. [254]), а в 1947 г. на ней испытали СМ (см. [22, С. 521], [370], [345]). Это была большая задача для счёта на настольных калькуляторах: 9 уравнений-ограничений, 77 неизвестных, 120 человеко-дней. В 1953 г. эту же задачу решили на IBM 701 за двенадцать минут.

4.3. Методы решения крупномасштабных линейных программ

Из речи М. Вуда на Симпозиуме по линейным неравенствам и программированию 1951 г. ([350]) виден размах задач ВВС: «Мы обсуждаем организацию более миллиона людей, классифицированных по примерно тысяче разных навыков. Эти люди организованы в примерно десять тысяч подразделений, каждое с собственным штатом и функциями, расположенных в немногим более трех сотен мест. Подразделения используют около миллиона разных типов запасов и оборудования с полной ежегодной стоимостью более 15 миллиардов долларов».

С 1952 г. Данциг работает в корпорации RAND, основанной как проект ВВС в 1945 г., а в 1948 г. ставшей независимой организацией, оставаясь «мозговым центром» ВВС. Он тепло вспоминал ([153, С. 311]) атмосферу, профессионализм коллег и организацию, а также свободу для исследований и написания книги [186]. Это было идеальным местом работы: сообщество сильных математиков и щедрое финансирование. В результате в 1952–1960 гг. в RAND он написал множество статей и заметок (большинство вошло в [186]) по ТИ, ЛП и вариантам СМ, крупномасштабному ЛП, ЛП в условиях неопределенности, сетевой оптимизации (включая задачу коммивояжера – Traveling Salesman Problem – TSP), целочисленному ЛП и приложениям.

Данциг продолжил начатое в Пентагоне исследование крупномасштабного ЛП. На Первой международной конференции по ИО он заявил: «…в то время как первоначальным предложением было использовать модель линейного программирования для того, чтобы совершенствовать программы военно-воздушных сил, вскоре было осознано, что даже по самым оптимистическим оценкам эффективности будущих компьютерных процедур и мощностей оборудования не будет достаточно, чтобы подготовить детализированные программы…» [180]. Но он постоянно стремился расширить возможности МП, особенно СМ, разрабатывая его разновидности, которым достаточно для итераций «компактного» базиса (то есть базиса значительно уменьшенного размера). Вскоре заметили, что для ЗЛП в стандартной форме ($cx \to \min$, $Ax = b$, $x \geq 0$) эффективность СМ больше зависит от m – количества ограничений ($Ax = b$), определяющего размер базиса, чем от числа переменных: «на практике» надо порядка $3m/2$ итераций. Метод с компактным базисом также численно значительно устойчивее.

Первым испытанием СМ на «крупномасштабной» задаче стала диета Штиглера (см. выше): верхние ограничения продуктов сильно увеличили общее число ограничений, дополнительно всё усложнив. Потребность в эффективной при верхних ограничениях модификации СМ опять всплыла в RAND: приоритетные проекты занимали весь вычислительный ресурс на долго вперёд. Они сделали более гибкий метод ранжирования: важность задания падала с ростом длительности исполнения. Формулировка этой задачи сама есть ЗЛП особой (типа назначения) структуры с ограничением часов x_{ij} на проект i в неделю j числом α_{ij}: $cx \to \min$, $Ax = b$, $lb \leq x \leq ub$. После замены переменных и добавления фиктивных переменных имеем задачу не с m ограничениями, а, по крайней мере, с $m + n$. Её решение могло еще больше замедлить всё! Данциг нашел новую вычислительную схему (она стала частью всех реализаций СМ), подходящую к этой задаче, как будто в ней лишь m ограничений и требующую очень мало дополнительно учитываемой информации для отслеживания переменных на их нижних и верхних границах и базисных переменных, а не только базисных/небазисных (как первоначальный СМ).

Из ТЗ и некоторых сетевых задач Данциг знал, что СМ очень эффективен при треугольной или почти треугольной структуре базиса. Всё усложняющиеся модели (особенно, динамических систем) требовали адаптации СМ. Хотя симплексные базисы таких задач не строго треугольны, они блочно-треугольны: $\begin{bmatrix} A_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ A_{T1} & \cdots & A_{TT} \end{bmatrix}$, что можно использовать для "компактификации" операций СМ. Все современные реализации СМ используют ускоренные методы Данцига из [196].

В 1954 г. Данциг в соавторстве опубликовал еще один важный результат ([200]): решение большой (для того дня) задачи коммивояжёра – поиска кратчайшего пути, посещающего единожды каждый город и возвращающегося в начало. После этой статьи задача получила известность. Кроме решения они нашли подходы к комбинаторной оптимизации и целочисленному программированию и описали историю задачи коммивояжёра.

Их метод решения приводит к решению ЗЛП с булевыми переменными для каждого ребра полного графа. Первый набор ограничений, например, сумма переменных на ребрах, инцидентных данной вершине, должен равняться двум. Число таких ограничений равно числу городов (n). Второй набор ограничений исключает под-турне (требование, что сумма переменных на ребрах, один конец которых лежит в множестве вершин S, а другой – за пределами S, должна быть не меньше двух), и их – порядка 2^n. Данциг был убежден, что их потребуется намного меньше и предложил Фалкерсону пари, что в их задаче с 42 городами будет не более двенадцати ограничений, но тот – хороший игрок в покер – сказал, что пари должно быть максимально точным и понизил до одиннадцати. Оказалось, что достаточно семи и еще двух для целочисленности оптимума. Во многих последующих работах искались такие, легко проверяемые, неравенства.

Они начали с турне, которое ищется с помощью одной из нескольких эвристик. Затем показали, как найти двойственные переменные в вершинах. После оценили небазисные ребра и нашли изменение базиса. Если решение переходит к другому турне, то шаг повторяется; если к под-турне – добавляется ограничение исключения под-турне; если к дробному решению – ищут и добавляют ограничение, проходящее через текущее решение и отсекающее дробное решение. То есть получился целочисленный СМ.

Работа [200] имела столь большой успех, что «…маловероятно, что даже Данциг, Фалкерсон и Джонсон могли предвидеть практический эффект, который работа в итоге произведет» [159]. Это проявилось в целочисленном программировании, где, по убеждению Данцига, ЛП стало ценным инструментом. Фактически, современные работы с задачей коммивояжёра используют подход [200].

Большое влияние на комбинаторную оптимизацию оказали основанные на потоке в сети работы Данцига и соавторов ([197], [199]). Ключевым стало наблюдение, что при целочисленных правой части и ограничениях получаются целочисленные базисные решения (значит СМ решает целочисленную программу). Если же и цены целочисленны, то двойственная задача целочисленна. В частности, ТД дает доказательство нескольких результатов комбинаторной оптимизации, называемых иногда «теоремы о минимаксе». Пример их применения – доказательство Дж. Данцигом и А. Хоффманом теоремы Дилворта [202] (см. Приложение 2).

Данциг развил множество приложений целочисленного программирования. Одно из них – «модель распределения флотилий» (используется в авиаперевозках). Хотя с ростом размера и детализации, растет и вычислительная сложность, модель доказала жизнеспособность, даже несмотря на частично-целочисленный характер. Один из первых примеров – статья [236] – задача стохастического целочисленного программирования о распределении (назначении) самолётов по маршрутам для максимизации прибыли с помощью назначения более крупных самолетов и большего числа самолетов на рейсы большего спроса. Стохастический вариант задачи допускает свободные места или частично неудовлетворённый спрос.

Родственная задача – минимизация числа танкеров для выполнения плана. Сейчас это используют чартерные авиалинии: расписание их полетов часто не сбалансировано и требуются перегонные полеты. Данциг и Фалкерсон [198], смоделировав это как задачу о потоках в сети, показали, как снизить перегоны, используя более чем минимальное число самолетов. Распределительная задача, ТЗ и задача о потоках в сетях родственны. Более того, в своей первой работе о максимальном потоке в сети Форд и Фалкерсон [242] упоминают, что задачу о максимальном потоке сформулировал Т. Харрис. Позже Форд и Фалкерсон [241] точнее описали её происхождение: изначально её поставил авторам Харрис. Он вместе с генералом Ф. Россом сформулировал упрощенную модель потока в железнодорожной сети и задачу о потоке в [270] (секретном докладе 24.10.1955 для ВВС, рассекреченном 21.05.1999), решая относительно крупномасштабную задачу о западной части СССР и Восточной Европе. Вопреки комментариям Форда и Фалкерсона, Харрис и Росс искали не максимальный поток, а, наоборот, минимальный разрез сети СССР.

В статье [209] Данциг и соавтор поставили задачу маршрутизации автотранспорта (Vehicle Routing Problem – VRP) – обобщение задачи коммивояжёра, которое «…требует определения оптимального набора маршрутов парка транспортных средств для обслуживания набора потребителей, и это – одна из наиболее важных и изученных задач комбинаторной оптимизации» [373].

Отметим статью Данцига [188] о задачах целочисленного программирования, стимулировавшую методы отсекающих плоскостей и направленного перебора с помощью ветвей и границ.

Данциг часто называл стохастическое программирование «настоящей проблемой», так как большинство важных задач принятия решений осуществляются в условиях неопределённости. Он всерьёз взялся за это в середине 1950-х гг. Вероятно, импульс дала задача распределения самолетов при неопределенном спросе [237]. Найдя решение, Данциг продолжил исследование, ввел фундаментальную модель стохастического программирования с компенсацией (коррекцией) и изучил ее основные свойства. Потребность в эффективном алгоритме для крупномасштабных задач стала еще ярче.

У Данцига была такая модель: $c \cdot x + E\ \{Q\ (\xi, x)\} \to \min$, $Ax = b$, $x \geq 0$, где $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание, $Q\ (\xi, x) = \inf\ \{q \cdot y \mid Wy = \xi - Tx,\ y \geq 0\}$, ξ – случайный вектор со значениями в $\Xi \subset \mathbb{R}^d$; обобщение модели допускает случайность параметров (q, W, T). Он показал, что это – корректно поставленная задача выпуклой оптимизации, без ограничений распределений случайных элементов: нужна лишь разрешимость задачи, определяющей Q, для всех x и $\xi \in \Xi$. Если же носитель $\boldsymbol{\xi}$ конечен ($\Xi = \{\xi^l,\ l = 1, \ldots, L\}$ с вероятностями $\{\boldsymbol{\xi} = \xi^l\} = p_l$) или дискретизация – следствие аппроксимации непрерывно распределенных случайных компонент, имеем крупномасштабную ЗЛП:
$c \cdot x + \sum_L p_l \cdot q \cdot y^l \to \min$, $Ax = b$, $Tx + Wy^l = \xi^l$, $x \geq 0$, $y^l \geq 0$, $l = 1, \ldots, L$.

ЗЛП крупномасштабна, так как даже если $\boldsymbol{\xi}$ состоит из десяти независимых случайных величин, каждая с десятью возможными значениями, то имеем не менее 10^{11} ограничений: 10^{10} возможных реализаций $\boldsymbol{\xi}$ дают 10^{10} систем из 10 уравнений. Но помог уже созданный метод декомпозиции Данцига-Вольфа, идеально подойдя к двойственной задаче ([204], основные идеи см. в [176]). Но всё еще на каждой итерации надо было решать множество «обычных» ЗЛП. И тогда появилась идея решать лишь часть из них. Конечно, это не гарантирует абсолютной оптимальности решения, но здесь Данциг и соавторы применили статистику [201], [203].

Как уже сказано Данциг написал ряд статей о стохастическом программировании. Потребность в методе для действительно больших (уже в современном понимании) ЗЛП встала еще острее. Данциг и Вольф в 1959 г. на Симпозиуме RAND по МП прочли лекцию о предложенном ими СМ для больших задач со специальной структурой – методе декомпозиции [214] (см. обзор метода и его приложения к ЗЛП с переменными коэффициентами в [176, С. 353] и одно интересное применение в [184]). Метод использует координирующую задачу, где сравнительно с начальной мало строк и много столбцов. Для ее решения не надо знать все столбцы явно: их можно генерировать в процессе СМ. Достаточно знать, какой столбец вводить в базис (что часто сводится к решению подзадачи) и уметь его генерировать. Метод оказался наиболее эффективен при блочно-диагональной матрице с небольшим числом переменных, но позже Д.Б. Юдин и Е.Г. Гольштейн модифицировали его для произвольных матриц (блочное программирование) [19], [145].

В 1960 г. Данциг перешел в Калифорнийский университет Беркли. Он вернулся в академическую науку – там создалась прекрасная исследовательская среда: каждый делал своё дело, взаимодействуя со студентами и исследователями из других мест ([153, С. 311]). Данциг продолжил в Беркли поиск метода с компактным базисом для крупномасштабных ЗЛП и создал более эффективный и численно устойчивый Generalized Upper Bound Technique (см. [176]).

4.4. Организаторская, преподавательская и издательская деятельность

Вклад Данцига не сводится к множеству успешных публикаций: он всегда активно поддерживал студентов, коллег, и всех интересующихся областью. Видя острую необходимость, он много занимался сложными вычислительными задачами, но больше всего его интересовали модели для решения важнейших вопросов общества, например, проект «PILOT» [208]. Он постоянно активно участвовал в деятельности IIASA, ведущего междисциплинарные исследования экологических, экономических, технологических и социальных аспектов глобальных изменений.

К 1960 г. ИО стало отдельной (междисциплинарной) областью, имеющей связи с математикой, статистикой, теорией массового обслуживания (теорией очередей), теорией вычислительных машин и систем, экономикой, деловым администрированием и инженерией. МП сыграло важную роль в формировании профессиональных организаций ИО. Уже в апреле 1948 г. в Лондоне основали Клуб ИО, ставший через пять лет Обществом по ИО. Американское общество по ИО (ORSA) основано в 1952 г., а годом позже создан Институт научных методов управления (TIMS), объединившиеся в 1995 г. в Институт ИО и наук управления (INFORMS). Эти организации (и не только) учреждали свои журналы, освещающие МП, ИО и оптимизацию. Данциг активно участвовал в основании Центра ИО (ORC) Беркли по обучению и исследованиям в области ИО.

В заключительной речи на Втором симпозиуме по ЛП 1955 г. Данциг сказал: «Главная часть моей речи была посвящена техническим аспектам линейного программирования. Я рассмотрел простые приёмы, которые могут сделать возможным эффективное решение многих задач, с которыми сталкиваются на практике. Интерес к этой тематике постоянно рос в промышленности и правительстве, и некоторые из этих идей могут позволить перейти от чистого интереса к практическому применению». Последнее – различие между интересом и применением – было глубоким убеждением Данцига. Он прекрасно осознавал и не понаслышке знал, сколь много можно достичь сочетая моделирование, математический анализа и алгоритмы типа СМ. И он добавил прогноз: «На протяжении следующих десяти лет мы увидим огромное количество важных приложений; и в самом деле, столь богатая содержанием и ценностью для промышленности и правительства эта математика программирования переместится на ведущие позиции в учебных планах университетов» [181, С. 685].

К началу 1950-х гг. в университетах начали появляться курсы ИО, а вмести с ними – ЛП: в 1953 г. Чарнес и Купер читали ЛП в Технологическом институте Карнеги, в тот же год появились программы ИО и ЛП для докторантов в Кейсовской школе прикладных наук, в 1954 г. ИО появилось в программе для инженеров в Стэнфорде и ЛП было одной из тем, в 1955 г. – в Корнеллском университете, в 1957 г. – в Северо-Западном университете.

В следующие десятилетия преподавание ИО в мире стремительно выросло: где-то его преподавали на уже существующих факультетах, где-то учредили новые. Из-за междисциплинарности области её называли по-разному и преподавали в разных местах (иногда даже внутри одной организации, например, в Стэнфорде).

В течение шести лет в Беркли Данциг курировал одиннадцать докторантов по МП: крупномасштабное ЛП, ЛП в условиях неопределенности, целочисленное программирование и НЛП.

С переездом Данцига в Стэнфорд в 1966 г. центр МП западного побережья США сместился туда же. Данциг всегда избегал обсуждения причин его карьерных решений. О последнем переходе он говорил, что ему пообещали парковочное место рядом с офисом. Потом Департамент переехал, но Данциг остался.

На факультет ИО пришел работать Р.В. Коттл, бывший студент Данцига в Беркли, и они написали несколько статей (одна из них стала классикой ИО [175]) о задаче линейной дополнительности (комплементарности): $F(x) \geq 0$, $x \geq 0$, $x \cdot F(x) = 0$, отображение F аффинно.

Несмотря на талант к планированию организационная и административная деятельность были Данцигу не интересны, но он все же занимал ряд таких должностей и способствовал мероприятиям. Преподавание в Стэнфорде он начал как президент TIMS; в 1968 г. соруководил очень успешным спонсированным AMS 5-недельным Летним семинаром по математике в науке принятия решений; в 1971 г. курировал финансированную НАТО Конференцию по приложениям оптимизационных методов для крупномасштабных задач распределения ресурсов (Дания); в 1973 г. председательствовал на 8-м международном симпозиуме по МП; стал первым председателем учреждённого Общества МП.

Под руководством Данцига факультет ИО Стэнфорда получил мировое признание. Среди многих начинаний Данцига выделим учрежденную и возглавленную им в 1973 г. лабораторию оптимизации систем (SOL), развивавшую методы и соответствующие компьютерные программы численного анализа и оптимизации крупномасштабных систем. В SOL работало много выдающихся ученых – авторов известных исследований и программного обеспечения. Постепенно число профессоров и студентов SOL росло, и со временем концепцию скопировали порядка дух десятков других учреждений.

Параллельно с созданием SOL Данциг работал над концепцией жилого многоэтажного города цилиндрической формы для полного использования вертикального измерения и функционирующего круглосуточно для оптимизации использования средств обслуживания ([210]).

Вместе с ростом преподавания ИО росла и издательская активность: учебники, задачники и методические пособия по разным вопросам ИО и МП. Вышли монографии Чарнса и Купера [171] в 1961 г., затем – Данцига [186] в 1963 г., столь богатая идеями, что её прозвали «Библией ЛП».

Данциг провел творческий отпуск 1973–1974 гг. в открывшемся годом ранее IIASA, изучающем энергетику, экологию, водные ресурсы и методологию. Данциг возглавлял методологическую группу, и это надолго связало его с IIASA.

В 1973 г. случился нефтяной кризис на Ближнем Востоке, что, вероятно, привлекло интерес Данцига к экономике энергетики, приведший через два года к «PILOT Model» (Planning Investment Levels Over Time), завладевшим умами Данцига и коллег по SOL до конца 1980-х гг. Как Данциг с соавторами сказал в [205], PILOT стремится «... оценить воздействие старых и предложенных новых технологий на рост экономики США, и как состояние экономики и экономической политики может влиять на скорость инноваций и модернизации». PILOT объединил три главных научных интереса Данцига: моделирование важного вопроса экономики, методологию крупномасштабного программирования и поиск оптимальных решений или экономического равновесия (задача дополнительности).

В 1985 г. Данциг стал заслуженным профессором в отставке, но его попросили остаться, и он еще тринадцать лет преподавал и занимался исследовательской деятельностью. В этот период усилился его давний интерес к стохастической оптимизации.

В 1989 г. молодой австриец Г. Инфангер приехал на время на факультет ИО как докторант Данцига. В докторантуре Технического университета Вены он занимался энергетикой, экономикой и ИО и собирался получать степень по этой теме, но Данциг увлёк его стохастической оптимизацией. Так началось чрезвычайно успешное сотрудничество.

Тогда же Данциг объединился с М. Тхапом, чтобы обновить свою книгу [186]. Они завершили две книги ([211], [212]), но в начале 2005 г. здоровье Данцига резко пошатнулось, не дав закончить еще две оставшиеся книги.

4.5. Наследие Данцига

Не претендуя на исчерпывающий обзор, остановимся на главном. Данциг был поглощён работой всю жизнь (см. избранные труды в [174]). Его СМ был назван одним из «10 алгоритмов» 20 в. [225]. До середины 20 в. СЛН изучались ограниченным кругом математиков и экономистов, обычно далеких от приложений. Показав, что задачи с СЛН можно успешно решать, Данциг (с его СМ) совершил переворот и создал новую математическую парадигму. Именно после работ Данцига ЛП получило широкое признание. Огромной популярности СМ способствовала прозрачная геометрическая иллюстрация: СМ – удобный алгоритм направленного перехода по вершинам полиэдрального множества допустимых решений ЗЛП к решению.

На Западе ЛП приняли с куда большим энтузиазмом, чем в СССР. Уже один из первых учебников [256], содержит обширный материал и впечатляющую библиографию, выбранную из более обширной работы [257], по применениям ЛП в производствах химическом, угольном, железа и стали, бумаги, нефти, к авиалиниям, коммуникациям и железной дороге. Прикладники поняли потенциал ЛП, поскольку теперь был эффективный метод решения. Это стало переломным моментом, стимулировав математику и компьютерные науки (см. [339] о вычислительных методах оптимизации). Также радужно ЛП встретили теоретики экономисты: [157] описывает роль Данцига в экономике, а в предисловии [228] сказано, что ЛП – один из важнейших послевоенных результатов экономики, и подчеркнуты его связи с ТИ, традиционной теорией стоимости, экономикой благосостояния и равновесием Вальраса.

Перемены в теоретической математике также были значительны: вместо классического подхода к анализу, ограничивавшегося, по существу, функциями и отображениями на открытых множествах и дифференцируемых многообразиях, возникла новая парадигма для работы с не обязательно дифференцируемыми или даже непрерывными функциями на замкнутых множествах и многообразиях. Для исследования особых точек таких функций появились субпроизводные. Существенно изменилась теория приближений, где получили распространение равномерные приближения. Теория целочисленных функционалов также получила новую базу, а многие старые задачи – значительное продвижение.

Как один из примеров (см. также 5.4) – теория ВМ развивалась в связи с ЛП (чему способствовала организация науки в США – см. 5.3). Распространение СМ оживило теорию выпуклых многогранных множеств. Сначала (в 1950-е гг.) его взяла на вооружение Принстонская команда Таккера, а скоро подхватили остальные. Тут помогла гипотеза В.М. Хирша: если дана линейная программа в стандартной форме, то есть допустимое множество задано как $S = \mathbb{R}_+^n \cap M$, где аффинное множество M задано m (не избыточными) линейными неравенствами, то между любыми вершинами S можно перейти по допустимому пути из не более $(m - 1)$ ребер, то есть СМ сделает не более m шагов. Эта гипотеза дала веру в эффективность СМ и, хотя оказалась ошибочна при $m >$ 4, привела к интенсивным исследованиям (В. Кли, Д. Волкап, Б. Грюнбаум, Д. Гейл, М.

Перлес, П. Макмаллен, Д. Калай, Д. Клейтман) геометрических свойства многогранных множеств. После построения примеров, когда СМ пройдёт каждую вершину S, стали изучать «ожидаемое» количество шагов (так как на практике СМ ведёт себя очень хорошо). Некоторые ответы появились в начале 1980-х гг. в [162] и [365]. Важность темы видна из статьи [364] про восемнадцать математических проблем 21 в., где девятая – о существовании полиномиального алгоритма над $\mathbb{R}$, определяющего разрешимость $Ax \geq b$.

Влияние Данцига на науку не ограничилось разработкой и внедрением в практику модели и алгоритмов ЛП: результаты его и коллег сразу убедили ВВС, сколь много можно достичь с более мощными компьютерами. ВВС стали финансировать Национальное бюро стандартов, которое финансировало исследования в области математики и электронных компьютеров, и разработку компьютеров UNIVAC, IBM, SEAC и SWAC: «…интерес ВВС в финансировании развития электронных компьютеров был одним из важных факторов их бурного развития» [354]. Данциг гордился ролью ЛП в этом процессе.

Признание заслуг Данцига. Вручение Нобелевской премии 1975 г. по экономике «за вклад в теорию оптимального распределении ресурсов» Канторовичу и Купмансу, но без Данцига неприятно удивило многих, включая лауреатов, которые в своих речах оба признали независимость работы Данцига. Купманс даже пожертвовал треть премии IIASA в честь Данцига. Однако в этот же год Данциг получил Национальную научную медаль США от президента Г. Форда, Теоретическую премию фон Неймана от ORSA и TIMS и стал членом Американской академии искусств и наук. Четырьмя годами ранее он уже был избран в Национальную академию наук США, а в 1985 г. стал членом Национальной инженерной академии. Наряду со многими другими наградами он имел восемь почетных докторских степеней и с 1970 г. был в редакторских коллегиях 22 журналов. В 2000 г. на 17-м Международном симпозиуме по МП Данцига удостоили звания основателя направления. Вскоре после конференции в честь его 90-летия (очень трогательного события по воспоминаниям присутствовавших коллег и учеников) здоровье Данцига резко пошатнулось и на следующий год его не стало.

Он построил жизнь вокруг МП, огромное место занимали связи со множеством учёных, инженеров и прикладников. Общение с ним всегда сопровождалось особой теплотой. Данциг как коллега и наставник (подобно Канторовичу) был бесценен. Глубина знания и опыт применения МП дополнялись терпеливостью и внимательностью в беседе: выслушав, он всегда давал ответ с компетентными советами. Так в Стэнфорде Данциг выпустил 41-го докторанта по крупномасштабному ЛП, стохастическому программированию, НЛП, комбинаторной оптимизации, сетям и графам, вероятности, динамическому ЛП и НЛП, дополнительности и экономическим равновесиям и пр. («академическое древо» Данцига см. в [323]).

Данциг заслужил тёплую помять близких и прочное место в истории математики своими работами и их влиянием на мир, а также учрежденной Математическим обществом оптимизации (MOS) и Обществом промышленной и прикладной математики (SIAM) премией Данцига, учрежденной INFORMS премией Данцига за диссертацию (Dantzig Dissertation Award) и стипендией Данцига по ИО в Стэнфорде.

Глава 5. Работы других авторов и общая картина развития линейного программирования

5.1. Обзор развития линейного программирования с точки зрения математики

Линейное программирование и родственные задачи. Заключительная глава данной работы посвящена теореме Каруша-Куна-Таккера, исследованиям фон Неймана и описанию алгоритмов, имевших наибольшее, с точки зрения автора, значение для развития области ЛП в целом. Однако, прежде чем перейти к данным вопросам, подведем промежуточный итог, который позволит увидеть общую картину развития ЛП и результатов этого прогресса.

Как известно, задачами ЛП называются конечномерные задачи о нахождении минимума или максимума линейной функции при ограничениях, заданных линейными неравенствами. Вот одно из аналитических описаний ЗЛП (его называют нормальной формой задачи):

$\langle c, x\rangle \to \max, Ax \leq b, x \geq 0,$ где $c, x \in \mathbb{R}^n, A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), b \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, 1 \leq j \leq m, x_i \geq 0.$

Или в таком виде $\langle c, x\rangle \to \min, Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n_+$ (5.1)

Множество допустимых x образовано пересечением конечного числа полупространств, то есть является полиэдром (если оно ограничено, то это – многогранник).

Данная задача геометрически интерпретируется как поиск опорной гиперплоскости (с заданной нормалью), определяемой целевой функцией, к полиэдру, описывающему множество допустимых решений.

Целесообразно подойти к вопросу со следующих сторон: теория экстремума, ТСЛН, геометрия полиэдров, математическая экономика.

Задача (5.1) принадлежит классу экстремальных задач, которые изучает математический анализ, и одновременно к классу выпуклых задач, исследованием которых занимается ВА. Сам ВА выделился в качестве самостоятельной области, получившей это название, в 20 в. В силу природы изучаемых ВА объектов, он одновременно относится как к геометрии (поскольку выпуклость изначально является понятием геометрическим), так и к анализу (в силу того, что – через Декарта – относится к ТСЛН). Постепенно ВА получил своё обобщение также и на случай бесконечномерных линейных топологических пространств, однако все наиболее важные факты относятся к конечномерному пространству, равно как все главные результаты имеют содержательную интерпретацию даже в самом простом двумерном случае (см. [143] о приложениях ВА, [30] – введение в ВА и его связь с экстремальными задачами и [114]).

Сквозной для всей теории выпуклости является идея, оформившаяся в виде принципа двойственности выпуклых объектов, заключающаяся в том, что у всех выпуклых замкнутых объектов есть два описания – в основном и двойственном пространствах. В рамках ВА исследуются такие объекты, как: выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи. ЗЛП (содержательный класс которых формализуется (5.1)) есть частный случай последних. В связи с этим ниже остановимся на каждом из этих понятий. Здесь же отметим, что, в принципе, можно сказать, что основные аспекты ЛП следуют из теорем, описывающих СЛН, среди которых центральное место занимают теорема Фаркаша-Минковского о зависимых неравенствах, двойственного представления многогранников и условия ограниченности многогранника.

Запишем ЗЛП так: $\max\{(c,x) \mid Ax \leq b\}$. Теорема Фаркаша-Минковского [231] является базовой для построения всей дальнейшей ТСЛН. Она говорит, что, если неравенство $(c, x) \leq \gamma$ является следствием системы $Ax \leq b$, то $\exists\{u_j \geq 0\}_0^m$, для которых $\forall x\colon (c,x) - \gamma \equiv (\bar{u}, Ax - b) - u_0$, при этом если $\{x \mid (c,x) - \gamma = 0\} \cap \{x \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset \Rightarrow u_0 = 0, \gamma = \max\limits_{Ax \leq b}(c,x)$. Из условия теоремы понятно ее значение для решения ЗЛП: ЗЛП разрешима $\Leftrightarrow \exists\gamma\colon (c,x) \leq \gamma$ следует из $Ax \leq b$. Причем, если $\gamma = \sup\{(c,x) | Ax \leq b\}$, то $\widehat{M} \coloneqq \{x | Ax \leq b\} \cap \{x | (c,x) = \gamma\} \neq \emptyset$, и $\forall \hat{x} \in \widehat{M}$ – решение ЗЛП. Тем самым эта теорема дает возможность работать с двойственными объектами ЛП и посредствам этого, во-первых, сводить ЗЛП к решению заданной в явной форме СЛН, и, во-вторых, сводить матричную игру в смешанных стратегиях к паре взаимно двойственных ЗЛП, и, следовательно, к обычной СЛН.

Теория выпуклых множеств. Теория выпуклых множеств поучила бурное развитие в течении девятнадцатого века и первой половины двадцатого века и связана в первую очередь с такими именами как: Коши, Штейнер, Брунн, Минковский и др.

Для рассмотрения выпуклого замкнутого множество, находящегося в конечномерном евклидовом пространстве, существует два подхода. Первый заключается в рассмотрении его как множества точек, для которого выполняется условие, что если какие-то две произвольные точки лежат в нём, то и весь отрезок, соединяющий данные точки, также лежит в нём. Второй подход (который следует из теоремы Минковского) заключается в рассмотрении этого множества, как пересечения всех полупространств, в которых лежит данное множество.

Минковский ввел для всякого выпуклого множества A, которому принадлежит начало координат, двойственную операцию, называемую полярой, которая ставит данному множеству в соответствие другое множество, называемое его полярой: $A^{\circ} = \{y \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall x \in A\}$. Если воспользоваться в этой ситуации теоремой Минковского, то получается теорема о биполяре: выпуклость и замкнутость содержащего начало координат множества A эквивалентна тому, что $A^{\circ\circ} = A$.

В качестве основных действующих лиц при создании теории двойственности следует назвать Минковского и фон Неймана, равно как (в геометрии и бесконечномерном анализе) А. Кэли, Ю. Плюккера, С. Банаха, Л. Шварца, А. Гротендика и др.

Говоря о концепции двойственного описания различных объектов, приведем ее проявление в виде интерпретации следующих двух теорем.

<u>ТД для конусов</u>: существуют два описания для выпуклого замкнутого конуса в $\mathbb{R}^n$. Согласно первому, это такое выпуклое множество, что если какая-то точка принадлежит ему, то и весь луч, исходящий из начала координат и проходящий через рассматриваемую точку, также принадлежит данному множеству. Согласно второму, это множество является пересечением множеств, определяемых однородными неравенствами. Точно также для полиэдрального конуса верно, что он есть как коническая оболочка конечного числе лучей, так и пересечение конечного числа множеств, выделенных линейными однородными неравенствами.

<u>ТД для многогранников</u>: существуют два описания для выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^n$. Согласно первому, это – выпуклая оболочка конечного числа точек. Согласно второму, он может рассматриваться как пересечение конечного числа множеств, выделенных линейными неравенствами. Если мы рассматриваем выпуклый полиэдр, то он является совмещение двух описанных результатов.

Вышеописанные факты прямо следуют из ТД Минковского. К отдельным частным результатам пришли Фаркаш, Вейль, Гейл, Ки Фань и др.

Начала теории выпуклых функций. Начала теории выпуклых функций были заложены в 19 в. и первой половине 20 в. такими учеными, как И. Йенсен, О. Штольц и др. Замкнутая выпуклая функция имеет двойное описание. Первое заключается в том, что это функция с выпуклым замкнутым надграфиком. Второе – следует из теоремы Фенхеля–Моро и заключается в том, что ее надграфик представляет собой пересечение надграфиков всех аффинных функций, надграфики которых содержат надграфик самой функции.

Фенхель ввел двойственную операцию (известную как преобразование Юнга–Фенхеля), сопоставив всякой выпуклой функции f, которая мажорируется аффинной функцией, новую функцию: $f^*(y) = \sup\limits_x(\langle x, y\rangle - f(x))$. Если применить сюда теорему Фенхеля–Моро, то получается, что: выпуклость и замкнутость мажорируемой аффинной функцией функции f эквивалентна тому, что $f^{**} = f$.

Из приведенных выше определений операций поляры и преобразования Юнга–Фенхеля также видна роль неравенств в построении теории выпуклости. Начала теории неравенств относятся к 19 в. и первой половине двадцатого, и связаны с такими именами, как Фурье, Фаркаш и др.

Экстремальные задачи и принцип Лагранжа. Рассмотрим задачи типа:

$$f_0(x) \to \min,\ f_i(x) \le 0,\ 1 \le i \le m,\ x \in A, \qquad (5.2)$$

где f_i – выпуклые функции, а A – ВМ в конечномерном евклидовом пространстве. Такие задачи называются выпуклыми и составляют важный тип экстремальных задач.

Исследование любого типа экстремальных задач подразумевает ответ на вопросы о существовании, условиях экстремума и методах его поиска. Для необходимых условий экстремума существует фундаментальный принцип – принцип Лагранжа. Суть этого принципа заключается в том, что для широкого класса экстремальных задач (с ограничениями-равенствами и неравенствами) эти условия получаются как условия минимума для функции Лагранжа, нахождение экстремума которой следует теперь уже рассматривать, как задачу без ограничений, но добавляя условия неотрицательности множителей Лагранжа и условия дополняющей нежесткости, соответствующие неравенствам. То есть для нахождения необходимого условия в (5.2) конструируют функцию Лагранжа для данной задачи и записывают для нее условие минимума, теперь уже как для задачи без ограничений. Тогда для (5.2) функция Лагранжа: $\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) =$

$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$, где $\{\lambda_i\}_{i=0}^{m}$ – набор множителей Лагранжа. Тогда для (5.2) получаем (теорема Каруша–Куна–Таккера): если $\hat{x}$ – решение (5.2), то найдется набор множителей Лагранжа $\hat{\hat{\lambda}}$, при котором функция $x \longmapsto \mathcal{L}\left(x, \hat{\hat{\lambda}}\right)$ достигает абсолютного минимума на множестве A и при этом выполнены условия неотрицательности и дополняющей нежесткости. (5.2) имеет двойственную, в которой множители Лагранжа выполняют роль переменных. Для выпуклых задачах, если множитель при функционале не равен нулю, необходимые условия экстремума являются одновременно и достаточными.

ЛП как подкласс экстремальных задач. Как уже сказано, решения любой экстремальной задачи изучают с точки зрения: существования, необходимых и достаточных условий экстремума, а также алгоритмов его поиска. Рассмотрим (5.1) с этой точки зрения.

a) Проблемы существования в задачах ЛП решаются посредствам соответствующей теоремы:

Теорема существования: Если множество допустимых элементов в задаче (5.1) не пусто и значение задачи не равно $-\infty$, то решение задачи существует.

b) Условия экстремума. В теории ЛП принцип двойственности выпуклых объектов теории выпуклости и принцип Лагранжа теории экстремума объединяются и дают такое утверждение: согласно принципу Лагранжа для выпуклых задач, если у (5.1) существует решение (обозначим его $\hat{x}$), тогда имеется набор множителей Лагранжа (обозначим их $\hat{\hat{\lambda}}$), такой что функция Лагранжа с ними достигает минимума в решении (5.1), то есть выполнено

– условие минимума (это основное условие): $\min\limits_{x \in A} \mathcal{L}(x, \hat{\hat{\lambda}}) = \mathcal{L}\left(\hat{x}, \hat{\hat{\lambda}}\right)$;

и, кроме того, выполняются также:

– условие дополняющей нежесткости: $\langle \hat{\hat{\lambda}}, A\hat{x} - b \rangle = 0$,

– условие неотрицательности: $\hat{\hat{\lambda}} \geq 0$,

и, сверх того, если при этом множитель Лагранжа при функционале не равен нулю ($\hat{\lambda}_0 \neq 0$), то все эти условия (минимума, дополняющей нежесткости и неотрицательности), взятые вместе, будут достаточными для минимума в (5.1).

Для (5.1) функция Лагранжа (с множителем Лагранжа при функционале равным единице) выглядит так: $\mathcal{L}(x, y) = \langle \mathrm{c}, x \rangle + \langle y, Ax - b \rangle$. Если $\hat{x}$ – решение (5.1), то

существует $\hat{y} \geq 0$, такой что $\min_{x \in \mathbb{R}_+^n} \mathcal{L}(x, \hat{y}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y})$, а также $\langle A\hat{x} - b, \hat{y} \rangle = 0$. Каруш был первым, кто пришел к данному результату (идея которого была заложена еще в работах Лагранжа). Произошло это в 1939 г., однако достижение осталось тогда незамеченным. В силу чего в 1950 г. было повторно открыто Куном и Таккером (исследование Таккера, Куна и Гейла началось в 1948 г.). Из сказанного выше следует, что значение задачи
$\langle b, y \rangle \to \min, A^T y \geq c, y \geq 0$ или в виде $\langle b, y \rangle \to \max, A^T y \geq c, y \in \mathbb{R}_+^m$ (5.3)
совпадает со значением (5.1). Эта задача называется двойственной к (5.1).

То есть, если $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, значение (5.1) равно значению (5.3), где множители Лагранжа выполняют роль переменных, функционал – роль правых частей, правая часть (5.1) – роль функционала (5.3), матрица ограничений транспонируется, а неравенства становятся противоположными.

Данный результат – проявление общего принципа двойственности выпуклых объектов, говорящего, что выпуклые объекты (множества, функции, задачи) имеют два представления (как выше продемонстрировано для ЗЛП).

Заметим, что у множителей Лагранжа есть полезная экономическая интерпретация.

c) Алгоритмы поиска экстремума. Один довольно примитивный алгоритм был предложен в работах Фурье. Первым реально применимым для серьезных задач методом решения ЗЛП стал предложенный Канторовичем метод РМ. Позже чрезвычайно важное продвижение – метод штрафов [26] – сделал один из учеников Канторовича – И.И. Дикин: «он строго сформулировал эвристические правила, которые его руководитель предложил» [123], показал сходимость метода, но не нашел ее скорость. Однако, как мы уже видели на других примерах, метод не заметили, пока не выяснилось, что он близок алгоритму Н. Кармаркара, появившемуся почти на два десятилетия позже [287]. Среди ранних эффективных методов отметим СМ Данцига. Именно с него началось действительно повсеместное использование численных методов для решения проблем выпуклого программирования. Другие значимые продвижения были получены А.Ю. Левиным и Д. Ньюманом (метод центрированных сечений), а дальнейшее развитие произошло в исследованиях Н.З. Шора, А.С. Немировского и Д.Б. Юдина (метод эллипсоидов), Л.Г. Хачияна (метод отсечения), Ю.Е. Нестерова, Л.А. Левина, Н. Кармаркара и других ученых (о них подробно см. 5.4).

Полное осмысление описанного произошло в достаточно короткие сроки:

– ТСЛН появилась уже в XIX в. (в исследованиях Фурье, потом Фаркаша), и продолжала развитие в середине XX в. (в работах Ки Фаня, Е.Г. Голдстейна и др.);
– развитие теории выпуклых полиэдров обязано работам Коши, Вейля и др.;
– Минковский открыл двойственность в выпуклость (сама идея двойственности принадлежит Минковскому, но он представил её в теории чисел, и в такой форме она не сразу стала ясна), а Крейн, Банах, Гротендик и другие создали теорию двойственности векторных пространств;
– первым, кто обратился к исследованию ЗЛП был Канторович, однако в силу ряда исторических и политических причин его исследования не были поддержаны. В противовес этому, на Западе исследования этого направления процветали и имели множество сторонников, в результате теория получила бурное развитие в США (в работах Данцига, Куна, Таккера и др.);
– задачи с неравенствами попали в фокус исследователей, преимущественно, в военные годы XX в. (в работах Каруша, Джона и др.);
– на развитие алгоритмов выпуклой оптимизации огромное влияние оказали работы Канторовича, Данцига и их последователей: А.Ю. Левин, Л.А. Левин, А.С. Немировский, Л.Г. Хачиян, Н. Кармаркар, Ю.Е. Нестеров и др.;
– вклад большого количества других ученых также заслуживает внимания (например, В. Кли, Б. Грюнбаум и др.). Что характерно, все результаты, полученные ими, имеют ясные формулировки и просты по существу.

Также можно сказать, что отдельный интерес представляет ТЗ и её осмысление, которое восходит к Монжу и продолжается в СССР в работах Канторовича и его учеников, а затем В.Л. Левина, А.А. Милютина и других ([107], [108]). Об этой задаче, получившей в итоге название «Задачи Монжа-Канторовича», уже шла речь выше.

Аналогичные проблемы также рассматривались в США Хичкоком в 1940-х гг. и в СССР А.Н. Толстым в конце 1920-х гг. ([133], [134]), где он изучает ТЗ и описывает некоторые подходы к её решению, включая хорошо ныне известную идею, что оптимальное решение не должно содержать циклов с отрицательной стоимостью в разностном графе – графе, содержащем ребра из каждого источника в каждый пункт потребления и дополнительно ребра из каждого пункта потребления к источнику, если перевозка по этому соединению положительна; в последнем случае цена обратного ребра равна по модулю и обратна по знаку цене прямого ребра). Однако Толстой (равно как и работа Канторовича 1940 г. [60]) не дает общего метода решения, который впервые появился в [76].

5.2. Фон Нейман, теория игр и ее связи с линейным программированием

Многие игры двух лиц описываются как поиск $\max_x \min_y xAy$, когда $x = \{x_1,\ldots, x_m\}$ и $y = (y_1,\ldots, y_n)^T$ пробегают множества неотрицательных векторов, $\sum_i x_i = \sum_j y_j = 1$, A – известная $(m \times n)$-матрица. Ясно что $\max_x \min_y xAy \leq \min_y \max_x xAy$.

Первые шаги в построении математической ТИ были предприняты в 1920-е гг. в статьях Э. Бореля (см. [296]) (он сосредоточивался на матрицах кососимметрического типа и выдвинул неверную гипотезу, что существуют матрицы такого типа, для которых достигается строгое неравенство), но первый по-настоящему серьезный результат принадлежит фон Нейману, доказавшему в 1928 г. теорему минимакса для игр двух лиц с нулевой суммой (показывающую существование их решения [342]; см. об истории ТИ и этой теоремы ссылки №№58-60 в [296]; о вопросе приоритета в ТИ – [300]), что $\max_x \min_y xAy = \min_y \max_x xAy$ для произвольной матрицы A [342], а это равносильно ТД ЛП, что продемонстрировано Данцигом, а также Гейлом, Куном и Таккером. Формулировка ТД была дана фон Нейманом в неопубликованной заметке [340]. Первое же опубликованное доказательство дали Гейл, Кун и Таккер в [255]. Причина такого глубокого взаимопроникновения ЛП и ТИ была вскрыта фон Нейманом и Данцигом, показавшим возможность приведения любой матричной игры двух лиц с ненулевой суммой и конечным числом стратегий к паре двойственных задач ЛП и наоборот (то, что основная задача ТИ эквивалентна паре двойственных ЗЛП было показано в [18]).

В 1928 г. произошло знаковое событие: фон Нейман на выступлении перед Математическим обществом в Геттингене (см. [342]) представил доказательство теоремы о минимаксе. Однако, в ТИ было почти полное затишье до 1944 г., когда вышел фундаментальный труд Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна [343].)

Доказательство этой теоремы имеет свою интересную историю (см. [300], [303], [295], [293]), начавшуюся с первой очень сложной аналитической версии, не имевшей никаких связей с СЛН – они возникли в 1937 г. в статье [341, С. 76] о линейной продуктовой модели, где фон Нейман пишет: «вопрос о разрешимости нашей задачи [СЛН] странным образом связан с задачей, возникающей в Теории Игр» [341, С. 5, примечание 1] (см. Приложение 9). Эту связь он установил через существование седловой точки действительнозначной функции, но не с помощью алгебры СЛН, а топологически: через расширение теоремы Брауэра о неподвижной точке, которое он доказал в той же статье [341, С. 80–81].

Намного более простой и чисто алгебраический путь фон Нейман нашел в начале 1940-х, работая над книгой [343] – первой последовательной книгой по ТИ, где дал доказательство через свою теорему об альтернативах (которая появилась опять в новом контексте и почти независимо – единственная ссылка была на работу Вейля по выпуклым многогранникам), названную «Alternative for matrices». Тогда фон Нейман, по замечанию Моргенштерна (см. [296]), еще не знал о доказательстве Ж. Вилля, приведенном в книге Бореля, считающимся первым алгебраическим доказательством [383], ознакомившись с которым фон Нейман решил положить в основу [343] «математико-геометрическую теорию линейности и выпуклости» [343, С. 128]. С помощью теоремы об опорной гиперплоскости из ТВ фон Нейман доказал свою «Теорему об альтернативах для матриц»: Если A – (n×m) матрица, то ровно одна из следующих СЛН разрешима:
$Ax \leq 0, x \geq 0, \sum_{j=1}^{m} x_j = 1$ или $wA > 0, w > 0, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. [343, С. 138–141]

Затем фон Нейман свел доказательство теоремы о минимаксе к простому следствию этой теоремы об альтернативах для матриц, и построил ТИ двух лиц с нулевой суммой на ТЛН. Статью Вилля (см. [296]) фон Нейману показал Монгенштерн, который наткнулся на неё случайно. И они тотчас решили использовать аналогичный подход, чтобы сделать путь к теореме о минимаксе максимально понятным и иллюстративным (см. [313, С. 116]), так как книга предназначалась для экономистов (хотя сразу стала ясна возможность применения теории к военным задачам.). После издания этой книги ТИ получила бурное теоретическое и практическое развитие и связи со многими областями. То, что ТЛН может быть положена в основу ТИ привлекло внимание к первой и способствовало ее прогрессу после Второй Мировой Войны, когда ТИ стала важной областью и получила поддержку военных ведомств США.

ТИ и ЛП имеют много общего: побуждающее воздействие практических задач, постепенный рост до уровня самостоятельной области математики, огромный объем вычислений (который изначально казался неосуществимым практически особенно при вычислительных мощностях того времени) и постепенное решение этой проблемы (разработкой эффективных алгоритмов и развитием ЭВМ).

5.3. Теорема Каруша–Куна–Таккера и нелинейное программирование

При исследовании ЗЛП появлялись новые подходы и обобщения, формируя целостную картину. Одним из них стал подход с позиций ВА, который в удобной форме формулирует задачу и признаки оптимальности решения, раскрывая при этом связи с двойственной задачей и её решением (см. Приложения 4–6), что имеет большое значение для понимания и экономической интерпретации. При этом не требуется введения большего количества специальной терминологии (основные понятия – пространства в двойственности (ПВД) и преобразование Лежандра – см. Приложение 2).

Началом современной теории НЛП стала статья «Nonlinear Programming» принстонских математиков Куна и Таккера на Втором симпозиуме Беркли по математической статистике и вероятности 1950 г. (это – первое появление термина «нелинейное программирование» в литературе; результат был анонсирован несколькими месяцами раньше на семинаре RAND в мае 1950 г. – см. [294]; см. также [302], [258] по истории НЛП).

Кун и Таккер рассмотрели задачу конечномерной оптимизации с ограничениями-равенствами: найти x^*, максимизирующий $g(x)$ при условиях $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \geq 0$, $x \geq 0$, где g, f_1, …, f_m определены и дифференцируемы при $x \geq 0$. Доказанная ими основная теорема (носящую теперь их имена) дала необходимые условия существования оптимального решения задачи и легла в основу начавшего с этого момента бурное развитие НЛП.

Интересно, что, во-первых, в отличие от ЛП, родившегося, из прикладного проекта – заказа военных, НЛП появилось из теоретического исследования. Во-вторых, в то время как Канторовичу и ЛП в СССР приходилось зачастую преодолевать сопротивление, для НЛП огромную позитивную роль сыграла организационная структура тогдашней науки в США и ONR, стимулировав работу университетских математиков-теоретиков над прикладными задачами.

До Второй Мировой Войны науку в США финансировали преимущественно частные фонды, а к государственному вмешательству относились с подозрением (см. [229], [390]). Во время войны в организационной структуре исследований произошли важные перемены – мобилизация гражданских ученых через появившийся в мае 1941 г. OSRD – временное учреждение военного времени, позволившее гражданским ученым работать над задачами военных по контракту не напрямую с военными, а через OSRD, оставаясь при этом в своих организациях. Подход оказался плодотворным. В 1946 г. OSRD реорганизовали в ONR, ставшее главным государственным спонсором как прикладных, так и фундаментальных университетских исследований до 1950 г. (литературу по ONR см. в примечании №67 в [296], также см. [299] о различных организациях, созданных в США в период Второй Мировой войны и после нее для вовлечения гражданских ученых в военные проекты).

Увидев возможные приложения модели Данцига в свете развития компьютеров, ONR создали специальное отделение логистики (и проект по изучению связи ЛП и ТИ и их математических оснований в виде выпуклости и линейности), ставшее самым успешным для флота, индустрии и университетов начинанием математического отдела ONR (см. [355, С. 111]).

В 1930–40 гг. постепенно осознали, что ТЛН является математическим основанием ТИ двух лиц с нулевой суммой, а в конце 40-х поняли отношение между ТИ и ЛП. Связь ЛП с ТИ, выпуклостью и СЛН сделала ЛП идеальным проектом для ONR, работающей с академической средой. Поэтому весной 1948 г. Данциг встретился с фон Нейманом для обсуждения проекта по ЛП, его связей с ТИ и лежащих в их основе математических объектов (выпуклости и линейности). Тогда же произошла первая встреча Данцига и Таккера. Во время короткой поездки к железнодорожной станции Данциг объяснил Таккеру суть ЛП, а тот сделал интересное замечание о возможной связи с законом Кирхгофа-Максвелла для электросетей. Это замечание сыграло огромную роль: ONR учредило специальный проект под руководством Таккера [151, С. 342–343] с участием двух студентов Куна и Гейла, который изменил их судьбы (до этого Таккер занимался, в основном, топологией, а Кун заканчивал тогда диссертационный проект по теории групп).

Они начали с изучения книги фон Неймана и Моргенштерна и заметки фон Неймана [340] и представили результаты через год в июне 1949 г. на первой конференции по ЛП и опубликовали их в [150]. Они получили не для «базовой» ЗЛП, а для обобщенной «матричной» задачи два главных результата, теоремы двойственности и существования. Теорема существования утверждает, что матрица D (или скаляр d), являющиеся решениями прямой и двойственной задач, существует, если СЛН определенного вида и «транспонированная» СЛН имеют решения. Доказательства обоих результатов основаны на лемме Фаркаша (из ссылок авторов видно, что они были знакомы с работами Минковского и Вейля; чуть позже они узнали о работе Моцкина, а из нее – о работе

Факраше [233]). Также авторы дали новое доказательство теоремы фон Неймана о минимаксе в ТИ, и показали, что оптимальные стратегии для игры двух лиц с нулевой суммой образуют решение соответствующей «базовой» ЗЛП и двойственной к ней. Это – результат военно-университетского взаимодействия в математических исследованиях, позволившего увидеть в ЗЛП интересную область математики.

Главным прорывом стала ТД ЛП. Связи ЛП и ТИ снабдили плановую задачу ВВС математической теорией, превратив из прикладной проблемы в ядро новой области математики на стыке СЛН, ВА и ТИ (это расширило предмет ЛП и показало направление развития [293]), что привлекло других математиков и сыграло большую роль в развитии ЛП и НЛП.

Что интересно, относительно «существования» они написали (см. [296, С. 528]), что фон Нейман обращался к сходной задаче для случая, когда d – скаляр, то есть они относили результат заметки фон Неймана к вопросу существования, а не двойственности.

Вскоре после первого результата в 1949 г. Таккер решил проверить свою изначальную догадку о похожести ЛП и закона Кирхгофа–Максвелла о электросетях, представив задачу как минимизацию тепловых потерь. Целевая функция получилась не линейная, а квадратичная, что навело на мысль о возможности распространения ММЛ на задачи с ограничениями-неравенствами [311, С. 12–13]. Таккер предложил Куну и Гейлу попробовать обобщить ТД ЛП на случай квадратичной функции [311, С. 13], и Кун согласился. В процессе они переключились с квадратичного на общий нелинейный случай. И хотя двойственного результата НЛП они не доказали, но поняли, что можно при определенных предположениях выпуклости получить полную эквивалентность между решениями задачи НЛП и соответствующими седловыми точками лагранжиана (см. [301]) и получили условия Куна–Таккера существования решения. Первую ТД НЛП получил В. Фенхель (см. [299]), который был заинтересован связями внутри чистой математики. За пару лет до этого в его лекциях сформировался фундамент теории выпуклых функций, а их публикация [234] способствовала развитию ТВ. Яркую роль в этом развитии сыграл Р. Рокафеллар, работа которого [356] резюмировала (через 20 лет) прогресс области до того момента и ввела в обиход словосочетание «выпуклый анализ» (за что Рокафеллар в предисловии выразил благодарность Таккеру).

Главной идеей для разработки НЛП стало свойство седловой точки лагранжиана: $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ максимизирует целевую функцию с ограничениями тогда и только тогда, когда существует неотрицательный $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$, такой что (x^*, u^*) – седловая точка лагранжиана [315, С. 481]. По-настоящему изящной особенностью оказалось то, что билинейная симметрия лагранжиана по x и u приводит к двойственности ЛП [315, С. 481]. Было естественно отталкиваться от этого свойства при расширении теории двойственности с ЛП на НЛП.

Кун и Таккер показали, что необходимым условием для того, чтобы $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ было решением задачи НЛП, является существование точки $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$, такой что $(\hat{x}, \hat{u})$ удовлетворяет необходимым условиям для того, чтобы быть седловой точкой лагранжиана (это – знаменитая теорема Куна–Такера и одноименные условия – см. Приложение 4; об аналогичных результатах Каруша и Джона см. ниже и в [294]). Потребовав вогнутость и дифференцируемость всех функций, они получили полую эквивалентность между решениями задачи НЛП и седловыми точками лагранжиана.

Таким образом, ТД ЛП – чисто теоретический результат – вызвал интерес Куна и Таккера, решивших обобщить ее на нелинейный (квадратичный) случай. Именно поэтому разработка ТД ЛП стала столь важна для появления НЛП. Хотя НЛП появилось в рамках ЛП, мотивы Куна и Таккера были совершенно иные: ЛП служило решению конкретной логистической задачи ВВС, НЛП же развивалось традиционно для университетской математики (хотя и не родилось из университетского исследования): ONR не ставили перед ними конкретной практической задачи, а лишь финансировали как прикладные, так и теоретические исследования (для них потенциальной применимости было достаточно) по оптимизации, которые касались ТИ, СЛН, ТВ и МП. Влияние ONR на ТИ и МП оставалось и позже: они поддерживали проект Таккера до 1972 г., после чего этим занялась National Science Foundation.

Вероятно, изданная в 1951 г. книгой [226] докторская диссертация Дорфмана «Application of linear programming to the theory of the firm, including an analysis of monopolistic firms by non-linear programming» стала первой книгой с «линейным программированием» в заглавии. Упомянутое «нелинейное программирование» – это то, что автор называет «квадратичным программированием» – оптимизация квадратичной функции, ограниченной СЛН (аналогичные задачи рассматривались в [158], [322]). Первой книгой непосредственно по ЛП стала [172] 1953 г.

Вильям Каруш и Фриц Джон. Условия Куна-Таккера стали широко известны после их работы [315]. Вскоре выяснилось, что Каруш и Джон доказали аналогичные вещи в 1939 и 1948 гг. (см. [294]), но оба остались незамеченными.

Каруш пришел к этому на математическом факультете университета Чикаго в (неопубликованной) магистерской диссертации [290] о конечномерных вопросах вариационного исчисления. Он, перспективный студент, занялся этим исследованием, поскольку оно обобщало сходные конечномерные работы Блисса с ограничений-равенств на неравенства [160]. И всё же в контексте чикагской школы вариационного исчисления (учрежденной Муром), теорему Каруша о существовании решения конечномерных версий интересных задач вариационного исчисления не сочли важной (см. [294]).

Каруш рассмотрел проблему минимизации функции f при наличии ограничений-неравенств. Ему удалось получить НДУ оптимальности, описываемые с помощью первых и вторых производных. Среди утверждений, полученных в работах ученого, есть следующее.

Пусть заданы непрерывно дифференцируемые функции f, g_1, …, g_m: $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ и требуется минимизировать f в условиях ограничений

$$g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0. \tag{5.4}$$

Пусть минимум достигается в точке x^0. Тогда можно считать, что $g_1(x^0) = \ldots = g_m(x^0) = 0$, так как пусть, например, $g_1(x^0) > 0$, – в таком случае в силу непрерывности $g_1(x) \geq 0$ при любых точках x достаточно близких к x^0, а следовательно, неравенство $g_1(x) \geq 0$ не накладывает никаких дополнительных ограничений. Полученный Карушем результат (**теорема Каруша**) формулировался так:

«Предположим, что для каждого допустимого направления λ существует допустимая дуга, выходящая из x^0 в направлении λ. Тогда первое необходимое условие минимальности $f(x^0)$ состоит в существовании таких множителей $\chi_\alpha \leq 0$, что все производные F_{x_i} функции $F = f + \chi_\alpha g_\alpha$ обращаются в нуль в точке x^0».

В данном случае допустимым направлением называется всякий вектор y, такой что $\nabla\{g_i(x^0)^T y\} \geq 0$ для $i = 1, \ldots, m$. Регулярная дуга $x(t)$, где t принадлежит отрезку $[0; t_0]$, является допустимой, когда $g_i(x(t)) \geq 0$ при всех t, принадлежащих отрезку $[0; t_0]$ и $i = 1, \ldots, m$. Фразу «выходящая из x^0 в направлении λ» следует понимать так, что $x(0) = x^0$, $x'(0) = \lambda$. Также для сокращения применяется следующая форма записи: $\chi_\alpha g_\alpha := x_1 g_1 + \ldots + x_m g_m$.

В случае линейности всех функций, ТД ЛП выводятся из теоремы Каруша.

До того, как ученым была получена данная теорема, применялся следующий универсальный способ: ограничения-неравенства приводились к ограничениям-равенствам путем добавления переменных, в результате чего неравенство $g_1(x) \geq 0$ превращалось в равенство $g_1(x) - n_1^2 = 0$ (см., например, [269]). Несмотря на универсальность подхода, тот результат, к которому можно прийти после его применения, слабее, чем приведенная выше теорема Каруша.

Таким образом, справедливо будет сказать, что теорема Каруша стала фундаментальным для НЛП достижением. Позже более общая теорема появилась в работах Джона [275], Куна и Таккера [315]. В своей работе Кун и Таккер назвали условие теоремы Каруша условием регулярности. Когда решается задача условной минимизации функции f при ограничениях (5.4), в силу теоремы Каруша достаточно исследовать только те допустимые по ограничениям векторы x, что или не удовлетворяют условию регулярности, или удовлетворяют необходимому условию минимума теоремы Каруша.

Во многих случаях количество вышеописанных вариантов x конечно, а это означает, что в такой ситуации необходимо только выбрать наилучший из них.

Ф. Джон был математиком мирового уровня и наиболее признан за работы по уравнениям в частных производных. Он внес важный вклад в геометрию, анализ и другие направления. Тогда он в основном работал в ТВ (больше половины публикаций, многие из которых получили широкую известность).

Теорема (условие оптимальности) Джона опубликована в 1948 г. [275] (он пытался опубликовать раньше в Duke Mathematical Journal, но получил отказ). Его целью было обобщить ММЛ на ограничения-неравенства для дифференцируемых функций конечного числа переменных. Для дальнейшего исследования он предложил обобщить результат на область вариационного исчисления. Работа состоит из теоретической части с результатом аналогичным Куну и Таккеру (см. Приложение 2) и практической – с геометрическими приложениями к ВМ. Вторая, по-видимому (см. [294]), была главной: он сам говорил, что работа возникла из приложений в ТВ, из которых он получил некоторые общие свойства замкнутых выпуклых множеств (что, возможно, и было целью).

Его подход к доказательству подобен Карушу, но, где последний использовал лемму Фаркаша, Джон применил похожие результаты ТВ из недавних статей [217], [371]. Формулировка чуть отличается от Каруша: появился параметр $y \in S$, а λ_0 может обнуляться (то есть нет условий регулярности). Причины различий – в приложениях:

Джон изучал поиск наименьшей содержащей ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^m$ сферы и поиск содержащего множество $S \subset \mathbb{R}^m$ эллипсоида наименьшего объёма, поэтому вопрос существования был очевиден. Как видно, у Каруша теорема самоценна, у Джона – средство получения общих результатов о выпуклых множествах. Это появление теоремы опять не сочли важным.

Всего через два года Кун и Таккер вошли в историю со своим результатом (интересно, Кун популяризовал приоритет Каруша и роль Джона, хотя они этому совершенно не способствовали – см. [294]). Причина, очевидно, не только в самой теореме, но и в правильном контексте военно-университетского комплекса, обусловившем внимание к результату и последовавшее развитие. Как в своё время ТВ сама по себе, появившись в работах Брунна, не привлекла внимание, а работы Минковского, показавшие ее полезность в других областях (ТЧ и зарождающимся общем функциональном анализе с его понятиями метрики и нормированного пространства), дали принципиально иное восприятие. Так и теорема Куна-Таккера: открытие Каруша в Чикагской школе вариацонного исчисления в 1930-е гг. (как позже и работа Джона) не решало важную проблему и не давало новых интересных подходов и вопросов, а Кун и Таккер, решив фундаментальный вопрос зарождающейся дисциплины, дали путь бурному развитию, полно описав в [315] нахождение необходимых условий оптимальности решения ставшей уже важной экстремальной задачи. Также из их теоремы видно практически полное совпадение необходимых и достаточных условий, что повышает интерес к области со стороны теоретиков. Вообще ВА прекрасно иллюстрирует роль двойственности (см. Приложение 5 и, подробно, [114]) и позволяет с более общих позиций посмотреть на ЛП (см. Приложение 6), легко получив теорему, наиболее полно отражающую основной полученный ЛП результат: для прямой и двойственной ЗЛП $\langle c, x\rangle \to \inf_x, Ax \geq b, x \geq 0$ и $\langle b, \lambda\rangle \to \sup_\lambda, A^T\lambda \leq c; \lambda \geq 0$ имеет место одна из ситуаций:

1) Значения обеих задач конечные и совпадают;

2) Значения обеих задач равны $+\infty$;

3) Значения обеих задач равны $-\infty$;

4) Ограничения обеих задач несовместимы.

Идеи ЛП и ВА могут быть развиты ещё дальше в принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств (см. кратко в Приложении 7). Формирование этой красивейшей теории вряд ли было бы возможно без разработанного аппарата ФА. В этой связи отметим огромный вклад, внесённый в его развитие (особенно, в теорию полуупорядоченных пространств) Канторовичем.

5.4. Основные алгоритмы линейного программирования

Несмотря на то, что ТСЛН могла возникнуть на заре математики (так как изучение неравенств – абсолютно естественное развитие теории СЛУ, изучение которых исчисляется тысячелетиями), произошло это сравнительно недавно. Компенсируя эту задержку, развитие теории в XX в. приняло чрезвычайно бурный характер: вслед за единичными работами XIX и первой четверти XX в. последовал огромный поток работ. Можно сказать, что серьезные задачи с ограничениями неравенствами мы находим у Канторовича. В дальнейшем в СССР долгое время в этой области работали только её первооткрыватель, Канторович, и маленькая группа его учеников. При этом им приходилось преодолевать сильнейшее сопротивление со стороны ученых ретроградов, препятствовавших развитию математической экономики (об этом противостоянии см., например, 3.3). Здесь же лишь отметим, что Канторович продемонстрировал исключительный пример, когда и «один в поле воин», одолев огромную армию противников, которые, что прискорбно, были его соотечественниками. На Западе же у наших союзников во время войны и соперников в послевоенный период вовлечение в новую отрасль имело неслыханный масштаб.

В целом, согласно взгляду Данцига на историю ЛП [182] стремительный развитие ЛП стало возможным в первую очередь благодаря фон Нейману, Канторовичу, Леонтьеву и Купмансу (и, конечно, к этому списку надо добавить самого Данцига, создавшего СМ).

Однако, как описано ниже, со временем ученые СССР подхватили эстафету и внесли огромный вклад в развитие данного направления. И, что замечательно, все они (Хачиян, Юдин, Немировский и Нестеров) получили мировое признание, что еще раз свидетельствует о значимости их влияния. Исследование происхождения новой области и причин столь бурного развития в драматический период – актуальнейшая тема истории науки и вообще истории нашего времени.

Однако, обратимся к началу развития ЛП. Как уже неоднократно говорилось, само рассмотрение задачи с ограничениями типа неравенств уже стало новаторским (Лагранж, разработав ММЛ, изучал исключительно задачи с равенствами, причем только гладкие). Поэтому, как ко всему новому, отношение разных людей к новой области было различным. В силу этого даже результатам Каруша, получившего в 1939 г. необходимое условие для общего случая выпуклой экстремальной задачи с неравенствами, тогда никто не придал значения. В качестве одного из важнейших результатов деятельности Канторовича и Данцига, помимо создания метода РМ и СМ, можно назвать открытие ими огромного количества экономических задач, которые описываются ЛП, и осознание экономической интерпретации двойственной задачи. Оказалось, что множители Лагранжа прямой задачи являются оптимальным решением для двойственной и наоборот. Также выяснилось, что эта же математическая модель кроме экономической описывает также огромное количество других задач, в том числе и задачи управления штабов (которые бывают даже масштабнее и сложнее).

Большое практическое значение данных задач также способствовало тому, что центральной проблемой стало изучение не только теоретического, но и практического решения данных вопросов и, в первую очередь, конечно, развитие и исследование соответствующих алгоритмов. К обзору наиболее важных алгоритмов, разработанных для решения ЗЛП, но оказавших значительное влияние также и на развития математики в целом, мы сейчас приступим (хорошей и очень живой обзор алгоритмов 1940-80 гг. см. в [374]; см. также [5], [6]).

Фурье, Данциг. Исторически, конечно, еще до Данцига был Фурье (о чем см. выше пункт 1.2.2), рассмотревший задачу с двумя переменными и о ней написавший, в том числе предложив алгоритм снижения «по чаше». Нечто подобное для общего случая в итоге реализовал Данциг в СМ. И именно имя Данцига находится среди основных авторов, заложивших важнейшие вехи на пути ЛП, так как СМ и его последующие производные можно объективно назвать определенным эталоном и индустриальным стандартом, с которым, во-первых, очень долго пытались конкурировать все остальные предлагаемые алгоритмы; который, во-вторых, всесторонне изучался как практиками, так и теоретиками, и на путях этих исследований родились вопросы, положившие начало развитию плодотворных теорий. Кроме того, именно СМ долгие годы господствовал в среде практиков; он использовался для решения реальных задач, и он позволил решить массу в прямом смысле жизненно важных вопросов. Кроме того, и сейчас СМ остается важным алгоритмом в инструментарии любого оптимизатора.

Вышесказанное подтверждается тем фактом, что перед началом военной компании США в Ираке было решено просчитать разные возможные варианты проведения операции, а значит надо было поставить задачу и промоделировать ее. Эта задача (по разным оценкам) содержала миллионы неизвестных. После некоторого сравнительного анализа СМ и алгоритма Кармаркара было решено выбрать последний, поскольку решили, что, предположительно, он несколько лучше. Таким образом, за более чем сорок лет СМ Данцига не утратил своего значения. Дело в том, что СМ требует асимптотически бóльшего числа операций, однако цена каждой из них значительно ниже.

Почти полувековое доминирование СМ для решения практических задач в подавляющем большинстве случаев для самого Данцига стало полной неожиданностью. Он сам не раз писал: «Я совершенно недоумеваю, почему, вдруг, такой совершенно катастрофический успех».

Тем не менее, совершенно не верно будет считать, что отсутствие в промежутке между СМ и алгоритмом Кармаркара других широко применимых на практике методов свидетельствует о том, что никакие исследования не проводились и результатов получено не было. Шло развитие области, рождались новые идеи. О них сейчас и пойдет речь, а чуть ниже мы подробнее остановимся на достижении Кармаркара и его роли.

Левин Анатолий Юрьевич. Один из замечательных результатов был получен А.Ю. Левиным, создавшем в 1965 г. метод центрированных сечений [106], который применим для поиска минимума не только линейной, но и произвольной выпуклой функции.

Интересна история этого метода. Во главе Воронежской математической школы, которая процветала и, расширяя круг своих интересов, стала большее внимание уделять приложениям, стоял М.А. Красносельский. Он сотрудничал с занимавшимся прикладными вопросами институтом, руководителем которого был Юдин, известный своей совместной с Гольштейном монографией [146]. И именно Юдину принадлежит постановка задачи отыскания эффективного алгоритма минимизации суммы экспонент с положительными весами на компактном полиэдре: $c_1e^{x_1} + \dots + c_ne^{x_n} \to \min$, $c_1, \dots , c_n > 0$, где $x = (x_1, ..., x_n)$ из компактного полиэдра. А.Ю. Левин, работавший у Красносельского, заинтересовался данным вопросом и после продолжительной работы и обсуждений нашел алгоритм, применимый к куда более широкому кругу вопросов.

Итак, пусть стоит общая проблема выпуклой конечномерной оптимизации: найти минимум выпуклой (или квазивыпуклой) функции f на выпуклом конечномерном компактном теле $A \subset \mathbb{R}^d$: $f(x) \to \inf, x \in A$.

Существует теорема Грюнбаума–Хаммера–Митягина. В соответствии с ней, если через центр тяжести выпуклого компактного множества $B \subset \mathbb{R}^k, \mathrm{int}B \neq \emptyset, Vol_d B = 1$ провести (k–1)-мерную гиперплоскость, она разделит его на множества, объем любого из которых будет не менее $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$, и эта оценка не улучшаема. Следовательно, объем каждого множества будет не более $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Алгоритм, опирающийся на теорему и известный как *метод центрированных сечений*, заключается вот в чем (см. подробнее [114, С. 78–79]) (опишем его для случая дифференцируемой выпуклой функции). Обозначим B как B_0 и найдем его центр тяжести: x_1 = gr B_0. Далее посчитаем $f'(x_1)$. В случае, когда это – нулевой вектор, мы нашли решение. В противном случае, отбросим ту часть B_0, которая попала в полупространство $\Pi_0' = \{x\colon \langle f'(x_1), x - x_1\rangle > 0\}$, поскольку в силу того, что f – гладкая и выпуклая, то $f(x) - f(\xi) \geq \langle x - \xi, f'(\xi)\rangle$, откуда для $x \in B_0 \cap \Pi_0'$ очевидно, что $f(x) > f(x_1) \geq \min f$. После того, как мы отбросим $B \cap \Pi_0'$, назовём оставшееся множество B_1 и произведем с ним те же действия. Продолжив действовать таким методом, построим последовательность множеств B_0, B_1, B_2… и их центров тяжести x_1, x_2, x_3… На каждой итерации будем выбирать y_i из $\{x_1, \ldots, x_i\}$, где значение f не больше каждого из $\{f(x_j), 1 \leq j \leq i\}$. Можно показать сходимость $f(y_i)$ к значению задачи со скоростью геометрической прогрессии.

Основная проблема данного алгоритма заключается в том, что поиск центра тяжести сам по себе является трудной задачей. Именно это препятствовало его применению на практике. Тем не менее, основная концепция, положенная в его основу, нашла дальнейшее применение и привела к созданию методов, получивших широкое промышленное применение, о чем речь пойдет далее (и, кроме того, 17-тью годами позже была показана полиномиальная скорость сходимости этого алгоритма на ЗЛП (см. [389])).

Пока Левин, получив алгоритм в 1962 г. (см. [374]), медлил с публикацией, желая решить сложности при отыскании центра тяжести многогранника (что, как выяснилось позже, имеет экспоненциальную сложность), американский ученый Ньюман независимо создал тот же метод. В результате их одновременных публикаций 1965 г. [106], [344] алгоритм называется метод Левина–Ньюмана (позднее В.М. Тихомиров и А.И. Кузовкин развили алгоритм и показали возможность получения экспоненциальной скорости при вычислении значения f, а не ее градиента [93]).

Немировский Аркадий Семенович заложил следующий краеугольный камень. Немировский родился в 1947 г. в СССР, закончил механико-математический факультет МГУ, где был выдающимся студентом. Впоследствии он стал лауреатом огромного числа премий и сейчас является одним из известнейших в своей области человеком. Кроме того, он – один из последних учеников Г.Е. Шилова. После защиты кандидатской диссертации он в 1974 г. поступил в теоретический отдел института, где начальником отдела был профессор Юдин, который предложил ему исследовать «сложность задач выпуклой оптимизации». Юдин обладал светлой интуицией, и именно он ставил эти задачи: в частности, задачу Левину, через Красносельского, поставил именно Юдин, а потом он предложил решать ту же самую задачу Немировскому. Однако, очень интересно, что Немировский вел свои исследования совершенно независимого от Левина и, более того, даже не знал о существовании работ последнего в этой области (хотя Левин в то время уже опубликовал свою работу в Докладах АН СССР, но Немировскому это осталось неизвестным). В результате в ноябре 1974 г. (то есть более, чем 10 годами позднее предыдущего прорыва, сделанного Левиным) он пришел к до некоторой степени близкому методу (в определенном смысле некоторому варианту метода центрированных сечений), получившему название «метод описанных эллипсоидов» ([116], [147], [148]). В основе этого метода лежат две идеи. Первая из них – уже описанная идея отсечения. Вторая базируется на интересном наблюдении: существует эллипсоид Лёвнера $E(K)$ – единственный эллипсоид наименьшего объёма, содержащим данное выпуклое тело K в своей внутренности. В частности, имеет место замечательный факт, что половину эллипсоида можно поместить в эллипсоид объёма меньшего, чем изначальный эллипсоид, причем центр нового эллипсоида ищется по полуэллипсоиду за порядка d^2 операций. Так, если K – половина эллипсоида $K = E \cap H$, где $E = \{x \mid (x-z)^T Q^{-1} (x-z) \leq 1\}$, $H = \{x \mid a^T(x-z) \leq 0\}$ и z обозначает центр E, тогда $E(K) = \{x \mid (x-z)^T \bar{Q}^{-1}(x-\bar{z}) \leq 1\}$ может быть описан простой формулой: $\bar{z} = z - \frac{1}{n+1} Q\bar{a}$ и $\bar{Q} = \frac{n^2}{n^2-1}\left(Q - \frac{2}{n+1} Q\bar{a}\bar{a}^T Q\right)$, где $\bar{a} = a/\sqrt{a^T Q a}$, n – размерность. И, кроме того, можно показать, что vol $(E\ (K))$ / vol $(E) \leq e^{-1/2n}$. Таким образом объем убывает в геометрической прогрессии с коэффициентом, который строго меньше единицы и зависит исключительно от размерности, не зависся от каких-либо других параметров решаемой задачи.

Метод действует так (см. подробнее: [114, С. 79–80]): если перед нами опять стоит та же что и в предыдущем пункте задача, то опишем вокруг B эллипсоид E_0. В случае, когда его центр x_0 лежит вне B, проведем через него гиперплоскость, не пересекающуюся с B, и отбросим полуэллипсоид, не пересекающийся с B. В случае же, когда $x_0 \in B$, найдем $f'(x_0)$ и сделаем отсечение согласно методу Левина–Ньюмана. В результате, у нас будет полуэллипсоид, который назовем E_0'. И здесь мы, воспользовавшись вышеупомянутым фактом, опишем вокруг E_0' эллипсоид более маленького объёма, чем был у E_0, и назовём его E_1. Повторяя данную последовательность операций, получим сходящуюся со скоростью геометрической прогрессии последовательность.

На каждом шаге объем эллипсоидов в последовательности $\{E_0, E_1, E_2, \ldots\}$ будет уменьшаться в зависимости от размерности пространства в $\frac{k^k}{(k-1)^{\frac{k-1}{2}}(k+1)^{\frac{k+1}{2}}} < 1$ раз для любого натурального $k \geq 2$.

Что примечательно, в работе Немировского и Юдина доказана невозможность существенного улучшения алгоритма центрированных сечений Левина–Ньюмана в классе сходящихся алгоритмов минимизации выпуклых функций. Несмотря на то, что Метод описанных эллипсоидов незначительно проигрывает методу центрированных сечений в смысле скорости сходимости к решению, он, тем не менее, превосходит его в одном принципиальном вопросе: для его реализации не требуется находить центры тяжести многогранников.

К основной идее, положенной в основу метода, несколько позднее, но совершенно независимо, пришел выдающийся математик из Киева, работавший в области выпуклой оптимизации, – Шор [142]. Можно сказать, что в 1970 г. Шор представил некоторое семейство алгоритмов для НЛП. Позднее (в 1976–77 гг.) Юдин и Немировский и также, независимо от них, Шор разработали метод эллипсоидов, который можно классифицировать в качестве представителя этого семейства, для решения задач выпуклой оптимизации (в 1976 г. Юдин и Немировский предложили его как метод последовательных отсечений, а 1977 г. Шор – как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента).

В результате в историю данный алгоритм вошел под названием метод Немировского–Юдина–Шора, что иллюстрирует одну из характерных черт науки XX в. в СССР. Очень многие ученые получали совместные премии.

С этим методом также связана достойная упоминания история. После своего открытия Немировский и Юдин делали доклады на эту тему в разных местах и в том числе на семинаре, проводимым Гольштейном в ЦЭМИ. После доклада, который произвел на Гольдштейна очень позитивное впечатление, он заметил, что подобные идеи (отсечение, но в несколько другой форме) уже выдвигались ранее, и указал изумленному Юдину на работу более чем десятилетней давности, выполненную А.Ю. Левиным, который решил поставленную Юдиным же задачу. Таким образом, Гольдштейн реабилитировал Левина, который стал неслыханно известен. В результате в статье [147] включена ссылка на [106].

Хачиян Леонид Генрихович. После того как вышеописанные результаты были опубликованы, Хачиян, работавший в Вычислительном центре АН СССР, показал (в 26 лет), что на основании метода эллипсоидов можно построить алгоритм и с его помощью показать полиномиальную (в модели для машины Тьюринга) разрешимость ЗЛП. Это, конечно, стало действительно грандиозным открытием. Во-первых, была решена важная и довольно давняя к тому моменту открытая проблема относительно трудоемкости алгоритмов, над которой бились тогда многие, и, кроме того, был представлен взгляд на алгоритмы решения ЗЛП с совершенно нового и необычного ракурса. Этот результат впервые появился в Докладах АН СССР в феврале 1979 г. [139] и, попав в зону внимания на Западе, принес Хачияну всемирную славу в кругу ученых, занимающихся вопросами оптимизации.

Чтобы прочувствовать значение сделанного Хачияном открытия и понять, почему к этому событию было приковано такое внимание, опишем кратко положение, сложившееся к тому моменту в этой области. ЛП стало широко применяться после того, как был заложен его алгоритмический и теоретический фундамент: некоторые экономические приложения существовали еще со времени первой работы Канторовича 1939 г. на эту тему, в 1947 г. Данциг создал СМ, а фон Нейман – ТД. В 1950-е гг. альтернативные алгоритмы, преимущественно итеративные методы на базе фиктивной игры двух лиц, бросили вызов СМ, но он отстоял своё доминирующее положение и оставался основным методом в 1950-е и 1960-е гг., применяемым к большому спектру крупномасштабных проблем. Несмотря на триумф СМ в приложениях, его эффективность вскоре была поставлена учеными теоретиками под сомнение. Внимание математиков привлёк вопрос о полиномиальности алгоритма. В результате в 1970 г. были найдены примеры, показавшие, что в самом плохом варианте входных условий, СМ может демонстрировать экспоненциальную зависимость количества шагов (и, соответственно, времени) своего исполнения от длины закодированных исходных данных (например, в статьях В. Кли и Г. Минти представлен целый класс задач, на которых правило Данцига выбора элемента СМ дает такое поведение: [305]), перебирая все вершины. Данное обстоятельство инициировало работу теоретиков, которая вскоре привела к тому, что Д.Р. Эдмондс в 1965 г., С. Кук в 1971 г. и Р.М. Карп в 1972 г. получили ряд результатов в теории сложности, которые лишь усугубили ситуацию, показав, что, несмотря на свою принадлежность к пересечению классов NP и $co\text{-}NP$, задача разрешимости ЛП всё еще не имела никакого алгоритма с доказанной полиномиальностью времени исполнения. Задача разрешимости ставится следующим образом: даны m ЛН с n неизвестными, все коэффициенты в которых рациональны, и требуется выяснить, есть ли у данной системы допустимое решение или она является несовместной. Многие исследователи пытались найти полиномиальную версию СМ, но, несмотря на то, что обновленные версии остаются высоко конкурентоспособными по сравнению с более поздними методами, базирующимися на внутренней точке, и являются неотъемлемой частью арсенала любого оптимизатора, они всё ещё показывают экспоненциальное поведение на определенных примерах. В какой-то мере их хорошее поведение при решении реальных практических задач было объяснено разными авторами с помощью анализа ожидаемого поведения: СМ имеет среднюю полиномиальную сходимость при широком выборе распределения значений в случайных матрицах [360], [163]. В целом, вопрос о полиномиальности или не полиномиальности был, в определенном смысле, центральной проблемой.

Естественно, в таком историческом контексте результат Хачияна, получившего решение применением модификации метода отсечений, и доказавшего тем самым в 1979 г., что ЗЛП может быть решена за полиномиальное время, стал прорывом, сделав автора знаменитым почти мгновенно. Столь бурная реакция на его открытие объясняется не только самим заявленным и доказанным результатом (полиномиальность ЛП), но и тем способом, каким она была доказана. Хачиян прибег к использованию метода эллипсоидов и аппроксимированию многогранного допустимого множества при помощи эллипсоидов. В то время это стало абсолютно новой идеей, представившей совершенно необычный и, можно даже сказать, противоположный традиционному подход (традиционный подход всегда подходил к решению проблемы в терминах вершин, ребер, фаз 1 и 2, и конечной сходимости к точному решению в точной арифметике). При новом подходе предлагалось в качестве отправного пункта взять гигантские сферы, а затем строить последовательно уменьшающиеся эллипсоиды до тех пор, пока один из них не станет достаточно мал для того, чтобы, округлив координаты его центра, можно было получить решение.

Как уже было сказано, для решения проблемы сложности ЗЛП Хачиян воспользовался открытием Немировского (применил метод эллипсоидов). По ходу дела ему пришлось преодолеть ряд сложностей: алгоритм изначально создавался для модели с действительными числами, а ему нужна была оценка расстояния до оптимального решения, Хачияну необходимо было установить некоторое количество ограничений на величины решений, объемы многогранников, и точность, необходимую для проведения расчетов. Использование такого метода для ЛП было совершенно неочевидным. Кроме того, данная процедура решения включает вычисление квадратного корня из рационального числа, который может быть иррациональным, что приводит к сложным проблемам при нахождении численного решения. Однако, Хачиян заметил, что достаточно использовать вышеприведенные формулы приближенно, проводя вычисления только с точностью до $O(nL)$ бит, где L – длина бинарного кода (подаваемого на входе вычислительного алгоритма) системы рациональных неравенств, чью согласованность мы хотим проверить. Он также показал, что если система разрешима, то она имеет решение внутри шара радиуса 2^L, и что в случае ее несовместимости минимальное отклонение в каждой точке составляет по меньшей мере 2^{-L}. Исходя из этих наблюдений и уменьшения объёма со скоростью геометрической прогрессии, он смог показать, что центр последовательности эллипсоидов, получаемой в результате применения этого подхода, станет допустимым максимум за $16n^2L$ итераций, если система совместимая. Поскольку ранее ничего подобного к ЛП не применялось, подход мог показаться даже «диким» в условиях существования известного конечного решения через применение преобразований к матрице.

Всё это вызвало бурную реакцию в средствах массовой информации. ЛП уже имело огромное значение для промышленности, армии и бизнеса, поэтому ведущие мировые газеты стремились донести до читателей важность полученного результата (последовавшая шумиха отлично описана в статье Е.Л. Лоулер [318]). Иногда это даже приводило к курьезным ситуациям наподобие следующих. Журнал Guardian, например, озаглавил свою статью: «Советский ответ “Коммивояжеру”» (хотя, конечно, метод эллипсоида не пролил свет на сложность Задачи Коммивояжера), а Нью-Йорк Таймс опубликовала статью о результатах Хачияна, в которой были так сильно преувеличены вытекающие из них следствия, что это вызвало подозрения даже у советских властей, особенно из-за сравнения результата Хачияна с «русским спутником». Хачияна даже вызвали для дачи показаний в Государственный комитет по науке и технике, где он смог выбраться из положения, решительно отрицая какую-либо связь своего «спутника» с космическим. О резонансе в академических кругах и говорить не стоит. Появилось множество попыток построить на новой основе метод для практического решения крупномасштабных ЗЛП. К сожалению, в целом, эти попытки можно охарактеризовать как не очень успешные. Отчасти такую ситуацию можно объяснить тем, что алгоритм, по-видимому, требует количества итераций, близкого к худшей границе. В силу этого, хотя алгоритм имеет огромное значение с теоретической точки зрения (поскольку показывает, что ЛП принадлежит к классу сложности P), он значительно уступает СМ в приложениях: алгоритму, базирующемуся на методе эллипсоидов может потребоваться в сто или даже тысячу раз большее число шагов в сравнении с СМ для решения задачи всего лишь с 50 неизвестными. Дело в том, что число шагов, выполняемое СМ в среднем, является линейной функцией от n (количества переменных) или m (количества линейных ограничений – уравнений или неравенств): СМ в среднем сделает $O(mn^2)$ или $O(m^2n)$ действий, в то время как алгоритм на базе метода эллипсоидов выполнит $O(mn^8)$ действий. Тем не менее, несколько исследователей (в числе которых были М. Грётшель, Л. Ловас и А. Схрейвер) осознали потенциал метода эллипсоида для прогресса в области комбинаторной оптимизации.

Интересно, что сам Хачиян был удивлен ошеломительным эффектом своего результата и тем, что одного анонса в Докладах АН СССР о полиномиальности ЗЛП оказалось достаточно, чтобы принести ему всемирную славу. Публикация была очень короткой и давала только основные определения, утверждения и некоторые идеи, на которых они базировались, но без доказательств, что было продиктовано очень строгими стандартами Докладов, накладывающими ограничение объема публикации, равное четырём страницам. Хачиян предоставил полную версию с доказательствами и пояснениями в другой журнал, в котором она была издана в 1980 г. [138]. В течении считанных месяцев с публикации в Докладах его результат был растиражирован в английском переводе (П. Гацс и Л. Ловас), усиленным полными доказательствами и пояснениями (такая версия была в итоге опубликована в 1981 г. и стала частью докторской диссертации Хачияна в 1984 г. [140]). В поле зрения Западных ученых работа Хачияна попала благодаря презентации на Симпозиуме по МП 1979 г. и публикации Гацса и Ловаса (данная презентация была намного понятнее изначального варианта). Произошло это примерно таким интересным образом: вскоре после публикации статьи в Докладах на симпозиуме в Монреале докладывали обзор недавних достижений и мимоходом сказали, что, в работе Хачияна доказана полиномиальность метода решения ЗЛП. А там присутствовали ученые, занимавшиеся данными проблемами и очень серьезно изучавшие вопрос полиномиальности и не полиномиальности (потому что на тот момент уже существовали задачи такого типа, которые требуют огромных временных затрат для того, чтобы их решить по СМ). Среди них были в том числе Минти и Кли, которые доказали, что существуют задачи с громадным временным диапазоном, а также математик из Венгрии Гацс, который моментально привлек к объявлению о работе Хачияна внимание присутствовавших, провозгласив, что это означает решение знаменитой проблемы полиномиальности ЗЛП. В результате открытие Хачияна совершенно неожиданно наделало много шума и породило вокруг себя великий ажиотаж. В вычислительном центре тотчас же в срочном порядке (по инициативе Нью-Йорк Таймс) организовали конференцию, посвященную «великому достижению Хачияна». Это был беспрецедентный случай: Хачиян был на тот момент младшим научным сотрудником, кандидатом наук, а в вычислительном центре собрались академики, профессора; а кроме того, ни по какому поводу Нью-Йорк Таймс никогда не проводила никаких конференций, а здесь вдруг они потребовали, чтобы в вычислительном центре провели конференцию. Стали разбираться и обнаружили, что, действительно, Хачияном было получено решение этого вопроса путем применения модификации метода отсечений, а не СМ (который, конечно, как уже было хорошо известно к тому времени, не является полиномиальным). И Хачиян стал неслыханно популярен. Вследствие этого, работы его предшественников, Немировского и Юдина, также получили огромное внимание.

В 1982 г. Международное общество математического программирования (Mathematical Optimization Society, до 2010 г. – Mathematical Programming Society) и Американское математическое общество наградили Немировского, Хачияна и Юдина Фалкерсоновской премией (Fulkerson Prize) за статьи, в которых содержались результаты, позволившие получить полиномиальный алгоритм для ЗЛП (подробнее см. в [375]).

Кармаркар Нарендра родился в Индии в 1957 г., блестяще сдал проводимый объединением престижных институтов Индии экзамен. В результате поступил в Индийский институт технологий Бомбея, закончив который с золотой медалью президента Индии, получил диплом бакалавра электротехники в 1978 г. После переезда в США, он получил степень магистра наук в Калифорнийском технологическом институте. Защитив в университете Беркли диссертацию у Карпа, Кармаркар получил в 1983 г. степень доктора по компьютерным наукам и начал работать в лаборатории Белла в Нью Джерси, где создал и опубликовал в 1984 г. [287] алгоритм, получивший его имя, который решает ЗЛП за полиномиальное время. За создание этого алгоритма и ряд других достижений Кармаркар получил множество престижных международных наград. Следует отметить (см. 5.1), что метод близкий к методу Кармаркара почти на два десятилетия раньше предложил ученик Канторовича – Дикин (метод штрафов) [26].

Предыдущие методы заключались в представлении задачи многогранником и последующем приближении к решению путем прохода по вершинам. Алгоритма же Кармаркара относится к классу методов внутренней точки – он ведет к решению не по границе допустимого множества, а сквозь многогранник, что значительно ускоряет решение трудоемких задач оптимизации.

В целом методы внутренней точки (также называемые барьерными методами) являются определенным семейством алгоритмов, решающих задачи линейной и нелинейной выпуклой оптимизации. Первым метод внутренней точки для решения ЗЛП выдвинул фон Нейман в обсуждении с Данцигом в 1948 г., но его алгоритм не дал ни полиномиальной теоретической границы, ни эффективности при работе с практическими примерами, на которых он оказался медленнее СМ, который также не является алгоритмом с полиномиальным временем исполнения (подробнее см. [212, С. 70]).

С другой стороны, как уже сказано, метод эллипсоида Хачияна был уже полиномиален по времен, но оказался недостаточно эффективен для того, чтобы иметь практический интерес, так как был слишком медленен. Если n – число неизвестных, L – число бит для кодирования входных данных, то алгоритм Кармаркара требует $O(n^{3.5}L)$ операций на числах длины $O(L)$, в то время как методу эллипсоида для сравнения надо $O(n^6L)$ таких операций. Это значит, что время исполнения для алгоритма Кармаркара $O(n^{3.5}L^2 \ln L \ \ln\ln L)$. Поскольку алгоритм Кармаркара относится к классу методов внутренней точки, то есть сходится к оптимальному решению, двигаясь к каждому новому приближению не по границе допустимого множества, как СМ, а сквозь его внутренность, то он с каждой итерацией приближается на $\Delta > 0$ к оптимальному решению (см. [274], [288]).

Алгоритм Кармаркара стал первым, продемонстрировавшим возможность создания метода, одновременно обладающего теоретически доказанным полиномиальным временем исполнения и действительно очень эффективного на практике (способного превзойти СМ). Его реальную эффективность продемонстрирована на примере решения сложных проблем в оптимизации сетевых коммуникаций, где время решения удалось снизить с недель до дней. Таким образом, этот метод сделал возможным решение ЗЛП, которые находились за пределами возможностей СМ (благодаря тому, что, как уже было сказано, в отличие от СМ, он достигает наилучшего решения путем пересечения внутренности множества допустимых значений).

Данный подход стимулировал разработку класса методов внутренней точки, некоторые из которых используются в современных программах решения ЗЛП. Кроме того, он может быть распространен на выпуклое программирование. После Кармаркара возродился интерес к изучению методов внутренней точки и барьеров. **Нестеров и Немировский** предложили специальный класс барьеров, применимых к любому ВМ и гарантирующих, что число итераций алгоритма ограничено полиномом от размерности и точности решения. Они разработали методы вычислений, которые сейчас являются самыми передовыми. Сразу после английской публикации их работ к ним пришла слава.

Левин Леонид Анатольевич родился в 1948 г. в СССР, закончил механико-математический факультет МГУ и был учеником потрясающих научных руководителей: А.Н. Колмогорова и А.А. Маркова. Впоследствии, эмигрировав в 1978 г. в США, стал профессором Бостонского университета.

В 1970 г. Левин написал маленькую заметку [109], которая состояла из трех страниц и не была опубликована сразу, а увидела свет лишь тремя годами позже. Чуть ранее, в 1971 г., в США в сборнике трудов недавно сформированного Симпозиуме по теории вычислений Ассоциацией вычислительной техники вышла статья Кука [173]. За ней последовала работа другого американца Карпа [289] со списком из 21 NP-полной (NPC) задачи, обратившая опять интерес к статье Кука. В СССР об этом тогда никто не подозревал, а Левин несколько по-другому смотрел на те же вопросы: изучая задачи поиска, где надо не только установить, что решение есть, но и найти его. Он описал 6 подобных NPC задач поиска (на них еще ссылаются как на универсальные задачи). Вместе с этим для каждой из них был найден метод решения с оптимальным временем (в частности, эти алгоритмы осуществимы за полиномиальное время тогда и только тогда, когда справедлива гипотеза о равенстве P и NP).

Теорема Кука–Левина утверждает, что задача выполнимости булевых формул относится к классу NPC (NP-полных), то есть любая задача из NP может быть сведена за полиномиальное время с помощью детерминированной машины Тьюринга к задаче определения выполнимости булевой формулы. Пример такой задачи – это булево высказывание, комбинирующее булевы переменные с использованием булевых операторов. Высказывание выполнимо, если существует некоторый набор значений истинности для переменных, который делает всё выражение истинным. За эти работы Кук и Карп получили премию Тьюринга.

Важным следствием данной теоремы является то, что, если существует детерминированный полиномиальный алгоритм решения задачи выполнимости булевых формул, то существует аналогичный алгоритм решения всех NP задач, а значит, тоже самое следует для любой NPC задачи. Само разделение задач на экспоненциальные и полиномиальные имеет кардинальную важность в современной теории сложности, поскольку принадлежность задачи к одному из этих классов определяет асимптотику количества операций, необходимого для отыскания её решения. Если обозначить длину закодированных входных данных через n, то трудоемкостью будет некоторая функция от этого аргумента. В случае мажорируемости значения данной функции, показывающего число необходимых для решения задачи действий, многочленом от n, задача относится к классу полиномиально разрешимых (P). Обычно предполагают, что если задача из P, то ее решение можно найти за «целесообразное» для практики время.

Данные работы стали новаторскими и вместе с последовавшими исследованиями определили направление развития целой области, так как в них авторы продемонстрировали существование универсальных задач, из полиномиальной разрешимости которых следует полиномиальная разрешимость произвольной задачи перебора. К данному моменту нашли свыше 2000 подобных задач, а также технику сводимости для проверки «универсальности» любой новой задачи, которая позволяет не изучать ее отдельно, а просто проверить, сводится ли она к одной из уже известных задач. Фокус исследований переместился к поиску полиномиального метода решения любой универсальной задачи (тогда все проблемы из NP окажутся полиномиально разрешимы, то есть в этом случае NP совпадет с P), или доказательства ее полиномиальной неразрешимости (в случае чего универсальные задачи окажутся в классе, принадлежащем NP, но за пределами P). Это – один из главных открытых вопросов; он известен как вопрос о равенстве классов сложности P и NP (в русских источниках также известный как проблема перебора), является одной из центральных открытых проблем теории алгоритмов уже более трёх десятилетий и расценивается ныне как важнейшая нерешенная проблема теории вычислительной сложности. За решение этой проблемы даже назначена Премия Тысячелетия (Millennium Prize) в $1млн, учрежденный Математическим институтом Клея в 2000 г.

Заключительный сюжет, который необходимо здесь описать, начался с работы Хачияна. Он представил алгоритм, построенный на методе эллипсоидов, и дал ссылку на работу Шора. Она, в свою очередь, напомнила Л.А. Левину (эмигрировавшему в то время в США, но прежде бывшему студентом Немировского) о статье Немировского, которую тот подарил ему, провожая в США. Из этой статьи Л.А. Левин узнал о методе описанных эллипсоидов, который дает полиномиальную оценку числа шагов решения любой задачи выпуклого программирования (в том числе и ЗЛП с действительными коэффициентами). После этого Хачиян (см. выше) доказал, что вычислительная сложность задачи теперь уже с рациональными коэффициентами (что имело принципиальное значение) тоже имеет полиномиальную оценку. Затем Гацс привлек внимание Л.А. Левина к статье А.Ю. Левина [106]. В ней автор указывает, что иногда надо описывать симплексы вокруг множеств B_n, и это осуществимо без ущерба для экспоненциального убывания их объемов. Он не указал конкретного алгоритма, но доказал теорему о его существовании. Этого было достаточно, чтобы задать вектор дальнейших исследований: вскоре Л.А.

Левин и Б. Ямнитский показали в [389] справедливость идеи А.Ю. Левина, дав в своей статье полиномиальный метод «описанных симплексов», аналогичный методу описанных эллипсоидов, но в некоторых отношениях превосходящий его: если А.Ю. Левин работал с центром тяжести многогранника (очень трудно искать), а у Немировского задача представлялась в несколько искусственном виде (через эллипсоиды), то Л.А. Левин стал работать с симплексами. Идея такова: вокруг многогранника описываем симплекс, отсекаем его половину и оставшуюся часть – она уже не симплекс – можно вписать в симплекс же, причем так, чтобы отношение площадей было меньше единицы. После чего всё повторяется, вложенные симплексы содержат куски начального многогранника с точкой минимума и сходятся к ней со скоростью геометрической прогрессии. И очень красиво получается: мы работаем только с вершинами, и центр тяжести (который раньше нужно было искать – а это трудоемкая задача) нас не волнует.

После того, как Л.А. Левин познакомился на одной из конференций с Владимиром Михайловичем Тихомировым, который был близкий друг А.Ю. Левина, Л.А. Левин написал ему очень трогательное письмо, в котором помимо прочего сказал, что, по его мнению, если бы А.Ю. Левин чуть дольше бы задержался в своих исследованиях 1960–х гг. на вопросах, связанных с его статьей о методе отсечений, то огромная часть последовавшей истории сократилась бы до того, что был бы просто «алгоритм Левина».

Все описанные выше события привели к колоссальному расцвету методов выпуклой оптимизации (подробнее о дальнейшем развитии см. [338]).

Заключение

В диссертации проанализированы зарождение и раннее развитие ЛП. Прослежены исследования, в которых был заложен фундамент и предпосылки ЛП. Для этого охвачен период с конца 18 в.: работы по ВМ, ЛН и оптимизации. Основное внимание посвящено исследованиям главных действующих лиц в открытии ЛП: лидеру этого направления – Канторовичу и создателям этой области на Западе – Данцигу и Купмансу, а также сыгравшему огромную роль фон Нейману. Рассмотрены как работы, непосредственно связанные с ЛП, так и из смежных областей, а также их предыдущая деятельность, сильно повлиявшая на подход к ЛП и на организационные возможности по его развитию и продвижению (тут для Канторовича наибольшее важны были работы по ФА, для Данцига – его диссертация). При анализе охвачен период до конца 1960-х гг.

Исследование дополнено анализом непосредственно примыкающих к ЛП работ Гейла, Куна, Таккера, Каруша и Джона, а также рассмотрением наиболее важных исторически алгоритмов, разработанных для ЗЛП, но оказавших значительное влияние также и на развитие математики в целом. Выделены ключевые факторы, способствовавшие зарождению и быстрому развитию ЛП в 1930–60 гг., и показан процесс осознания и принятия новой области общественностью в СССР и на Западе.

Исследован процесс, когда к похожему по существу открытию подходят с разных сторон (оптимизация, геометрия и алгебра), в разных социально-экономических системах (Канторович и Данциг) и в разное время (Каруш, Джон, Кун и Таккер). Причем иногда исследования идут параллельно, а иногда пересекаются и дополняют друг друга.

Прослежена эволюции интереса к ЛП Канторовича и Данцига, развитие методов и приложений ЛП в ходе их исследований и роль ЛП в их жизни. Проанализировано взаимное влияние ЛП как области математической экономики и самой математики.

Проведено обобщение историко-научного материала (в ходе исследования было изучено более 300 работ по ЛП, его истории и связанным областям, в том числе на иностранных языках), который был погружен в историко-математический контекст с учетом особенностей политической, социальной и экономической обстановки.

<u>Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:</u>

1. Основные предпосылки, стимулирующие разработку ЛП в СССР, и на Западе:

– появление со стороны военных ведомств, промышленности и экономики жизненно важных оптимизационных задач планирования, распределения, производства и прочих, требующих осуществимого на практике эффективного решения;
– атмосфера перед Второй мировой войной и во время неё, а также в Холодную войну серьезно влияла на выбор тематики исследований, приоритеты и финансирование;
– заложенный в исследованиях по ЛН, ВМ и оптимизации математический фундамент;
– что касается работ Канторовича, то здесь четко прослеживается влияние традиций и принципов Петербургско–Ленинградской школы, – сочетание теоретических исследований и практического применения;
– взгляды Канторовича и Данцига на математику и мир в целом, определившие выбор тем и методов исследований.

2. Главными причинами, которые привели Канторовича, Данцига и фон Неймана к задачам ЛП и способствовали дальнейшим их успехам в его разработке, являются:
– предшествовавшая профессиональная карьера и последующие должностные обязанности, определившие связи Канторовича и Данцига в науке и промышленности;
– багаж опыта и идей у Канторовича, Данцига и фон Неймана, унаследованный от предшествовавшей научной деятельности, подсказавший поиск методов решения ЗЛП;
– широкими кругозором и сферой интересов, а также выдающимся талантом Канторовича и Данцига, внедрявших разработанные методы в самые разные области промышленности;
– убежденность Канторовича и Данцига в важности решения практических задач, определявшие их выбор тем и методов исследований;
– характер (упорство, самоотверженность и смелость) Канторовича в продвижении ЛП;
– поддержка работ Канторовича по ЛП крупнейшими математиками СССР, позволившая продолжить исследования несмотря на неоднозначную реакцию влиятельных представителей экономической науки и сложную политическую обстановку;
– привлечение Данцигом единомышленников, поддерживавших и развивавших ЛП.

3. Крупные достижения и быстрое развитие ЛП в 1930-60-ые гг. обусловлены:
– ЛП представило новую парадигму, которая принципиально расширила круг реально разрешимых проблем на класс важных, но ранее мало изученных задач с неравенствами;
– интересы влиятельных правительственных и промышленных кругов в США, обеспечивших сильную финансовую и административную поддержку развития ЛП и внедрения результатов;

– активным использованием теоретических результатов в приложениях;
– активным интересом широкого круга ученых (Таккер, Кун, Гейл и др.), работавших в различных областях математики, но серьезно заинтересовавшихся новой областью (ЛП) и внесших огромный вклад в ее становление и расширения (например, ВА);
– начавшимся в тот момент активным развитием вычислительной техники, численных методов, а также методологии математического моделирования;
– большим вкладом фон Неймана, сумевшего посмотреть на возникавшую область ЛП через призму своих предыдущих исследований по ТИ;
– выдающимися способностями Канторовича и Данцига как организаторов и преподавателей.

4. Часто не только прогресс математики влияет на области её приложения (такие как экономика и планирование), но имеет место и обратная связь, когда в ответ на запрос со стороны приложения возникает новая область (ЛП), способная сама дать новые результаты (и более простые методы решения старых проблем) не только в породивших ее приложениях, но и в фундаментальных разделах самой математики. Например, полное решение Канторовичем на основе открытых им ранее методов ЛП проблемы Монжа.

5. В силу историко-политической ситуации в мире в 20 в. обмен идеями был ограничен. Также экономическая мысль в СССР по идеологическим причинам была очень консервативна. Поэтому к аналогичным, а иногда и идентичным теориям, задачам и алгоритмам приходили исследователи как разных стран, систем и школ (работы в СССР и США), так иногда и внутри одной страны и даже ведомства (например, исследования Каруша, Джона, Куна и Таккера в США, равно как методы А.Ю. Левина и А.С. Немировскаго в СССР). Ситуация иногда усугублялась тем, что некоторые работы опережали своё время и не были своевременно оценены должным образом (например, работы Канторовича), что привело к их ограниченному распространению и последующему переоткрытию результатов.

Данная диссертация и опубликованные в ходе ее подготовки работы в силу комплексного подхода призваны заполнить пробелы и улучшить воссоздание целостной картины развития ЛП и реакции на него научного сообщества. Задачи, поставленные в начале исследования, выполнены, цель достигнута.

Список сокращений и условных обозначений

АМ – аналитическая механика

ВА – выпуклый анализ

ВМ – выпуклое множество

ЗЛП – задача ЛП

ИО – исследование операций

КФ – квадратичная форма

ЛН – линейное неравенство

ЛП – линейное программирование

ММЛ – метод множителей Лагранжа

МП – математическое программирование

НДУ – необходимое и достаточное условие

НЛП – нелинейное программирование

ПВД – пространства в двойственности

ПОКФ – положительно определенная квадратичная форма

РМ – разрешающий множитель

СЛН – система линейных неравенств

СЛУ – система линейных уравнений

СМ – симплекс-метод

ТВ – теория выпуклости

ТД – теорема двойственности

ТЗ – транспортная задача

ТИ – теория игр

ТЛН – теория линейных неравенств

ТСЛН – теория систем линейных неравенств

ТЧ – теория чисел

ФА – функциональный анализ

Список литературы

1. Аганбегян, А.Г., Вайнштейн, А.Л., Олейник, Ю.А. Первооткрыватели / А.Г. Аганбегян, А.Л. Вайнштейн, Ю.А. Олейник // Известия. №42. 18 февраля 1964 г.

2. Акилов Г.П., Кутателадзе С.С. Упорядоченные векторные пространства / Г.П. Акилов, С.С. Кутателадзе. – Новосибирск: Наука, 1978. – 368 с.

3. Андрианов А.Л. Дж.Б. Данциг и линейное программирование / А.Л. Андрианов // Казанская наука. – Казань: Изд-во Казанский Издательский Дом, 2014. – №8. – С. 19–23.

4. Андрианов А.Л. Джордж Б. Данциг и история линейного программирования (ЛП) в США / А.Л. Андрианов // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2011. – М.: Янус-К, 2011. – С. 315–318.

5. Андрианов А.Л. Становление и начальные этапы развития методов линейного программирования / А.Л. Андрианов // Вопросы истории естествознания и техники. – М., 2017. – Т. 38, №2. – С. 351–361.

6. Андрианов А.Л. Краткий очерк эволюции ранних методов линейного программирования / А.Л. Андрианов // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер. «Естественные и Технические науки». – М., 2017. – №1. – С. 23–28.

7. Андрианов А.Л. Л.В. Канторович как создатель линейного программирования / А.Л. Андрианов // Вопросы истории естествознания и техники. – М., 2009. – №4. – С. 77–89.

8. Андрианов А.Л. Линейное программирование в работах Л.В. Канторовича 1930–1950-х гг. / А.Л. Андрианов // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2009. – М.: Анонс Медиа, 2009. – С. 323–325.

9. Андрианов А.Л. Развитие линейного программирования в работах Л.В. Канторовича 1930–50-х гг. / А.Л. Андрианов // Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 15 (50). – М., Янус-К, 2014. – С. 25–40.

10. Андрианов А.Л. Развитие линейного программирования в ранних работах Л.В. Канторовича / А.Л. Андрианов // Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 13 (48). – М.: Янус-К, 2009. – С. 323–339.

11. Андрианов А.Л. Рождение линейного программирования / А.Л. Андрианов // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2008. – М.: ИДЭЛ, 2009. – С. 260–262.

12. Белых А.А. История российских экономико-математических исследований: Первые сто лет. Изд. 2-е, доп. / А.А. Белых. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 240 с.

13. Бруцкус Б.Д. Проблемы народного хозяйства при социалистическом строе / Б.Д. Бруцкус // Экономист. – М., 1922. №1. С.48–65, №2. С. 163–183, №3. С. 54–72.; соответствующий доклад был в 1919 г.

14. Булавский В.А., Рапопорт Э.О., Солдатов В.Е. Разработка и обоснование новых тарифов на такси (Доклад на заседании Ленинградского математического общества 24.05.1960) // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. XV, вып. 6 (96). – С. 188–189.

15. Бухвалов А.В., Дмитриев А.Л. Л.В. Канторович и становление экономико-математического образования в СССР // Леонид Витальевич Канторович: математика, менеджмент, информатика. СПб., 2010. – С. 231–294.

16. Бухвалов А.В., Дмитриев А.Л. Л.В. Канторович и шестой курс экономического факультета ЛГУ в 1959 году в русле становления экономической науки в России // Петербургская Академия наук в истории академий мира. К 275-летию Академии наук. Материалы международной конференции. Том IV. – СПб., 1999. – С. 208–223.

17. Вершик А.М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. Джон фон Нейман // фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу. М., 1987. – Т.1.

18. Голдман А.Дж., Таккер А.У. Теория линейного программирования (перевод Корбута А.А.) // [113, С. 187–192].

19. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. – М.: Советское радио, 1966.

20. Гофман А. Дж, и Кун Г.У. О системах различных представителей. (перевод Залгаллер С.И.) // [113, С. 302–310].

21. Данциг Дж.Б. Воспоминания о началах линейного программирования. (Это – перевод [195] на русский язык В. Зацепина, 1994.) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://kantorovich.vixpo.nsu.ru/?int=VIEW&el=397&templ=VIEW.

22. Данциг Дж.Б. Линейное программирование, его применения и обобщения. / Пер. с англ. М., издательство Прогресс, 1966. – 600 с. – русский перевод с англ. Под ред. Н.Н. Воробьева. Оригинал: G.B. Dantzig. Linear Programming and Extensions / The Rand Corporation and University of California, Berkely. University Press, Princeton, New Jersey. 1963.

23. Данциг Дж.Б., Гофман А.Дж. Теорема Дилворта о частично упорядоченных множествах. (перевод Корбута А.А.) // [113, С. 311–317].

24. Данциг Дж.Б., Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Алгоритм для одновременного решения прямой и двойственной задач линейного программирования // [113, С. 277–286].
25. Демидович В.Б., Дорофеева А.В., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач и создание функционального анализа. Методические материалы для подготовки к кандидатскому экзамену по истории и философии науки (история математики) / Отв. ред. и сост. С.С. Демидов. М.: Янус-К, 2003. – С. 14–40.
26. Дикин И.И. Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования. ДАН СССР. – 1967. – Т. 174. – № 4. – С.747–748.
27. Дмитриев А.Л. Л.В. Канторович и экономический факультет Ленинградского университета. в [Канторович Л.В. Экономика и математика: Избранное. – СПб.: Нестор-История, 2012. – 364 с.].
28. Залгаллер В.А. Быт войны. СПб.: издательство журнала Нева, 2004. – 70 с.
29. Залгаллер В.А. Воспоминания о Л.В. Канторовиче и об эмоциях, связанных с его экономическими работами // Очерки истории информатики в России. – Новосибирск, 1998. – С. 449–456.
30. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.
31. Йохансен Л. Вклад Л.В. Канторовича в экономическую науку // [38].
32. Канторович Л.В. Возможности применения математических методов в вопросах производственного планирования // Организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий. М.–Л., 1958. – С.338–353.
33. Канторович Л.В. Дальнейшее развитие математических методов и перспективы их применения в планировании и экономике // [125, С. 310–353].
Английский перевод – [Further Development of Mathematical Methods and Prospects of Their Application in Economic Planning] – опубликован в [The Use of Mathematics in Economics]: см. [Mathematical Methods of Production Planning and Organization] в [The Use of Mathematics in Economics, edited by A. Nove, Oliver & Boyd, Edinburgh & London, 1964] – это перевод наиболее важных частей [125], статья Канторовича воспроизводит [39] (см. [Mathematical Methods of Organizing and Planning Production // Management Sci. – July 1960. – N 4.]) с небольшими изменениями.
34. Канторович Л.В. Динамическая модель оптимального планирования // Планирование и экономико-математические методы: К семидесятилетию со дня рождения академика В. С. Немчинова. – М., 1964. – С. 323–345.

Ein dynamisches Modell der optimalen Planuing. Sowjetwissenschaft. Gesellshaftswessenshaftliche Beitrage (Berlin). – 1964. – Heft 7. (Англ. перевод “A Dynamic Model of Optimum Planning.” Mathematical Studies in Economics and Statistics in the USSR and Eastern Europe. Winter 1964–65. – Vol. I. – N 2.)].

35. Канторович Л.В. Использование идеи метода Галёркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Прикл. мат. и мех. – 1942. – Т. 6. – №1. – С. 31–40.

36. Канторович Л.В. К общей теории приближенных методов анализа // Доклады Академии наук СССР. – 1948. – Т. 60. – №6. – С. 957–960.

37. Канторович Л.В. Математика в экономике: достижения, трудности, перспективы: Лекция в Шведской королевской академии наук в связи с присуждением Нобелевской премии за 1975 год // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). – 1976. – №3. – С. 124–134.

38. Канторович Л.В. Математико-экономические работы / Л.В. Канторович - Новосибирск: Наука, 2011. – 760 с. – (Избранные труды). Ответственные редакторы С.С. Кутателадзе, И.В. Романовский.

39. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: издательство ЛГУ, 1939, 68 с. (переиздана в сборнике [125] с дополнением «Дальнейшее развитие математических методов и перспективы их применения в планировании и экономике», Соцэкгиз, 1959).

40. Канторович Л.В. Мой путь в науке (предполагавшийся доклад в Московском математическом обществе), УМН, – 1987, – Т. 42, – Вып. 2(254), – С. 183–213. Также более полный вариант в [71, С. 22–75]. Также вышел перевод [278].

41. Канторович Л.В. Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант // Доклады Академии наук СССР. – 1951. – Т.80. – №6. – С.849–852.

42. Канторович Л.В. Некоторые частные методы расширения пространств Гильберта // ДАН СССР. – 1935. – Т. 4. – №4/5. – С. 163–167.

43. Канторович Л.В. Несколько замечаний о приближении к функциям посредством полиномов с целыми коэффициентами // Известия Академии наук СССР, отделение математических и естественных наук. 1931. №9. С.1163–1168.

44. Канторович Л.В. О конформном отображении // Мат. сб. – 1933. – Т. 40, № 3. – С. 294–325.

45. Канторович Л.В. О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач // Доклады Академии наук СССР. 1957. Т.115. №3. С.441–444.

46. Канторович Л.В. О методе наискорейшего спуска // Доклады Академии наук СССР. 1947. Т.56. №3. С. 233–236.

47. Канторович Л.В. О методе Ньютона // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1949. Т.28. С.104–144.

48. Канторович Л.В. О методе Ньютона для функциональных уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1948. Т.59. №7. С.1237–1240.

49. Канторович Л.В. О некоторых методах построения функции, совершающей конформное отображение // Изв. АН СССР. - 1933. – Т. 2. – С. 229–235.

50. Канторович Л.В. О некоторых общих методах распространения пространств Гильберта // ДАН СССР, 1935, Т.4, №3, С. 115–118.

51. Канторович Л.В. О некоторых разложениях по полиномам в форме С.Н.Бернштейна // Доклады Академии наук СССР. Серия А. 1930. №21. Ч.1. С.563–568; №22. Ч.2. С.595–600.

52. Канторович Л.В. О перемещении масс // Доклады Академии наук СССР. 1942. Т.37. №7-8. С.227–229.

53. Канторович Л.В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Доклады Академии наук СССР. 1935. Т.4. №1–2. С. 11–14.

54. Канторович Л.В. О продолжении семейства линейных функционалов // ДАН СССР, 1935, Т. 6, №4, С. 204–210.

55. Канторович, Л.В. О сходимости последовательности полиномов С.Н.Бернштейна за пределами основного интервала // Известия Академии наук СССР, отделение математических и естественных наук. 1931. №8. С. 1103–1115.

56. Канторович, Л.В. О функциональных уравнениях // Ученые записки Ленинградского государственного университета. 1937. Т.3. №17. С. 24-50.

57. Канторович Л.В. Об исчислении производственных затрат // Вопр. Экономики. – 1960. – №1. – С. 122-134.

58. Канторович Л.В. Об обобщенных производных непрерывных функций // Математический сборник. 1932. Т.39. Вып.4. С.153–170.

59. Канторович Л.В. Об одной проблеме Монжа // Успехи математических наук. 1948. Т.III. Вып.2(24). С.225-226.

60. Канторович Л.В. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем // Доклады Академии наук СССР. 1940. Т.28. №3. С.212-215.

61. Канторович Л.В. Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичных функционалов // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 48, № 7. – С. 483-487.

62. Канторович Л.В. Об универсальных функциях // Журнал Ленинградского физико-математического общества. 1929. Т.2. Вып.2, С.13–21.

63. Канторович Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // Изв. АН СССР. – 1933. – Т. 5. – С. 647–652.

64. Канторович Л.В. Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте // Лесная промышленность. 1949. Часть I – в №7. С.15–17; часть II – в №8. С.17–19.

65. Канторович Л.В. Показатели работы предприятий нуждаются в пересмотре // Оптимизация: сб. тр. (Ин-та математики СО АН СССР). – Новосибирск, 1991. – Вып. 50 (67) (К 80-летию академика Л.В. Канторовича. Часть I). – С. 16-44.

66. Канторович Л. В. Применение интеграла Стилтьеса к расчету балки, лежащей на упругом основании // Труды Ленинградского института инженеров промышленного строительства. 1934. Вып.1. С.17–34.

67. Канторович Л. В. Принцип мажорант и метод Ньютона // Доклады Академии наук СССР. 1951. Т.76. №1. С.17–20.

68. Канторович Л.В. Рациональные методы раскроя металла // Произв.-техн. бюл. НК Боеприпасов СССР. 1942. №7–8. С.21–29.

69. Канторович Л.В. «Смотреть на правду открытыми глазами!»: Последнее интервью выдающегося ученого // Неделя. – 1987. – 3–9 авг. – С. 10. Цитируется по [110, С. 76–82].

70. Канторович Л.В. Функциональный анализ, 2-ое издание, 1977.

71. Канторович, Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи математических наук. 1948. Т.III. Вып.6 (28). С.89–185.

72. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Изд-во АН СССР, (1959. 344 с.) 1960. 347 с.

The Best Use of Economic Resources. – London; New York: Pergamon Press, 1965.

73. Канторович Л.В., Богачев В. Н., Макаров В. Л. Об оценке эффективности капитальных затрат // Экономика и мат. методы. – 1970. – Т. 6, вып. 6. – С. 811–826.

Estimating the Effectiveness of Capital Expenditures // MATEKON. – Fall 1971. – N 1.

74. Канторович Л.В., Вулих Б. З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Государственное издательство технико-теоретической литературы. М.-Л., 1950. – 548 с.

75. Канторович Л.В., Гавурин М.К. Математика и экономика – взаимопроникновение наук. / в [Канторович Л.В. Экономика и математика: Избранное. – СПб.: Нестор-История, 2012. – 364 с.] печатается по [Вестник ЛГУ. №13. Сер. Математика. Механика. Астрономия. 1977. Вып. 3. С. 31-38.].

76. Канторович Л.В., Гавурин М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. – в кн.: Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М.-Л., 1949. С. 110–138. Также в [38, С. 439–476].

77. Канторович Л.В., Горьков Л.И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели // Докл. АН СССР. – 1959. – 129, № 4. – С. 732-735..

78. Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. – Л., 1951.

Цитируем по [Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов – СПб: Невский Диалект, 2012. – 304 с., ил., табл. (научные редакторы А.А. Корбут, И.В. Романовский) – издание третье, исправленное и дополненное].

79. Канторович Л.В., Крылов В.И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. М.–Л., 1936. (2-е изд. – «Приближенные методы высшего анализа», 1941).

80. Канторович Л.В., Лассманн В., Шилар Х., Шварц К., Брентьес С. Экономика и оптимизация. – М., Наука, 1990. 248 с.

81. Канторович Л.В., Макаров В.Л. Оптимальные модели перспективного планирования // Применение математики в экономических исследованиях. – М., 1965. – Т. 3. – С. 7–87.

82. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве вполне аддитивных функций // Вестн. ЛГУ (сер. мат., мех. и астр.). – 1958. – №7 Вып. 2. – С. 52–59.

83. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // Доклады Академии Наук СССР, 115, 1957, №6, С. 1058–1061.

84. Канторович Леонид Витальевич, 1912–1986 / Сост. Н.С. Дворцина, И.А. Махрова; Авт. вступ. ст. В.Л. Макаров, С.С. Кутателадзе и Г.Ш. Рубинштейн. М.: Наука, 1989. – 134. С. – (Материалы к биобиблиогр. ученых СССР. Сер. мат. наук; Вып. 18).

85. Канторович Леонид Витальевич (1912–1986): Библиографический указатель / Ред. С.С. Кутателадзе. Авт. Вступ. Ст. С.С. Кутателадзе, В.Л. Макаров, И.В. Романовский и Г.Ш. Рубинштейн. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. – 142 с.

Также: Канторович Леонид Витальевич (1912–1986): Биобиблиографический указатель / Ред. С.С. Кутателадзе. – 2-е изд., перераб. и доп. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2012. – 204 с.

86. Козлов М.К., Тарасов С.П., Хачиян Л.Г., Полиномиальная разрешимость выпуклого квадратичного программирования // Журнал вычислительной математики и матемематической физизики – 1980, Т. 20 №5, С. 1319–1323. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.mathnet.ru/links/702d5913c97217438370dc7a83e3577e/zvmmf5189.pdf.

87. Кондратьев Н.Д. Большие циклы конъюнктуры. Доклады и их обсуждения в Институте экономики. М., 1928.

88. Кононюк А.Е. Основы теории оптимизации. К. 1. – Киев: Освіта України, 2011. – 692с.

89. Конюс А.А. Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономический бюллетень Конъюнктурного института. 1924. №9–10, 64–72.

90. Конюс А.А. Теоретические вопросы цен и потребления // (сборник очерков, изданных АН СССР в честь восьмидесятилетия С.Г. Струмилина) Вопросы экономики, планирования и статистики. М., 1957.

91. Корбут. А.А., Романовский И.В. Об этой книге и ее авторах / в Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. – СПб.: Невский Диалект, 2012. (издание третье), С.293-303.

92. Крылов А.Н. О расчёте балок, лежащих на упругом основании» // Л.: Издательство АН СССР, 1931.

93. Кузовкин А.И., Тихомиров В.М. О количестве вычисления для нахождения минимума выпуклой функции. Экономика и математич. методы, 1967, Т. 3, Вып. I, С. 95–103.

94. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Л.В. Канторович и наука об управлении // Дарьял. - 2002. – № 3. – С. 203–227.

95. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Локальный выпуклый анализ // в книге «Современные проблемы математики», 1982, Т. 19 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР), С. 155–206.

96. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Числа и пространства Л.В. Канторовича // Владикавказский мат. журн. – 2002. – Т. 1, Вып. 1.

97. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Эвристический принцип Л.В. Канторовича // Сиб. журн. индуст. мат. – 2001. – Т. 4, № 2 (8). – С. 18–28.

98. Кутателадзе С.С. Канторович и математизация экономики // [38, С. 10-19].

99. Кутателадзе С.С. Л.В. Канторович, математик и экономист (к 100-летию со дня рождения), Математика в высшем образовании. – 2012. – №10. – С. 87–98.

100. Кутателадзе С.С. Математика и экономика Л.В. Канторовича // Сибирский математический журнал. Январь-февраль, – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 5–19.

101. Кутателадзе С.С. Об одном признаке Гильбертова пространства / Оптимизация. – 1982. – Т. 28 (45). – С. 146–147.

102. Кутателадзе С.С., Макаров В.Л., Романовский И.В., Рубинштейн Г.Ш. Краткий очерк научной, педагогической и общественной деятельности. – С. 20–25. // [38].

103. Кутателадзе С.С., Макаров В.Л., Романовский И.В., Рубинштейн Г.Ш. Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) // Сибирский математический журнал. – Т. 43 (2002). – №1. – С. 3–8.

104. Кутателадзе С.С., Макаров В.Л., Романовский И.В., Рубинштейн Г.Ш. Обзор научных трудов. – С. 26–41. // [38].

105. Кэмпбелл Р. Маркс, Канторович и Новожилов. Стоимость против реальности // [38].

106. Левин, А.Ю. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций. ДАН СССР. – 1965. – Т. 160, № 6. – С. 1244–1247.

107. Левин В.Л. Задача Монжа-Канторовича о перемещении масс // Математическая экономика и функциональный анализ. М.: Наука, 1978. – С. 94–108.

108. Левин В.Л., Милютин А.А. Задача о перемещении масс с разрывной функцией стоимости и массовая постановка проблем двойственности выпуклых экстремальных задач // Успехи матем. наук. – 1979. – Т. 34. Вып. 3. – С. 3–68.

109. Левин Л.А. Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации. – 1973. – Т. 9, № 3. – С. 115–116.

110. Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый В 2 т. / Редакторы-составители В.Л. Канторович, С.С. Кутателадзе, Я.И. Фет. – Новосибирск: Издательство СО РАН, Филиал «Гео», 2002. – Т. 1. – 544 с., ил. 48 с.

111. Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый» В 2 т. / Редакторы-составители В.Л. Канторович, С.С. Кутателадзе, Я.И. Фет. – Новосибирск: Издательство СО РАН, Филиал «Гео», 2004. – Т. 2. – 613 с., ил. 40 с.

112. Леонтьев В.В. Количественный анализ соотношений «Затраты-Выпуск» в экономической системе США. – М., 1936 (см. также: Избранные статьи. СПб. Изд-во газеты «Невское время». 1994. – 366 с.).

113. Линейные неравенства и смежные вопросы / Кун Г., Таккер А. (ред.). Пер. под ред. Л.В. Канторовича и В.В. Новожилова. – М.: ИЛ, 1959. С приложением книги С. Вайда «Теория игр и линейное программирование».

114. Магарил-Иляев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. Издание второе. – М.: УРСС, 2003.

115. Нейман фон Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение / пер. с анг. – М.: Наука, 1970. – 708 с.

116. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Методы оптимизации, адаптивные к «существенной» размерности задачи, Автомат. и телемех. – 1977. – Вып. 4. – С. 75–87.

117. Немчинов В.С. Экономико-математические методы и модели. – М., 1962.

118. Несмеянов А.Н. Наука и строительство коммунизма // Коммунист. – М., 1959. – №1. – С. 53–69.

119. Новожилов В.В. Измерение затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве // [125].

120. Новожилов В.В. Недостаток товаров // Вестник финансов. 1926. – №2.

121. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. – М.: Мир, 1988. – 264 с.

122. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

123. Поляк Б.Т. История математического программирования в СССР: анализ феномена.: – С. 13

124. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.

125. Применение математики в экономических исследованиях / Под ред. В.С. Немчинова. – М.: Соцэкгиз, 1959. – 486 с.
Перевод на английский: Nemchinov V.S. The Use of Mathematics in Economics, Editor translation A. Nove. Cambridge, Mass., M.I.T. Press, 1964.
126. Решетняк Ю.Г., Кутателадзе С.С. Письмо Н.Н. Лузина Л.В. Канторовичу // Вестн. РАН. – 2002. – Т. 72, № 8. – С. 740–742.
127. Романовский И.В. Работы по оптимальному программированию // Математика в Петербургском Ленинградском университете. Л., 1970. – С. 26–267.
128. Рубинштейн Г.Ш. Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и ее приложение к исследованию конечной системы линейных неравенств // Доклады Академии наук СССР. – 1955. – Т. 100. – С. 627–630.
129. Рубинштейн Г.Ш. О развитии и применениях линейного программирования в СССР. // [113, С. 402–420].
130. Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В. Вариационное исчисление. // – Л.: КУБУЧ, 1933.
131. Соколова В. Талант – это слишком мало / В. Соколова // Прямые инвестиции – 2004 – №11(31), С. 106–111.
132. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2 т. / пер. с англ. С.А. Тарасова и др. – Т. 1, 2. – М.: Мир, 1991. – 702 с. (под ред. Л.Г. Хачияна)
133. Толстой А.Н. Методы нахождения наименьшего суммового километража при планировании перевозок в пространстве // Планирование перевозок, сборник первый. – М.: Транспечать НКПС, 1930. – С. 23–55.
134. Толстой А.Н. Методы устранения нерациональных перевозок при планировании // Социалистический транспорт. – 1939. – №9. – С. 28–51.
135. Фельдман Г.А. Аналитический метод построения перспективных планов // Плановое хозяйство. – 1929. – № 12. – С. 95–127.
136. Фельдман Г.А. К теории темпов народного дохода (под углом зрения народного хозяйства СССР) // Плановое хозяйство, 1928. – №11–12: № 11. С. 146–170 и №12. С. 151–178.
137. Фихтенгольц Г.М., Канторович Л.В. Некоторые теоремы о линейных функционалах // ДАН СССР. – 1934. – Т. 3, №5. – С. 307–312.

138. Хачиян Л.Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании, Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1980. – 20. – С. 51–68.

139. Хачиян Л.Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Доклады Академии Наук СССР. – 1979. – Т. 244, №5. – С.1093–1096.

140. Хачиян Л.Г. Сложность выпуклых задач вещественного и целочисленного полиномиального программирования (диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук. Защита диссертации состоялась в ВЦ АН СССР в 1984 г.). – М., 1983.

141. Шалабин В.Г. Юбилейная конференция в ЛГУ // ЭММ. – 1986. – Т. XXII, вып. 3. – С. 560–562.

142. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. – 1977. – 13 №1. – С. 94–95.

143. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979.

144. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. – М.: Гостехиздат, 1952.

145. Юдин Д.Б., Гольдштейн Е.Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). – М.: Наука, 1969.

146. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Проблемы и методы линейного программирования. – М.: Соврадио, 1961.

147. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. Экономика и математические методы. – 1976. – Т. 12, №2. – С. 357–369.

148. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Оценка информационной сложности задач математического программирования/Экономика и математические методы. – 1976. – Т. 12, №1. – С. 118–142.

149. Юшков Л. Основной вопрос плановой методологии // Вестник финансов. – 1928. – №10.

150. Activity Analysis of Production and Allocation / T.C. Koopmans (Ed.) Cowles Commission for Research in Econ Monograph №13. – New York: John Wiley & Sons, 1951. – 404 pp.

151. Albers, D.J., Alexanderson, G.L. (eds.): Mathematical People, Profiles and Interviews. Boston: Birkh&user, 1985.

152. Albers, D.J. et al. (Eds.), More Mathematical People: Contemporary Conversations, Harcourt Brace Jovanovich, Boston, 1990. (Based on [153]).

153. Albers, D.J., Reid, C. An interview with George B. Dantzig: The father of linear programming // College Math. J. – 1986. – 17. – P. 292–314.

154. Andrianov, A. The full Monge problem solution based on the linear programming (LP) / A. Andrianov // Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation (22–27 August 2011) Vol. 3. – M.: Peoples' Friendship University of Russia, 2012. – P. 94–101.

155. Appel, P. Le probleme geometrique des deblois et remlois. Memorial de Sc. Math. Fasc. XXVII. – Paris, 1928.

156. Appel, P. Mémoire sur les déblais et les remblais des systèmes continus ou discontinus. Memoires presentes par divers Savants a l'Academie des Sciences de l'Institut de France. – Paris, 1887. – 28. – P. 1–208. Доступна на http://gallica.bnf.fr.

157. Arrow, K.J. George Dantzig in the development of economic analysis / manuscript – January 2006.

158. Barankin, E.W., Dorfman, R. On quadratic programming. – Berkeley: Univ. California Publs. in Statistics, 1958. – 2, №13. – P. 285–318.

159. Bland, R.G., Orlin, J.B. IFORS' operational research hall of fame: Delbert Ray Fulkerson // International Transactions in Operational Research. – 2005. – 12. – P. 367.

160. Bliss, G.A. Normality and Abnormality in the Calculus of Variations, Transactions of the American Mathematical Society. – 1938. – 43. – P. 365–376.

161. Bonnesen, T., Fenchel, W. Theorie der konvexen körper. Berlin: Julius Springer-Verlag, 1934.

162. Borgwardt, K.H. The average number of pivot steps required by the simplex method is po1ynomial // Zeitschrift fur Operations Research. – 1982. – 7. – P. 157–177.

163. Borgwardt, K.H. The simplex method: A probabilistic analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – Vol. 1. – P. xii+268.

164. Boros, E., Gurvich, V. Scientific contributions of Leo Khachiyan (a short overview) // Discrete Applied Mathematics. –2008. – 156. – P. 2232–2240.

165. Brentjes, S. Untersuchungen zur Geschichte der linearen Optimierung (LO) von ihren Anfängen bis zur Konstituierung als selbständige mathematische Theorie – eine Studie zum Problem der Entstehung mathematischer Disziplinen im 20. Jahrhundert. Ph.D thesis, Leipzig, DDR, unpublished (1977).

166. Cantor, D. et al. (Eds.). Theodore S. Motzkin: Selected Papers, Birkhauser, Boston, 1983.

167. Carathéodory, C. Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. Rendiconti del Circolo Matemático di Palermo. – 1911. –32. – P. 193–217.

168. Carathéodory, C. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen, Math. Ann. – 1907. – 64. – P. 95–115.

169. Carver, W.B. Systems of Linear Inequalities // The Annals of Mathematics. – 1922. – 23. – P. 212–220.

170. Cassel, G. Theoretische Sozialokonomie. Leipzig: Deichert, 1918.

См. также на английском языке [Cassel, G. (1932). The Theory of Social Economy] – перевод 5-го немецкого издания Cassel (1918), перевел L. Barren (1932), New York: Harcourt Brace. / переиздан (1967) New York: Augustus M. Kelley.

171. Charnes, A., Cooper, W.W. Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. John Wiley & Sons, New York, 1961.

172. Charnes, A., Cooper, W.W., Henderson, A. An Introduction to Linear Programming, John Wiley & Sons, New York, 1953.

173. Cook, S.A. The Complexity of Theorem Proving Procedures. // Proceedings Third Annual ACM Symposium on Thoery of Computing. University of Toronto. – May 1971. – P. 151–158.

174. Cottle, R.W. (Ed.). The Basic George B. Dantzig, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 2003.

175. Cottle R.W., Dantzig G.B. Complementary pivot theory of mathematical programming. Stanford University Stanford, California, USA, April 1967.

176. Cottle, R., Johnson, E., Wets, R. George B. Dantzig (1914–2005) // Notices of the American Mathematical Society. – March 2007. – Vol. 54, N. 3. – P. 344–362.

177. Dantzig, G.B. I Complete Form of the Neyman-Pearson Lemma; II On the Non Existence of Tests of "Student's" Hypothesis Having Power Functions Independent of Sigma. Doctoral dissertation, Department of Mathematics, University of California at Berkeley, 1946. [QA276.D3 at Math-Stat Library, University of California, Berkeley.]

178. Dantzig, G.B. Application of the simplex method to a transportation problem, in [150].

179. Dantzig, G.B. A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem. // [150, Ch. XX, P. 330–335].

180. Dantzig, G.B. Concepts, origins, and use of linear programming // Proceedings of the First International Conference on Operational Research, Operations Research Society of America / M. Davies, R.T. Eddison, T. Page, (Eds.), Baltimore, 1957.

181. Dantzig, G.B. Developments in linear programming // H.A. Antosiewicz (Ed.) Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, Washington, D.C., 1955.

182. Dantzig, G.B. History of Mathematical Programming (A collection of Personal Reminiscences) / Ed. by J.K. Lenstra, F.H.G. Rinnooy Kan, A. Schrijver, North-Holland, 1991.

183. Dantzig, G.B. Impact of linear programming on computer development // OR/MS Today – 14, August 1988. – P. 12–17. Также см. Computers in Mathematics, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, V. 125 / D.V. Chudnovsky, R.D. Jenks (Eds.). – New York: Marcel Dekker, Inc., 1990. – P. 233–240.

184. Dantzig, G.B. Linear control processes and mathematical programming // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1966. – 4. – P. 56–60.

185. Dantzig, G.B. Linear programming. History of mathematical programming / Jan Karel Lenstra, Alexander H.G. Rinnooy Kan, Alexander Schrijver (eds.): History of Mathematical Programming, A Collection of Personal Reminiscences. Amsterdam: CWI and North-Holland, 1991. – P. 19–31.

186. Dantzig, G.B. Linear programming and extensions. – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1963. (см. русский перевод [22])

187. Dantzig, G.B. On the non-existence of tests of "Student's" hypothesis having power functions independent of sigma // Ann. Mate. Stat. – 1940. – 11. – P. 186–192.

188. Dantzig, G.B. On the significance of solving linear programming problems with some integer variables // Econometrica. – 1960. – 28. – P. 30–44.

189. Dantzig, G.B. Origins of the simplex method / S. G. Nash (Ed.). A History of Scientific Computing, – ACM Press, Reading, MA, 1990.

190. Dantzig, G.B. Programming in a linear structure, Econometrica. – 1949. – 17. – P. 73–74.

191. Dantzig, G.B. Programming of Interdependent Activities, II Mathematical Model // Económétrica. – 1949. – 17. – P. 200–211.

192. Dantzig G.B. Reminiscences about the Origins of Linear Programming. 1981. – 11 pp. (http://www.dtic.mil/docs/citations/ADA112060).

193. Dantzig, G.B. Reminiscences about the origins of linear programming // R.W. Cottle, M.L. Kelmanson, B. Korte (Eds.) Mathematical Programming, Proceedings of the International

Congress on Mathematical Programming – Rio de Janeiro, Brazil, April 6–8, 1981. – Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1984. – P. 105–112.

194. Dantzig, G.B. Reminiscences about the origins of linear programming // Operations Research Letters. – 1982. – #1. – P. 43–48.

195. Dantzig, G.B. Reminiscences about the origins of linear programming // A. Bachem et al. (eds.) Mathematical Programming: The State of the Art, Bonn 1982, Berlin, Springer-Verlag, 1983. – P. 78–86.

196. Dantzig, G.B. Upper bounds, secondary constraints and block triangularity in linear programming, Econometrica. – 1955. – 23. – P. 174–183.

197. Dantzig, G.B., Fulkerson D.R. Computation of Maximal Flows in Networks // Naval Research Logistics Quarterly. – 1955. – 2. – P. 277–283.

198. Dantzig, G.B., Fulkerson, D.R. Minimizing the number of tankers to meet a fixed schedule // Naval Research Logistics Quarterly. – 1954. – 1. – P. 217–222.

199. Dantzig, G.B., Fulkerson, D.R. On the Max-Flow Min-Cut Theorems of Networks // [314, P. 215–221].

200. Dantzig, G.B., Fulkerson, D.R., Johnson, S.M. Solution of a large-scale Traveling-salesman problem // Journal of the operations research society of America. – 1954. – 2. – P. 393–410.

201. Dantzig, G.B., Glynn, P.W. Parallel processors for planning under uncertainty, Annals of Operations Research. – 1990. – 22. – P. 1–21.

202. Dantzig, G.B., Hoffman, A.J. Dilworth's Theorem on Partially Ordered Sets // [314, P. 207–213].

203. Dantzig, G.B., Infanger, G. Large-scale stochastic linear programs: Importance sampling and Benders decomposition // Computation and Applied Mathematics – Algorithms and Theory, Lecture Notes in Mathematics, Proceedings of the 13th IMACS World Congress on Computational and Applied Mathematics / C. Brezinski, U. Kulsich. (Eds.). – Dublin, 1992.

204. Dantzig, G.B., Madansky, A. On the solution of two-staged linear programs under uncertainty / J.Neyman (Ed.) Proceedings 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1. – Berkeley: University of California Press, 1961. – P. 165–173.

205. Dantzig, G.B., McAllister, P. H., Stone, J. C. Formulating an objective for an economy // Mathematical Programming. – 1988. – 42, Series B – P. 11–32.

206. Dantzig, G., Orden, A. A Duality Theorem Based on the Simplex Method // Symposium on Linear Inequalities, USAF Hq. SCOOP Publication N. 10, dated 1 April 1952. – P. 51–55.

207. Dantzig, G.B., Orden, A., Wolfe, P. The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints. Pacific J. Math. – 1955. – 5, N. 2. – P. 183-195.
208. Dantzig, G.B., Parikh, S.C. On a pilot linear programming model for assessing physical impact on the economy of a changing energy picture // Energy, Mathematics and Models, Lecture Notes in Mathematics / F. S. Roberts (Ed.), SIAM – Proceedings of a SIMS Conference on Energy, 1976.
209. Dantzig, G.B., Ramser, J.H. The truck dispatching problem // Management Science. – 1959. – 6. – P. 80–91.
210. Dantzig, G.B., Saaty, T.L. Compact City. – San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1973.
211. Dantzig, G.B., Thapa, M.N. Linear Programming 1: Introduction. – New York: Springer, 1997.
212. Dantzig, G.B., Thapa, M.N. Linear Programming 2: Theory and Extensions. – New York: Springer, 2003.
213. Dantzig, G.B., Wald, A. On the fundamental lemma of Neyman and Pearson, Ann. Math. Stat. – 1951. – 22. – P. 87–93.
214. Dantzig G. B., Wolfe P. Decomposition Principle for Linear Programs // Operations Research. – 1960. – 8 N. 1. – P. 101–111.
215. Darboux, G. Avertissement. – 1890 // [247, V. 2, P. v-vi]
216. Dines, L.L. Concerning Preferential Voting // American Mathematical Monthly. – 1917. – 24. – P. 321–325.
217. Dines, L.L. Convex Extension and Linear Inequalities // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1936. – 42. – P. 353–365.
218. Dines, L.L. Definite Linear Dependence // The Annals of Mathematics. – 1925. – 27. – P. 57–64.
219. Dines, L.L. Linear Inequalities and some related properties of Functions // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1930. – 36. – P. 393–405.
220. Dines, L.L. Note on Certain Systems of Linear Equalities and Inequalities // The Annals of Mathematics. – 1926 (1926–1927). – 28. – P. 41–42.
221. Dines, L.L. On Positive Solutions of a System of Linear Equations // The Annals of Mathematics. – 1927 (1926–1927). – 28. – P. 386–392.
222. Dines, L.L. On Sets of Functions of a General Variable // Transactions of the American Mathematical Society. – 1927. – 29. – P. 463–470.

223. Dines, L.L. Systems of linear inequalities // The Annals of Mathematics. – 1918–1919. – (2) 20. – P. 191–199.

224. Dines, L.L., McCoy, N.H. On Linear Inequalities // Transactions of the Royal Society of Canada. – 1933. – 27. – P. 37–70.

225. Dongarra, J., Sullivan, F. The top 10 algorithms, Computing in Science and Engineering. – 2000. – 2. – P. 22–23.

226. Dorfman, R. Application of Linear Programming to the Theory of the Firm – Berkeley and Los Angeles, CA: University of California Press, 1951. – 98 pp.

227. Dorfman, R. The discovery of linear programming // Annals of the History of Computing. – 1984. – 6. – P. 283–295.

228. Dorfman, R., Samuelson, P.A., Solow, R.M. Linear Programming and Economic Analysis, New York: McGraw-Hill, 1958.

229. Dupree, A.H. National Security and the Post-War Science Establishment in the United States // Nature. – 1986. – 323. – P. 213–216.

230. Dwyer, P.S. Report of the New York meeting // Ann. Math. Stat. – 1948. – 19. – P. 133–136.

231. Farkas, J. Theorie der einfachen Ungleichungen // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. – 1901. – Bd. 124. – P. 1–27.

232. Farkas, J. Über die Anwendung des Mechanischen Princips von Fourier // Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. – 1895. – 12. – P. 263–281.

233. Farkas, J. Über die Theorie der einfachen Ungleichungen // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik – 1902. – Bd. 124, №1. – P. 1–24.

234. Fenchel W. Convex Cones, Sets and Functions. Princeton Univ. Press, 1951.

235. Fenchel, W. Convexity through the Ages // Peter M. Gruber, Jörg M. Wills (eds.) Convexity and Its Applications. Basel-Boston-Stuttgart: Birkhäuser. – 1983. – P. 120–130.

236. Ferguson, A.R., Dantzig, G.B. The allocation of aircraft to routes – An example of linear programming under uncertain demand // Management Science. – 1956. – 3. – P. 45–73.

237. Ferguson, A.R., Dantzig, G.B. The problem of routing aircraft // Aeronautical Engineering Review. – 1956. – 14. – P. 51–55.

238. Fichtenholz, G., Kantorovitch, L. Sur les operations lineaires dans l'espace des fonctions bornees // Studia Math. – 1935. – T. 4. – P. 69–98.

239. Flood, M.M. On the Hitchcock distribution problem // Pacific journal of mathematics. – 1953, June. – V. 3. – P. 369–386.
240. Flood M.M. On the Hitchcock Distribution Problem // Symposium on Linear Inequalities and Programming. Project SCOOP, US Air Force. Washington DC, April 1952.
241. Ford, L.R., Jr, Fulkerson, D.R. Flows in Networks. – Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1962.
242. Ford, L.R., Fulkerson, D.R. Maximal Flow through a Network. Research Memorandum RM-1400, The RAND Corporation, Santa Monica, California, (19 November) 1954 (published in Canadian Journal of Mathematics. – 8, №3. – P. 399–404), 1956. (Опубликована сначала в 1954 г. как доклад RAND).
243. Fourier, J.B.J. Analyse des Équations Déterminées // (Ed.): C.L.M.H. Navier. – Paris, 1831. См. немецкий перевод: [Fourier, J.B.J. Auflösung der Bestimmten Gleichungen // (Ed.): Wilhelm Engelsmann, Leipzig, 1902. – C. 71].
244. Fourier, J.B.J. (Extract from) «Analyse des travaux de l'Académie Royale des Sciences, pendant l'année 1824. Partie mathématque.» // Histoire de l'Académie Royale des Sciences de l'Institue de France. – 1827. – 7. – P. xlvii-lv. Также в [247, V. 2, P. 325–328]. (Частичный перевод на английский: [Kohler, D.A. Translation of a Report by Fourier on his work on Linear Inequalities, Opsearch. – 1973. – 10. P. 38–42.]).
245. Fourier, J.B.J. «Extract from reference 5 for 1823» // Histoire de l'Académie Royale des Sciences. – 1827. – 6. – P. xxix-xli. Также в [247, V. 2, P. 321–324].
246. Fourier, J.B.J. Mémoire sur la statique contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles et la théorie des moments // Journal de l'École Polytechnique, 5th cahier, 1798. Также в [247, V. 2, P. 477–521].
247. Fourier, J.B.J. Oeuvres / G. Darboux (ed.), Gauthier-Villars, Paris, V. 1 (1888), V. 2 (1890).
248. Fourier, J.B.J. Solution d'une question particulière du calcul des inégalités // Nouveau Bulletin des Sciences par la Societe Philomatique de Paris. – 1826. – P. 99–100. Также в [247, V. 2, P. 315–319].
249. Fourier J.B.J. Solution d'une question particuliere du calcul des inegalites. – 1826 (см. также [“Histoire d l'Academie”, 1823, 1824, Oeuvres II, P. 317–328.]).
250. Franksen, O.I. Irreversibility by Inequality Constraints I: On Fourier's Inequality // Systems Analysis, Modelling, Simulation. – 1985. – 2. – P. 137–149.

251. Fujiwara, M. On the System of Linear Inequalities and Linear Integral Inequality // Proceedings of the Imperial Academy of Japan. – 1928. – 4. – P. 330–333.
252. Fujiwara, M. On the System of Linear Inequalities // Proceedings of the Imperial Academy of Japan. – 1930. – 6. – P. 297–298.
253. Fulkerson, D.R. An out-of-kilter method for minimal-cost flow problems, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. –1961. – 9. – P. 18–27.
254. Gale, D. Linear Programming and the Simplex Method // Notices Of the American Mathematical Society. – March 2007. – V. 54. – N. 3. – P. 364–369.
255. Gale, D., Kuhn, H.W., Tucker, A.W. Linear programming and the theory of games // [150]. – P. 317–329. (в предварительном варианте A.W.Tucker представил ее на собрании Econometric Society at Boulder, Colorado, 02 сентября 1949 г.)
256. Gass, S.I. Linear Programming, McGraw-Hill, New York, 1958.
257. Gass, S.I., Garille, S.G. Stigler's diet problem revisited // Operations Research. – 2001. – 41. – P. 1–13.
258. Giorgi, G., Kjeldsen, T.H. (Editors). Traces and Emergence of Nonlinear Programming. Springer Basel. – 2014.
259. Goldowsky, G. Sur les suites des functions continues // Fund. Math. – 1928. – T. 11. – P. 275–276.
260. Goldstine, H.H. Review of [60] // Math. Rev. – 1941. – 2. – P. 222. (Также в [Y. Sinai (Ed.) Russian Mathematicians of the 20th Century. World Scientific, Singapore. 2003])
261. Gordan, P. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten // Mathematische Annalen. – 1873. – 6. – P. 23–28.
262. Grattan-Guinness, I. A New Type of Question // On the Prehistory of linear and nonlinear programming, 1770–1940 // E. Knobloch, D. E. Rowe (eds.): The history of modern mathematics, V. 3: images, ideas, and communities. San Diego: Academic press. 1994. P.43-89.
263. Grattan-Guinness, I. Joseph Fourier’s anticipation of linear programming // Operational Research Quarterly. – 1970. – 21. – P. 361–364.
264. Grattan-Guinness, I. Joseph Fourier, 1768–1830; a survey of his life and work. / Cambridge, Massachusetts: The MIT Press. – 1972. – P. 485, note 64.
265. Gruber, P. History of Convexity // M. Gruber, Jörg M. Wills (eds.) Handbook of Convex Geometry. Elsevier Science Publishers. – 1993. – P. 3–15.

266. Gruber, P. Zur Geschicthe der Konvexgeometrie und der Geometrie der Zahlen // Gerd Fischer, Friedrich Hirzebruch, Winfried Scharlau, Willi Törnig (eds.) Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV. Barunschweig-Wiesbaden: Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Friedr. Vieweg & Sohn. – 1990. – P. 421–455.
267. Gummer, C.F. Sets of linear equations in positive unknowns. (Abstract) // American Mathematical Monthly. – 1926. – 33. – P. 487–488.
268. Haar, A.A. Linearis Egyenlötlensegekröl // Mathematikai és Természettudományi Ertesitö, 36, 1918, P. 279–296. в [Haar, A. Uber lineare Ungleichungen // Szeged Acta Litterarum Ac. Scientiarum, sectio Scientiarum Mathematicarum. – 1924. – V. 2. – P. 1–14.].
269. Hancock, H. Theory of Maxima and Minima. Ginn and company, New York, 1917. (Переиздано: Dover, New York, 1960).
270. Harris, T.E., Ross, F.S. Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities. Research Memorandum RM-1573. The RAND Corporation, Santa Monica, California. – 1955.
271. Hermite, C. Extraits de letters d.M.Ch. Hermire a M. Jacobi: Sur Différents Objects de la théorie des Nombres // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1850. – 40. – P. 261–315.
272. Hitchcock, F.L. The distribution of a product from several sources to numerous localities // Journal of Mathematics and Physics. Mass. Inst. Tech. – 1941. – 20. – P. 224–230.
273. Huber, A. Eine Erweiterung der Dirichletschen Methode des Diskontinuitätsfaktors und ihre Anwendung auf eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Monatshefte für Mathematik und Physik. – 1930. – 37. – P. 55–72.
274. Interior point method. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Interior_point_method.
275. John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. // Courant Anniversary Vol. (Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948). – N. Y.: Interscience Publishers, Inc., 1948. – P. 187–204.
276. Kakeya, S. On some Integral Equations // Tohoku Mathematical Journal. – 1913–1914. – 4. – P. 186–190.
277. Kantorovich, L.V. Mathematical methods of organizing and planning production // Management Science. – 1960. – 6. – P. 366–422. (Перевод [39]).
278. Kantorovich, L.V. My journey in science / L.J. Leifman (Ed.). Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics. – New York: Oxford University Press, 1990.

279. Kantorovitch L. On the Translocation of Masses // Management Science. – Oct., 1958. – V. 5. – N. 1 – P. 1–4.
280. Kantorovich, L.V. Selected Works. Part 1: Descriptive Theory of Sets and Functions. Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces / Ed. by S.S. Kutateladze. – London: Gordon and Breach, 1996. – 374 p.
281. Kantorovich, L.V. Selected Works. Part 2: Applied Functional Analysis. Approximation Methods and Computers / Ed. by S.S. Kutateladze, J.V. Romanovsky. – Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. – 394 p.
282. Kantorovitch, L. Sur les ensembles projectifs de la deuxieme classe // Comptes rendus herdomadaires des séanses de l'Académie des sciences de Paris. – 1929. – T. 189. – №27. – P. 1233–1235.
283. Kantorovitch, L. Sur les suites des fonctions presque partout continues // Fundamenta mathematica. – 1930. – Vol. 16. – P. 25–28.
284. Kantorovitch, L. Sur les suites des fonctions rentrat dans la classification de M. W. H. Young // Fundamenta Mathematicae. – 1929. – T. XIII. – P. 178–185.
285. Kantorovitch, L. The method of successive approximations for functional equations // Acta mathematica (Uppsala). – 1939. – V. 71. – P. 63–97.
286. Kantorovitch, L. Un exemple d'une fonction semicontinue universelle pour les fonction continues // Fundamenta mathematica. – 1932. – Vol. 18. – P. 178–181.
287. Karmarkar, N.K. A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica. – 1984. – N. 4. – P. 373–395.
288. Karmarkar's algorithm. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Karmarkar%27s_algorithm.
289. Karp, R.M. Reducibility Among Combinatorial Problems / R. E. Miller, J. W. Thatcher (eds.) Complexity of Computer Computations. New York: Plenum. – 1972. – P. 85–103.
290. Karush, W. Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints. / M.Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, University of Chicago, Chicago, Illinois. – 1939. (Unpublished)
291. Kempner, A.J. Review of [272] // Math. Rev. – 1942. – 3. – P. 11–12.
292. Khachiyan, L.G. Convexity and complexity in polynomial programming // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warsaw, PWN, Warsaw. – 1984. – P. 1569–1577.

293. Kjeldsen, T.H. A Contextualised Mathematico-historical Analysis of Nonlinear Programming: Development and Multiple Discovery, (in Danish), IMFUFA, Text 372, Roskilde University, 1999.
294. Kjeldsen, T.H. A Contextualized Historical Analysis of the Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: The Impact of World War II, Historia Mathematica. – 2000. – 27. – P. 331–361.
295. Kjeldsen, T.H. A History of the Minimax Theorem: a journey through different mathematical contexts // in 9. November-tagung zur Geschichte der Mathematik. (eds.) D. Beckers, K. Peters, C. Volimers. Nijmegen: Department of Mathematics, University of Nijmegen. – 1999. – P. 32–38.
296. Kjeldsen, T.H. Different Motivations and Goals in the Historical Development of the Theory of Systems of Linear Inequalities // Archive for History of Exact Sciences. – 2002. – 56. – P. 469–538.
297. Kjeldsen, T.H. Egg-forms and Measure Bodies: Different Mathematical Practices in the Early History of the Development of the Modern Theory of Convexity // Science in Context. – 2009. – 22. – P. 85–113.
298. Kjeldsen, T.H. From measuring tool to geometrical object: Minkowski's development of the concept of convex bodies // Archive for History of Exact Sciences. – 2008. – 62. – P. 59–89.
299. Kjeldsen, T.H. History of Convexity and Mathematical Programming: Connections and Relationships in Two Episodes of Research in Pure and Applied Mathematics of the 20th Century // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Hyderabad, India, – 2010.
300. Kjeldsen, T.H. John von Neumann's Conception of the Minimax Theorem: A Journey Through Different Mathematical Contexts // Archive for History of Exact Sciences. – 2001. – 56. – P. 39–68.
301. Kjeldsen, T.H. The Development of Nonlinear Programming in Post War USA: Origin, Motivation, and Expansion // H.B. Andersen, F.V. Christiansen, K.F. Jrgensen, V. Hendricks (eds) The Way Through Science and Philosophy: Essays in Honour of Stig Andur Pedersen, College Publications, London. – 2006. – P. 31–50.
302. Kjeldsen, T.H. The Emergence of Nonlinear Programming: Interactions between Practical Mathematics and Mathematics Proper // The Mathematical Intelligencer. – 2000. – 22. – P. 50–54.

303. Kjeldsen, T.H. The Historical Background of Nonlinear Programming // Selected Topics in Mathematics. Proceedings of the first Nordic Summer School for female Ph.D. students of mathematics, Lulea University, Sweden. – 1997. – P. 63–67.
304. Klee, V. (ed.): Convexity // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. – Vol. VII. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. – 1963.
305. Klee, V., Minty, G.J. How good is the simplex algorithm? // (Shisha Oved, ed.) Inequalities III (Proceedings of the Third Symposium on Inequalities held at the University of California, Los Angeles, Calif., September 1–9, 1969, dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin). – New York–London: Academic Press. – 1972. – P. 159–175.
306. Koopmans, T.C. A Note about Kantorovich's Paper, “Mathematical Methods of Organizing and Planning Production” // Management Science. – July 1960. – V. 6. – N. 4. – P. 363–365.
307. Koopmans, T.C. Exchange ratios between cargoes on various routes, memorandum dated 1942, in Scientific Papers of Tjalling C. Koopmans, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
308. Koopmans, T.C. Optimum utilization of the transportation system // The Econometric Society Meeting (Washington, D.C., September 6–18, 1947; D.H. Leavens, ed.) [Proceedings of the International Statistical Conferences – Volume V]. – 1948. – P. 136–146 [переиздана: Econometrica (Supplement). – 1949. – 17. – P. 136–146] [переиздана: Scientific Papers of Tjalling C.Koopmans, Springer, Berlin. – 1970. – P. 184–193].
309. Koopmans, T.C. Tjalling C. Koopmans – Autobiography. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nobelprize.org/economics.
310. Koopmans, Tj.C., Reiter, S. A model of transportation / [150, P. 222–259].
311. Kuhn, H.W. Nonlinear Programming: A Historical View // SIAM-AMS Proceedings. – 1976. – 9. – P. 1-26.
312. Kuhn, H.W. On a Theorem by Wald // [314].
313. Kuhn, H.W., Tucker, A.W. John von Neumann's Work in the Theory of Games and Mathematical Economics // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1958. – 64. – P. 100–122.
314. Kuhn, H.W., Tucker, A.W. (eds.): Linear Inequalities and Related Systems // Annals of Mathematics Studies. – Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1956. – 38.
315. Kuhn, H.W., Tucker, A.W. Nonlinear Programming // J. Neyman (ed.): Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley. – 1950. – P. 481–492.

316. Lagrange, J.L. Mecanique Analytique I–II. Paris, 1788.
317. Laplace, P.-S. Traite de Mecanique Celeste. A Paris, Chez J.B.M.Dupart, Libraire pour les Mathematiques, quai des Augustins, An VII. 1799, Livre III, №39. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.archive.org/details/traitdemcani01lapl.
318. Lawler, E.L. The great mathematical Sputnik of 1979 // The Sciences. – 1980. – P. 12–15.
319. Legendre, A.M. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. – Paris: Firmin Didot, 1805.
320. Leontief, W. The Structure of the American Economy. 1919–1939. – New York: Oxford University Press, 1941.
321. Lovitt, W.V. Preferential Voting // American Mathematical Monthly. – 1916. – 23. – P. 363–366.
322. Markowitz, H.M. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints, Naval Res. Logist. Quart. – 1956. – 3. – №2. – P. 111–113.
323. Mathematics Genealogy Project. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.genealogy.ams.org/.
324. Minkowski, H. (1897): Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder // [327, V. 2, P. 103–121].
325. Minkowksi, H. Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1905. – 129. – P. 220–274. Также в [327, V. 2. P. 53–100.]
326. Minkowski, H. Geometrie der Zahlen. / B.G. Teubner, 1896. Цитируется по [Minkowski, H. Geometrie der Zahlen. / Leipzig: Johnson Reprint Corporation, 1910].
327. Minkowski, H. Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski. Vols. 1 and 2, (ed.): David Hubert. Leipzig, Berlin: B.G. Teubner, 1911.
328. Minkowski, H. (1901a): Über die Begriffe Länge. Oberfläche und Volumen // [327, V. 2, P. 122–127].
329. Minkowski, H. (1901b): Über die geschlossenen konvexen Flächen // [327, V. 2, P. 128–130].
330. Minkowski, H. Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algoritmen. – 1891. – P. 243–260. См. в [327, V. 1].
331. Minkowski, H. Über Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind. – 1893. – P. 271–277. См. в [327, V. 1]
332. Minkowski, R. Über Geometrie der Zahlen. – 1891. – P. 264-265. См. в [327, V. 1]

333. Mizes L. Die Wirtschaftsrechnung im sozialistischen Gemeinwesen // Archiv fur Socialwissenschaft und Socialpolitik. – 1920. – N. 47. – P. 86–121. Перевод на анг.: Economic Calculation in the Socialist Commonwealth // Collectivist Economic Planning. – P. 87–103.

334. Monge, G. Memoire sur la theorie des Deblais et des remblais // hestoire de l’Academie Royale des Science. – 1781. – P. 666–704.

335. Motzkin, T. Beitrage zur Theorie der linearen Ungleichungen, (Inaugural dissertation, Basel). – Azriel, Jerusalem, 1936. Перевод на анг. D. R. Fulkerson в [166].

Motzkin, T. (1936): Theorie der linearen Ungleichungen. – Azriel, Jerusalem, 1936.

336. Murray, W. Tributes to George Dantzig and Leonid Khachiyan. George Dantzig: A Personal Perspective // SIAG/OPT Views-and-News. – Oct. 2005. – V. 16. – N. 1–2. – P. 1–3.

337. Mycielski J., Rey K., Trzeciakowski W. Decomposition and Optimization of Shortrun Planning in a Planned Economy // T. Barna (ed.), Structural Interdependence and Economic Development. – London: MacMillan & Co., 1963.

338. Nemirovsy, A., Nesterov, Yu. Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex programming. SIAM Studies in Applied Math., 1994.

339. NEOS Server: State-of-the-Art Solvers for Numerical Optimization. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://neos-server.org/neos/.

340. Neumann, J. von. Discussion of a maximum problem, working paper dated November 15–16, 1947. / reproduced in A.H. Taub (Ed.), John von Neumann Collected Works. – Oxford: Pergamon Press, 1963. – V. 6. – P. 89–95.

341. Neumann, J von. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes // Karl Menger (ed.). Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums. – Vienna. – 1937. – Vol. 8. – P. 73–83. Цитирование по англ. перевод: von Neumann, J. A Model of General Economic Equilibrium // The Review of Economic Studies. – 1945–1946. – Vol. 13, N. 1. – P. 1–9.

342. Neumann, J. von. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // Math. Annalen. – 1928. – 100. – P. 295–320.

343. Neumann, J. von, Morgenstern, O. Theory of Games and Economic Behavior. – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1944.

344. Newman, D.J. Location of maximum on unimodal surfaces. Journ. of the Assoc. for Computing Machinery. – 1965. – 12. – P. 395–398.

345. Newman, P. Some calculations on least-cost diets using the simplex-method, Bulletin. – Oxford, England: Oxford Univ. Institute of Statistics. – 1955. – 17, Issue 3. – P. 303–320.
346. Neyman, J., Pearson, E.S. Contributions to the theory of testing statistical hypothesis. Statist. Res. Mem., Parts I-II, 1936, 1938.
347. Ostrogradsky, M. Considérations générales sur les momens des forces // Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. – 1838. – sixième série, I. – P. 129–150. Ostrogradsky, M. Mémoire sur les déplacemens instantanés des systémes assujettis a des conditions variables // там же – P. 565–600.
348. Poussin, M.Ch.J. de Vallee. Sur la methode de l'approximation minimum // Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles. – 1911. – 35. – P. 1–16.
349. Prékopa, A. On the development of Optimization Theory // The Amer. Math. Monthly. – 1980. – V. 87. – №7. – P. 527–542.
350. Proceedings: Symposium on Linear Inequalities and Programming / A. Orden, L. Goldstein (Eds.). – Washington, D.C.: Headquarters, USAF, 1952.
351. Proceedings of the First International Conference on Operational Research, Operations Research Society of America / M. Davies, R. T. Eddison and T. Page (Eds.). – Baltimore, 1957.
352. Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming / H. A. Antosiewicz (Ed.). – Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1955.
353. Rausenberger, O. (1888): Lehrbuch der Analytischen Mechanik. – Leipzig: B.G. Teubner, 1888. – С. 146.
354. Rawlings, E.W. The Application of Electronic Computers to Military Operations // Publication N. L56–126; Industrial College of the Armed Forces, Washington, D.C., 1956. (Address delivered by Lt. Gen. Rawlings, April 10, 1956)
355. Rees, M.S. Mathematics and the Government: The Post-War Years as Augury of the Future // D. Tarwater (ed.): The Bicentennial Tribute to American Mathematics, 1776–1976. –Buffalo, NY: The Mathematical Association of America, 1977. – P. 101–116.
356. Rockafellar, R.T. Convex Analysis. – Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1970. Также: Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.
357. Schlauch, H.M. Mixed Systems of Linear Equations and Inequalities // American Mathematical Monthly. – 1932. – 39. – P. 218–222.
358. Schlesinger, K. 1933–34: Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre // Menger (ed.): Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. – 1935. – 6. – P. 10–20.

Также: On the Production Equations of Economic Value Theory – перевод W.J. Baumol // W.J. Baumol, S.M. Goldfeld (eds.) – Precursors in Mathematical Economics: An Anthology. – London: London School of Economics and Political Science, 1968. – P. 278–280.
359. Schrijver, A. On the history of the transportation and maximum flow problems // Math. Program. – 2002. – Ser. B 91. – P. 437–445.
360. Schrijver, A. Theory of Linear and Integer Programming. John Wiley & sons, 1998.
361. Schwermer, J. Räumliche Anschauung und Minima positive deniter quadratischer Formen // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. – 1991. – 93. – P. 49–105.
362. Shiffman, M. Review of [52] // Math. Rev. – 1944. – 5. (Также в [Y. Sinai (Ed.), Russian Mathematicians of the 20th Century, World Scientific, Singapore, 2003])
363. Slutsky, E.E. Sulla teoria sel bilancio del consumatore // Giornale degli economisti e ri vista di statistica. – 1915. – V. 51, №1. – P.1–2.
364. Smale, S. Mathematical problems for the next century // The Mathematical Intelligencer. – 1998. – 20:2. – P. 7–15.
365. Smale, S. On the average number of steps of the simplex method of linear programming // Mathematical Programming. – 1983. – 27. – P. 241–262.
366. Steinitz, E. Bedingt Konvergente Reihen und Konvexe Systeme // J. Reine Angew. Math. – 1913. – 143. – P. 128–175.
Steinitz, E. Bedingt Konvergente Reihen und Konvexe Systeme (Fortsetzung) // J. Reine Angew. Math. – 1914. – 144. – P. 1–40.
Steinitz, E. Bedingt Konvergente Reihen und Konvexe Systeme (Schluss) // J. Reine Angew. Math. – 1916. – 146. – P. 1–52.
367. Stepanoff, W. Sur les suites des functions continues // Fund. Math. – 1928. – T. 11. – S. 264–272.
368. Stiemke, E. Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen // Mathematische Annales. – 1915. – 76. – P. 340–342.
369. Stiemke, E. (1925): Über unendliche algebraische Zahlkörper // Liste historischer mathematischer Dissertationen von 1810 bis 1933, number 161, Humbolt University Berlin, Digital Dissertations.
370. Stigler, G.J. The cost of subsistence // J. Farm Economics. – 1945. – 27. – P. 303–314.
371. Stokes, R.W. A geometric theory of solution of linear inequalities // Transactions of the American Mathematical Society. – 1931. – 33. – P. 782–805.

372. Тарасов С.П., Хачиян Л.Г., Эрлих И.И. Метод вписанных эллипсоидов // Докл. АН СССР. 1988. – Т. 298. – № 3. – С. 1081–1085.

Английский перевод: Tarasov, S.P., Khachiyan, L.G., Erlikh, I.I. The method of inscribed ellipsoids // Soviet Mathematics Doklady. – 1988. – 37. – P. 226–230.

373. The Vehicle Routing Problem // P. Toth, D. Vigo (Eds.) SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. – Philadelphia, PA, 2002. – P. xvii.

374. Tikhomirov, V.M. The Evolution of Methods of Convex Optimization // American Mathematical Monthly. – 1996 Jan. – V. 103, N. 1. – P. 65–71.

375. Todd, M. Tributes to George Dantzig and Leonid Khachiyan. Leonid Khachiyan, 1952–2005: An Appreciation // SIAG/OPT Views-and-News. – Oct. 2005. – V.16, N. 1–2. – P. 4–6.

376. Tucker, A.W, Nering, E.D. Linear Programs and Related Problems. – Boston: Academic Press, 1993.

377. Ulam, S. John von Neumann, 1903–1957 // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1958. – 64. – P. 1–49.

378. Van de Panne C., Rahmana F. The First Algorithm for Linear Programming: An Analysis of Kantorovich’s Method. The University of Calgary. Discussion paper Series. – May 1977. – N. 45.

379. Van der Waerden, B.L. Darstellung von Zahlen durch binäre Formen. Abriss der Ergebnisse von Gauss. – 1968 // [381, C. 13–44].

380. Van der Waerden, B.L. Die Reduktionstheone der positiven quadratischen Formen. – 1968 // [381, C. 17–44].

381. Van der Waerden, B.L., Gross, H. (eds.) Studien zur Theorie der Quadratischen Formen. – Basel: Birkhäuser Verlag, 1968.

382. Villani, C. Optimal Transport: Old and New. – Berlin: Springer-Verlag, 2009. – xxii+973p.

383. Ville, J. (1938): Sur la Théorie générale des jeux où intervient V habileté des joueurs. / в [Borel, E. ét al. Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications. Pans: Gauthier-Villars, 1938, P. 105–117.].

384. Wald, A. Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie // Zeitschrift für Nationalökonomie. – 1936. – V. 7. – P. 637. Превод на английский: On some systems of equations of mathematical economics // Econometrica. – 1951. – V. 19 (4). – P. 368–403.

385. Wald, A. (1934-5): Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre (2. Mitteilung) // Menger (ed): Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. – 1936. – 7. P. 1–6.

Превод на английский: On the Production Equations of Economic Value Theory (Part 2) // Baumol, Goldfeld (eds): Series of Reprints of Scarce Works on Political Economy. – 1968.
386. Wald, A. (1933–4): Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen // Menger (ed): Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. – 1935. – 6. – P. 12–20.
Превод на англ.: On the Unique Non-Negative Solvability of the New Production Functions (Part I) // Baumol, Goldfeld (eds): Series of Reprints of Scarce Works on Political Economy.
387. Walras, L. (1874) Elements of Pure Economics: Or the theory of social wealth. 1954. / translation of 1926 edition, Homewood, Ill.: Richard Irwin.
388. Weyl, H. Elementare Theorie der konvexen Polyeder // Commentarii Mathematici Helvetici. – 1935. – 7. – P. 290–306. Ссылка по Weyl, H. The Elementary Theory of Convex Polyhedra (английский перевод в) / [H.W. Kuhn, A.W. Tucker (eds.): Contributions to the Theory of Games. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1950. – P. 3–18.].
389. Yamnitsky, B. An old linear programming problem runs in polynomial time / B. Yamnitsky, L.A. Levin // 23rd Annual Symposium of Foundations of Computer Science, 3-5 November 1982, Chicago, Illinois, USA. – New York: IEEE, 1982. – P. 327–328.
390. Zachary, P.G. Endless Frontier: Vannevar Bush, Engineer of the American Century. – New York: The Free Press, 1997.
391. Zeuthen, F., Friis, Ch.R. Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination, und ökonomische Qualität // Zeitschrift für Nationalökonomie. – 1932. – Bd. 4, H. 1. – P. 1–24.
Zeuthen, F. Public Price Policy, 1933, // Economic Essays in Honour of Gustav Cassel. – London: 1933, P. 673–689.
Zeuthen, F. Theoretical Remarks on Price Policy: Hotellings' Case with Variations // Quarterly Journal of Economics. – 1933. – V. 47. – P. 231–253.

Приложения

Приложение 1. Список имен, встречающихся в тексте

Аганбегян, Абел Гезевич	Aganbegyan, Abel	1932 г.р.
Александров, Александр Данилович		1912–1999
Анчишкин, Александр Иванович	Anchishkin, Alexandr Ivanovich	1933–1987
Аппель, Поль Эмиль	Appell, Paul Émile	1855–1930
Арзуманян, Анушаван Агафонович		1904–1965
Байбаков, Николай Константинович		1911–2008
Банах, Стефан	Banach, Stefan	1892–1945
Белкин, Виктор Данилович		1927 г.р.
Беллман, Ричард Эрнст	Bellman, Richard Ernest	1920–1984
Бернштейн, Сергей Натанович	Bernstein, Sergei Natanovich	1880–1968
Блисс, Джилберт Эймз	Bliss, Gilbert Ames	1876–1951
Болтянский, Владимир Григорьевич	Boltyansky, Vladimir Grigorevich	1925 г.р.
Больца, Оскар	Bolza, Oskar	1857–1942
Боннезен, Томи	Bonnesen, Tommy	1873–1935
Борель, Феликс Эдуар Жюстен Эмиль	Borel, Félix Édouard Justin Émile	1871–1956
Боярский, Арон Яковлевич		1906–1985
Брауэр, Лёйтзен Эгберт Ян	Brouwer, Luitzen Egbertus Jan	1881–1966
Брунн, Карл Герман	Brunn, Karl Hermann	1862–1939
Бруцкус, Бер (Борис) Давидович		1874–1938
Вайда, Стефан	Vajda, Steven	1901–1995
Вайнштейн, Альберт Львович		1892–1970
Валентайн, Альберт	Valentine, Frederick Albert	1911–2002
Валландер, Сергей Васильевич	Wallander, Sergei Vasilievich	1917–1975
Валле-Пуссен, Шарль Жан Этьен Густав Николя (де ла Валле-Пуссен)	Vallée Poussin, Charles Jean Étienne Gustave Nicolas (de la Vallée Poussin)	1866–1962
Вальд, Абрахам	Wald, Abraha	1902–1950
Вальрас, Мари Эспри Леон	Walras, Marie-Ésprit-Léon	1834–1910

Варга, Дж.	Warga, J.	
Васерштейн, Леонид Нисонович	Vaseršteĭn, Leonid	1944 г.р.
Вейль, Герман Клаус Гуго	Weyl, Hermann Klaus Hugo	1885–1955
Вершик, Анатолий Моисеевич		1933 г.р.
Виллани́, Седри́к	Villani, Cédric Patrice Thierry	1973 г.р.
Вилле, Жан (также известный как Вилле, Жан-Андре и Вилле, Андре)	Ville, Jean (Ville, Jean-André; Ville, André)	1910–1989
Влек, Эдвард Бурр (ван Влек)	Vleck, Edward Burr (Van Vleck)	1863–1943
Вознесенский, Александр Алексеевич	Voznesensky, Alexander Alexeevich	1898–1950
Волкап, Дэвил	Walkup, David	
Вороной, Георгий Феодосьевич		1868–1908
Вуд, Маршалл К.	Wood, Marshall K.	
Вульф, Филипп С.	Wolfe, Philip Starr	1927–2016
Габер (Хабер) А.	Huber, A.	
Гамкрелидзе, Реваз Валерианович	Gamkrelidze, Revaz Valerianovic	1927 г.р.
Гаммер, К. Ф.	Gummer, C.F.	
Гатовский, Лев Маркович		1903–1997
Гаусс, Иоганн Карл Фридрих	Gauss, Johann Carl Friedrich	1777–1855
Гацс, Питер	Gacs, Peter	
Гейл, Дэвид	Gale, David	1921–2008
Гейслер, Мюррей Аарон	Geisler, Murray Aaron	1917–1985
Гельфанд, Израиль Моисеевич	Gelfand, Israel Moiseevich	1913–2009
Гильберт, Давид	Hilbert, David	1862–1943
Гольштейн, Евгений Григорьевич		1931 г.р.
Гордан (Гордон), Пауль Альберт	Gordan (Gordon), Paul Albert	1837–1912
Горьков, Лев Иванович		1934 г.р.
Граттан-Гиннесс, Айвор	Grattan-Guinness, Ivor Owen	1941–2014
Грейвс Л.М.	Graves, Laurence Murrey	1896 г.р.
Грётшель, Мартин	Grötschel, Martin	1948 г.р.
Гротендик, Александр	Grothendieck, Alexander	1928–2014

Грюнбаум, Бранко	Grunbaum, Branko	1929 г.р.
Губер, Максимилиан Титус	Huber, Maksymilian Tytus	1872–1950
Гурвиц, Леонид	Hurwicz, Leonid "Leo"	1917–2008
Дайнес, Ллойд Линес	Dines, Lloyd Lyne	1885–1964
Данциг, Джордж Бернард	Dantzig, George Bernard	1914–2005
Дарбу, Жан Гастон	Darboux, Jean Gaston	1842–1917
Декарт, Рене	Descartes, René	1596–1650
Делоне, Борис Николаевич		1890–1980
Демидович, Василий Борисович		1943 г. р.
Джевонс, Уильям Стэнли	Jevons, William Stanley	1835–1882
Джилл, Филипп Э.	Gill, Philip E.	
Джон, Фриц	John, Fritz	1910–1994
Дикин, Илья Иосифович		1936–2008
Дилуорс, Роберт П.	Dilworth, Robert Palmer	1914–1993
Дирихле, Иоганн Петер Гстав Лежён	Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune	1805–1859
Дмитриев, Владимир Карпович		1868–1913
Дорофеева, Алла Владимировна		1935 г.р.
Дорфман, Роберт	Dorfman, Robert	1916–2002
Дубовицкий, Абрам Яковлевич		1923–2007
Жергонн, Жозеф Диас	Gergonne, Joseph Diaz	1771–1859
Залгаллер, Виктор Абрамович		1920 г.р.
Ибрагимов, Ильдар Абдуллович	Ibragimov, Ildar Abdulovich	1932 г.р.
Йенсен (Енсен), Иоган Виллем Людвиг Вальдемар	Jensen, Johan Ludwig William Valdemar (mostly known as Johan Jensen)	1859–1925
Инфангер, Герд	Infanger, Gerd	
Какейа, Соиши	Kakeya, Sōichi (掛谷 宗一)	1886–1947
Калай, Джил	Kalai, Gil	1955 г.р.
Кан, Альберт	Kahn, Albert	1869–1942
Канторович, Леонид Витальевич	Kantorovich, Leonid Vitaliyevich	1912–1986

Капланский, Ирвинг	Kaplansky, Irving	1917–2006
Каратеодори, Константин	Carathéodory, Constantin	1873–1950
Карвер, Вальтер Б.	Carver, Walter Buckingham	1879–1961
Карвер, Гарри Клайд	Carver, Harry Clyde	1890–1977
Карлин, Самуэль	Karlin, Samuel	1924–2007
Кармаркар, Нарендра	Karmarkar, Narendra	1957 г.р.
Карп, Ричард Мэннинг	Karp, Richard Manning	1935 г.р.
Каруш, Вильям	Karush, William	1917–1997
Келдыш, Мстислав Всеволодович		1911–1978
Кенэ, Франсуа	Quesnay, François	1694–1774
Кжелдсон, Тине Хоф	Kjeldsen, Tinne Hoff	
Кимбелл, Дж. Е	Kimball, George E. (George Elbert)	1906–1967
Кириллин, Владимир Алексеевич		1913–1999
Клейн, Лоуренс Роберт	Klein, Lawrence Robert	1920–2013
Клейтман, Дэниэл	Kleitman, Daniel J.	1934 г.р.
Кли, Виктор	Klee, Victor L. Jr.	1925–2007
Козлов, М. К.		
Колмогоров (урождённый Катаев), Андрей Николаевич		1903–1987
Кондратьев, Николай Дмитриевич		1892–1938
Конюс, Александр Александрович		1895–1990
Корбут, Александр Антонович	Korbut, Alexander Antonovich	1934 г.р.
Корнаи (Корнхаузер – до 1945), Янош	Kornai (Kornhauser – until 1945), János	1928 г.р.
Костюченко, Анатолий Гордеевич	Kostyuchenko, Anatoly Gordeyevich	1931–2010
Косыгин, Алексей Николаевич		1904–1980
Коттл, Ричард В.	Cottle, Richard W.	1934 г.р.
Коулс, Альфред III	Cowles, Alfred C. III	1891–1984
Коши, Огюстен Луи	Cauchy, Augustin Louis	1789–1857

Крейн, Марк Григорьевич		1907–1989
Кронрод, Яков Абрамович		1912–1984
Крылов, Алексей Николаевич		1863–1945
Крылов, Владимир Иванович		1902–1994
Кук, Стивен Артур	Cook, Stephen Arthur	1939 г.р.
Кун, Гарольд Вильямс	Kuhn, Harold William	1925–2014
Купер, Уильям В.	Cooper, William Wager	1914–2012
Купманс, Тьяллинг Чарлз	Koopmans, Tjalling Charles	1910–1985
Курант, Рихард	Courant, Richard	1888–1972
Курно, Антуан Огюст (Огюсте́н)	Cournot, Antoine Augustin	1801–1877
Кусраев, Анатолий Георгиевич	Kusraev, Anatoliy Georgievich	1953 г. р.
Кутателадзе, Семён Самсонович	Kutateladze, Semyon Samsonovich	1945 г. р.
Кэли, Артур	Cayley, Arthur	1821–1895
Лагранж, Жозеф Луи	Lagrange, Joseph-Louis (Lagrangia, Giuseppe Lodovico)	1736–1813
Лаплас, Пьер Симон	Laplace, Pierre-Simon	1749–1827
Левин, Анатолий Юрьевич	Levin, Anatoly Yurievich	1936 – 2007
Левин, Владимир Львович		1938–2012
Левин, Леонид Анатольевич		1948 г. р.
Лёвнер, Чарльз	Loewner, Charles (Löwner, Karel in Czech; Löwner, Karl in German)	1893–1968
Лежандр, Адриен Мари	Legendre, Adrien-Marie	1752–1833
Ленстра, Хендрик В.	Lenstra, Hendrik Willem Jr.	1949 г.р.
Леонтьев, Василий Васильевич	Leontief, Wassily Wassilyevich	1905–1999
Ливенсон, Е.М.	Livenson, E.	
Ловас, Ласло	Lovász, László	1948 г.р.
Ловитт, Уильям Вернон	Lovitt, William Vernon	1881–1972
Лоулер, Е.Л.	Lawler, Eugene Leighton (Gene)	1933–1994

Лузин, Николай Николаевич	Luzin, Nikolai Nikolaevich	1883–1950
Ляпунов, Алексей Андреевич		1911–1973
Макаров, Валерий Леонидович	Makarov, Valery Leonidovich	1937 г. р.
Маккой, Нил	McCoy, Neal H.	
Макмаллен, Питер	McMullen, Peter	1942 г.р.
Мак-Шейн, Эдуард Джеймс	McShane, Edward James	1904–1989
Маленво, Эдмон	Malinvaud, Edmond	1923–2015
Маркс, Карл Ге́нрих	Marx, Karl Heinrich	1818–1883
Мёбиус, Август Фердинанд	Möbius, August Ferdinand	1790–1868
Мелон, Боб	Mellon, Bob	
Мизес, Людвиг (фон Мизес)	Mises, Ludwig Heinrich Edler (von Mises)	1881–1973
Милютин, Алексей Алексеевич		1925–2001
Минковский, Герман	Minkowski, Hermann	1864–1909
Минти, Джордж Джеймс	Minty, George James	1929–1986
Михлин, Соломон Григорьевич (Залман Гиршевич)		1908–1990
Монж, Гаспар, граф де Пелюз	Monge, Gaspard comte de Péluse	1746–1818
Моргенштерн, Оскар	Morgenstern, Oskar	1902–1977
Морс, Филипп Маккорд	Morse, Philip McCord	1903–1985
Моцкин, Самуэль Теодор	Motzkin, Theodore Samuel	1908–1970
Мур, Элиаким Гастингс	Moore, Eliakim Hastings	1862–1932
Мюррей, Уолтер	Murray, Walter	
Натансон, Исидор Павлович	Natanson, Isidor Pavlovich	1906–1964
Нейман, Джон (фон Нейман)	Neumann, John (von Neumann)	1903–1957
Нейман, Ежи (при рождении Нейман, Ю́рий Чеславович)	Neyman, Jerzy	1894–1981
Нейштадт, Люсьен У.	Neustadt, Lucien W.	1928–1972
Немировский, Аркадий Семенович	Nemirovskii, Arkadii	1947 г.р.
Немчинов, Василий Сергеевич		1894–1964
Несмеянов, Александр Николаевич		1899–1980

Нестеров, Юрий Евгеньевич	Nesterov, Yuri	1956 г. р.
Новожилов, Виктор Валентинович		1892–1970
Ньюман, Дональд	Newman, Donald J. (D. J.)	1930–2007
Обен, Жан-Пьер	Aubin, Jean-Pierre	1939 г.р.
Олейник, Юрий Александрович		1935–2002
Ордэн, Алекс	Orden, Alex	1916–2008
Островитянов, Константин Васильевич		1892–1969
Остроградский, Михаил Васильевич	Ostrogradsky (Ostrogradskiy), Mikhail Vasilyevich	1801–1862
Парето, Вильфредо	Pareto, Vilfredo	1848–1923
Перлес, Миша А.	Perles, Micha Asher Perles	1940 г.р.
Плюккер, Юлиус	Plücker, Julius	1801–1868
Понселе, Жан-Виктор	Poncelet, Jean-Victor	1788–1867
Понтрягин, Лев Семёнович		1908–1988
Прекопа, Андрас	Prékopa, András	1929–2016
Пуанкаре, Жюль-Анри	Poincaré, Jules Henri	1854–1912
Пшеничный, Борис Николаевич		1937–2000
Райт, Маргарет Х.	Wright, Margaret H.	1944 г.р.
Рокафеллар, Ральф Т.	Rockafellar, Ralph Tyrrell ("Terry")	1935 г.р.
Ролингс, Эдвин (генерал)	Rawlings, Edwin William (General)	1904–1997
Романовский, Иосиф Владимирович	Romanovsky, Joseph Vladimirovich	1935 г.р.
Росс, Ф.	Ross, F.S.	
Рубинштейн, Геннадий Соломонович (Шлемович)	Rubinstein, Gennady Shlemovich	1923–2004
Саати, Томас Лори	Saaty, Thomas Lorie	1926 г.р.
Самуэльсон, Пол Энтони	Samuelson, Paul Anthony	1915–2009
Саундерс, Микаэл Алан	Saunders, Michael Alan	1944 г.р.

Сильвестр, Джеймс Джозеф	Sylvester, James Joseph	1814–1897
Слуцкий, Евгений Евгеньевич		1880–1948
Смирнов, Владимир Иванович		1887–1974
Соболев, Сергей Львович		1908–1989
Солоу, Роберт Мертон	Solow, Robert Merton	1924 г.р.
Стейниц, Эрнст	Steinitz, Ernst	1871–1928
Степанов, Вячеслав Васильевич		1889–1950
Стокс, Р.В.	Stokes, Ruth Wyckliffe	1891–1968
Стоун, Джон Ричард Николас (Сэр)	Stone, John Richard Nicholas (Sir)	1913–1991
Струмилин (Струмилло-Петрашкевич), Станислав Густавович		1877–1974
Схрейвер, Александр (Лекс)	Schrijver, Alexander (Lex)	1948 г.р.
Таккер, Альберт Уильям	Tucker, Albert William	1905–1995
Тарасов, Сергей Павлович		
Тартаковский, Владимир Абрамович	Tartakovsky, Vladimir Abramovich	1900–1972
Тет, Петер Г.	Tait, Peter Guthrie	1831 г.р.
Тихомиров, Владимир Михайлович	Tikhomirov, Vladimir Mikhailovich	1934 г. р.
Тхапа, Мукунд Н.	Thapa, Mukund Narain-Dhami	1954 г.р.
Тьюки, Джон Уайлдер	Tukey, John Wilder	1915–2000
Фаддеев, Дмитрий Константинович	Faddeev, D.K.	1907–1989
Фалкерсон, Делберт Рей	Fulkerson, Delbert Ray	1924–1976
Фан (Фань), Ки	Fan, Ky	1914–2010
Фаркаш, Дьюла (Джулиус)	Farkas, Gyula (Julius)	1847–1930
Федоренко, Николай Прокофьевич		1963–1985
Фельдман, Григорий Александрович		1884–1958
Фенхель, Мориц Вернер	Fenchel, Moritz Werner	1905–1988
Фет, Яков Ильич	Fet, Yakov	1930 г.р.
Фихтенгольц, Григорий Михайлович		1888–1959
Флуд, Меррилл Микс	Flood, Merrill Meeks	1908–1991

Форд, Джеральд Рудольф (38-й президент США)	Ford, Gerald Rudolph Jr.	1913–2006
Фриш, Рагнар Антон Киттиль	Frisch, Ragnar Anton Kittil	1895–1973
Фройденталь, Ганс	Freudenthal, Hans	1905–1990
Фудзивара, Мацусабуро	Fujiwara, Matsusaburo	1881–1946
Фуртвенглер, Филипп	Furtwängler, Friederich Pius Philipp	1869–1940
Фурье, Жан Батист Жозеф	Fourier, Jean Baptiste Joseph	1768–1830
Хаар, Альфред	Haar, Alfréd	1885–1933
Халкин, Г.	Halkin, H.	
Хан, Ханс (Ганс)	Hahn, Hans	1879–1934
Харрис, Теодор Эдвард	Harris, Theodore Edward "Ted"	1919–2005
Хаусдорф, Феликс		1868–1942
Хачиян, Леонид Генрихович		1952–2005
Хестенс, Магнус Р.	Hestenes, Magnus Rudolph	1906–1991
Хикс, сэр Джон Ричард	Hicks, sir John Richard	1904–1989
Хирш,Варрен М.	Hirsch, Warren M.	1918–2007
Хичкок, Фрэнк Л.	Hitchcock, Frank Lauren	1875–1957
Хотеллинг, Гарольд	Hotelling, Harold	1895–1973
Хоффман, Аллан	Hoffman, Alan Jerome	1924 г.р.
Чеботарёв, Николай Григорьевич		1894–1947
Чебышёв, Пафнутий Львович		1821–1894
Чэрнс, Абрахам	Charnes, Abraham	1917–1992
Шаталин, Станислав Сергеевич	Shatalin, Stanislav Sergeevich	1934–1997
Шварц, Лоран-Моиз	Schwartz, Laurent-Moïse	1915–2002
Шёнберг, Якоб Исаак	Schoenberg, Isaac Jacob	1903–1990
Шепли, Ллойд Стауэлл	Shapley, Lloyd Stowell	1923–2016
Шилов, Георгий Евгеньевич		1917–1975
Шифман, Макс		
Шлаух, Х.М.	Schlauch, H.M.	
Шлефли, Людвиг	Schläfli, Ludwig	1814–1895

Шор, Наум Зуселевич	Shor, Naum Zuselevich	1937–2006
Штаудт, Карл Георг Христиан (фон Штаудт)	Staudt, Karl Georg Christian (von Staudt)	1798–1867
Штейнер, Якоб	Steiner, Jakob	1796–1863
Штиглер, Дж. Д.	Stigler, George Joseph	1911–1991
Штимке, Роберт Э.	Stiemke, Robert E.	1915–1979
Штольц, Отто	Stolz, Otto	1842–1905
Эванс, Дуан	Evans, Duane W.	1909–1974
Эдмондс, Джек Р.	Edmonds, Jack R.	1934 г.р.
Эрмит, Шарль	Hermite, Charles	1822–1901
Эрроу, Кеннет Джозеф	Arrow, Kenneth Joseph	1921–2017
Юдин, Давид Борисович		1919–2006
Юнг, Уильям Генри (Янг, Уильям Генри)	Young, William Henry	1863–1942
Юшков, Леонид Павлович		1900 г.р.
Якоби, Карл Густав Якоб	Jacobi, Carl Gustav Jacob	1804–1851
Ямнитский, Борис	Yamnitsky, Boris	

Приложение 2. Некоторые математические сведения

Определение. Вещественное векторное пространство X называется векторной решёткой (ВР), если X является одновременно решёткой, т.е. упорядоченным множеством, в котором для любых двух элементов $x, y \in X$ существует их супремум $x \vee y$ и инфимум $x \wedge y$, причём выполнены следующие условия согласованности алгебраических операций и порядка:

1) $\forall z \in X$ и из $x \leq y$ вытекает $x + z \leq y + z$;
2) если $x \geq 0$ и число $\lambda \geq 0$, то $\lambda \cdot x \geq 0$.

Определение. Множество $X_+ := \{x \in X : x \geq 0\}$ называется конусом положительных элементов ВР X.

Определение. K_σ-пространством (или σ–полной ВР) называется ВР X, в которой всякое счётное ограниченное сверху множество имеет супремум. K-пространством (или полной ВР) называется ВР X, в которой всякое ограниченное сверху множество имеет супремум.

Определение. Норма $\|\cdot\|$ на ВР X монотонна, если из $|x| \le |y|$ следует, что $\|x\| \le \|y\|$.

Определение. Нормированной решёткой (НР) называется ВР, снабжённая монотонной нормой.

Полная по норме НР называется банаховой решёткой (БР).

Если НР (соответственно БР) X является K-пространством, то говорят, что X – нормированное K-пространство (соответственно банахово K-пространство).

Теорема (аналитическая форма теоремы Хана–Банаха). Пусть в вещественном векторном пространстве X задана калибровочная функция p. Пусть f_0 – линейный функционал, заданный на линейном множестве $X_0 \subset X$, такой, что: $f(x) \le p(x)$, $x \in X_0$. Тогда существует линейный функционал f, определённый на всём X, совпадающий с f_0 на X_0 и удовлетворяющий на всём X условию: $f(x) \le p(x)$, $x \in X$.

Определение. Пусть X – векторное и одновременно топологическое пространство. Множество X называется топологическим векторным пространством (ТВП), если алгебраические операции непрерывны в топологии X, то есть:

1) Для любых $x, y \in X$ и окрестности V_{x+y} элемента $(x + y)$ существуют окрестности V_x элемента x и окрестность V_y элемента y, такие что: $V_x + V_y = V_{x+y}$.

2) Для любого $x \in X$, любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и любой окрестности $V_{\lambda \cdot x}$ элемента $(\lambda \cdot x)$ существует окрестность V_x элемента x и число $0 < \delta \in \mathbb{R}$ такие, что для любого μ, для которого справедливо $|\mu - \lambda| < \delta$, будет верно: $\mu \cdot V_x \subset V_{\lambda \cdot x}$.

Теорема (геометрическая форма теоремы Хана–Банаха). Пусть X – ТВП, E – линейное подмножество в X, а $x_0 \in X$. Если U – непустое выпуклое открытое подмножество X, не пересекающееся с $(x_0 + E)$, то в X существует замкнутая гиперплоскость H, содержащая $(x_0 + E)$ и не пересекающаяся с U.

Теорема (об отделимости). Пусть E – выпуклое подмножество с непустой внутренностью E° в ЛВП X, F – непустое выпуклое подмножество X, $E^\circ \cap F = \emptyset$. Тогда E и F отделимы. Если E и F открыты, то они строго отделимы.

Теорема (об отделимости). Если замкнутое E и компактное F – непустые выпуклые непересекающиеся подмножества ЛВП X, то они строго отделимы.

Теорема (о достижении минимума выпуклом функционалом на замкнутом относительно сходимости по мере выпуклом множестве). Полунепрерывный снизу относительно сходимости по мере выпуклый функционал p достигает минимума на всяком замкнутом в $(L^1, \tau(L^1))$, ограниченном по норме выпуклом множестве$V \subset L^1$.

Теорема (Хана–Банаха–Канторовича). Пусть X – произвольное векторное пространство, а Y – K-пространство. Пусть p: $X \to Y$ – отображение, обладающее свойствами калибровочной функции относительно порядка в Y, т.е. $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$; $p(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot p(x)$, $\lambda \geq 0$. Предположим, что X_0 – линейное подмножество в X и что линейный оператор U_0: $X_0 \to Y$ удовлетворяет неравенству $U_0(x) \leq p(x)$ для всех $x \in X_0$. Тогда оператор U_0 может быть распространён на всё пространство X с сохранением линейности и вышеназванного условия, то есть существует линейный оператор U: $X \to Y$, совпадающий с U_0 на X_0 и удовлетворяющий неравенствам

$-p(-x) \leq U(x) \leq p(x)$, $x \in X$.

Определение. Линейные пространства X, Y называются <u>пространствами в двойственности (ПВД)</u>, если существует билинейная форма $\langle x, y\rangle$ со свойствами:

1) $x \in X, \forall y \in Y: \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$;   2) $y \in Y, \forall x \in X: \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow y = 0$.

Определение. Для ПВД X, Y <u>преобразованием Лежандра–Юнга–Фенхеля</u> функции f:$X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется функция $f^*(y) := \sup\limits_{x\in X}\{\langle x, y\rangle - f(x)\}$, где $y \in Y$.

Замечание. Если f – собственная ($\exists \tilde{x}$: $f(\tilde{x}) \neq +\infty$), то $f^*(y) \geq (\langle \tilde{x}, y\rangle - f(\tilde{x})) > -\infty$.

Теорема Моцкина. Ровно одна из систем σ и ее транспонирования σ' разрешима:

$$\sigma: \quad \begin{aligned} &\textstyle\sum_{\nu=1}^{n} a_{j\nu}x_\nu > 0 \ (j = 1, \dots, m_1) \\ &\textstyle\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu \geq 0 \ (i = m_1 + 1, \dots, m_2) \\ &\textstyle\sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu}x_\nu = 0 \ (k = m_2 + 1, \dots, m) \end{aligned}$$

и σ': $\sum_j a_{j\nu}y_j + \sum_i a_{i\nu}y_i + \sum_k a_{k\nu}y_k = 0 \ (\nu = 1, \dots, n), y_j \geq 0, y_i \geq 0, (y_1, y_2 \dots, y_{m_1}) \neq (0,0, \dots, 0)$.

Гордан. НДУ совместности СЛН: $X_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}x_j = 0, i = 1, \dots, s; a_{ik} \in \mathbb{R}$.

Отсутствие положительных решений этой системы равносильно возможности получения с помощью линейных комбинаций X_i уравнения вида: $F = A_1x_1 + \ldots + A_rx_r = 0$, $A_i > 0\ \forall i$.

Теорема Дилворта. Частично упорядоченные множества удобно представлять в виде бесконтурных ориентированных графов, ставя в соответствие элементам множества вершины графов, а отношение частичного порядка между двумя элементами изображать посредством дуги, связывающей соответствующие вершины. Дилворт доказал

Теорему: Минимальное число непересекающихся цепей, которыми можно покрыть конечное частично упорядоченное множество, равно максимальному числу попарно несравнимых элементов этого множества.

Задача Фрица Джона. Ф. Джон рассмотрел задачу: $R \subset \mathbb{R}^n$, $F(x)$: $R \to \mathbb{R}$, G: $R \times S$, $R' = \{x \in R: G(x, y) \geq 0, \forall$параметра $y \in S \subset H\} \subset R$. Ищем $x^0 \in R'$: $M = F(x^0) = \min_{x \in R'} F(x)$.
И при дополнительных условиях непрерывности и дифференцируемости доказал:
Если x^0 – внутренняя точка R, $x^0 \in R'$, $F(x^0) = \min_{x \in R'} F(x)$,
то $\exists \{y_1, \ldots, y_s\} \subset S$ и $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s\} \neq 0$:
$G(x^0, y^r) = 0$ для $r = 1, \ldots, s$, $\lambda_0 \geq 0$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_s > 0$, $0 \leq s \leq n$;
частные производные $\varphi(x) = \lambda_0 F(x) - \sum_{1 \leq r \leq s} \lambda_r G(x, y^r)$ равны 0 в x^0:
$\varphi_i(x^0) = 0$ для $i = 1, \ldots, n$.

Приложение 3. Минимум положительно определенных квадратичных форм

Важной частью теории КФ была теория приведения, занимающаяся вопросом отыскания в классе эквивалентных ПОКФ формы с наименьшими коэффициентами (называемой приведенной формой). Старший коэффициент в ней равен минимуму КФ, когда переменные – целые и не одновременно нулевые. Отсюда видна принципиальная важность проблемы минимума, являющейся задачей ТЧ.

Приложение 4. Теорема Каруша–Куна–Таккера

X – линейное пространство, A – выпуклое множество, $A \subset X, \hat{x} \in A$,
f_i – выпуклые функции, $f_i: X \to \mathbb{R}$, для $i = 0, \ldots, m$.
Задача: $f_0(x) \to \min, f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m, x \in A$. (*)
1) Если $\hat{x}$ – решение задачи (*), то $\exists \hat{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \neq 0$, такое что для $L(x, \hat{\lambda}) \coloneqq \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ верно:
а) $\min_{x \in A} L(x, \hat{\lambda}) = L(\hat{x}, \hat{\lambda})$;

b) условие неотрицательности: $\lambda_i \geq 0$, для $i = 0, ..., m$;

c) условие дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$, для $i = 1, ..., m$;

2) если $\lambda_0 > 0$ и выполнены (a), (b), (c), то $\hat{x}$ – решение задачи (*);

3) если $\hat{x}$ – решение задачи (*), $\hat{\lambda}$ удовлетворяет (a), (b), (c) и $\exists x \in A$: $f_i(x) < 0$ для $i = 1, ..., m$ (условие Слейтора), то $\lambda_0 > 0$.

Приложение 5. Двойственность в выпуклом программировании

Пусть (X, X') – ПВД с $\langle x, x' \rangle_1$, (Y, Y') – ПВД с $\langle y, y' \rangle_2$,
$(X \times Y, X' \times Y')$ – ПВД с $\langle (x, y), (x', y') \rangle \coloneqq \langle x, x' \rangle_1 + \langle y, y' \rangle_2$.
$f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, f(x) \to \inf$; $F: X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, F(x, 0) \coloneqq f(x)$.
Если мы фиксируем $y \in Y$, то получим задачу**,** называемую *исходной*:
$$F(x, y) \to \inf_{x \in X} \qquad (\#)$$
$S(y) \coloneqq \inf\limits_{x \in X} F(x, y), S: Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$; если $\nexists$ допустимых x, то $S(y) := +\infty$.
Тогда $S^*(y^*) \stackrel{\text{def}}{=} F^*(0, y^*)$ и $S^{**}(0) = \sup\limits_{y^* \in Y'} \left(-F^*(0, y^*)\right)$.
Двойственной к задаче (#) называют задачу: $-F^*(0, y^*) \to \sup$.

Доказано, что S – собственная, выпуклая, замкнутая. Тогда по теореме Фенхеля–Марро: $S^{**} \equiv S$ – *значения функционалов исходной и двойственной задач на их оптимальных решениях совпадают*.

Предыдущая задача, в частности, при $Y \equiv \mathbb{R}^m$ может иметь вид:
$$f_0(x) \to \inf; f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m. \qquad (\#\#)$$
$$F(x, y) \coloneqq \begin{cases} f_0(x), \text{если } f_i(x) \leq y_i, i = 1, \dots, m; \\ +\infty, \text{в противном случае.} \end{cases}$$
Модифицировав f_i, можно (##) переписать так: $f_0(x) \to \inf; f_i(x) \leq y_i, i = 1, \dots, m$.
Если $f_i(x)$ – не произвольные выпуклые функции, а линейны, то придём к ЗЛП.

Приложение 6. Задача линейного программирования

Пусть есть задача: $\langle c, x \rangle \to \inf_x$, $Ax \geq b$, $x \geq 0$, где $S(y)$ см. в Приложении 4,
$$x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n, A \in M_{m \times n}, F(x, y) \coloneqq \begin{cases} \langle c, x \rangle, \text{если } -A \cdot x \leq -b + y, x \geq 0; \\ +\infty, \text{в противном случае.} \end{cases}$$
Тогда: $F^*(0, y^*) \coloneqq \begin{cases} \langle b, y^* \rangle, \text{если } c + A^T \cdot y^* \geq 0, y^* \leq 0; \\ +\infty, \text{в противном случае.} \end{cases}$

и двойственная задача имеет вид:

$-F^*(0, y^*) \to \sup$, где $\lambda := -y^*$ и $F^*(0, y^*) := \begin{cases} -\langle b, \lambda\rangle, \text{если } c - A^T \cdot \lambda \geq 0, \lambda \geq 0; \\ +\infty, \text{в противном случае.} \end{cases}$

Это означает задачу: $\langle b, \lambda\rangle \to \sup_\lambda, A^T \cdot \lambda \leq c, \lambda \geq 0.$

Так как было доказано, что $S^{**}(0) \equiv S(0)$, то: $\sup\limits_{\lambda\geq 0, A^T\lambda\leq c} \langle b, \lambda\rangle = \inf\limits_{x\geq 0, Ax\geq b} \langle c, x\rangle$.

Приложение 7. Принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств

X, Y – банаховы пространства, $\tilde{x} \in U = \mathrm{int}U \subset X$,

f_i: $U \to \mathbb{R}$, для $i = 1, \ldots, m$; f_i дифференцируемы по Гато, для $i = 1, \ldots, m$.

$(f_i')_G$ – непрерывна в $\tilde{x}, f_i'(\tilde{x}) := x_i^*$.

$E := \{x \in U\colon f_i(x) \leq 0\}$, для $i = 1, \ldots, m$.

$\left.\begin{matrix} f_0\colon E \to \mathbb{R} \\ F\colon E \to Y \end{matrix}\right\}$ – непрерывные на E и непрерывно дифференцируемые по Гато на int$E$,

$\exists \lim_{x\to\tilde{x}, x\in \mathrm{int}\, E} (f_0)'_G(x) =: x_0^* \in X^*$.

$\exists \lim_{x\to\tilde{x}, x\in \mathrm{int}\, E} F'_G(x) =: \Lambda$ – линейный оператор из X в Y, $\Lambda(X)$ – замкнуто.

Задача: $\begin{cases} f_0(x) \to \min \\ f_i(x) \leq 0 \quad \text{для } i = 1, \ldots, m \quad (*) \\ F(x) = 0 \end{cases}$

Пусть $\tilde{x}$ – локальный минимум в (*), тогда $\exists \begin{cases} \hat{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m), \lambda_i \in \mathbb{R} \\ y^* \in Y^* \\ (\hat{\lambda}, y^*) \neq 0 \end{cases}$, такие что:

a) $\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0$;

b) условие не отрицательности: $\lambda_i \geq 0$ для $i = 0, \ldots, m$;

c) условие дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\tilde{x}) = 0$, для $i = 1, \ldots, m$.

Если к тому же f_0, F определены на U, то для $L(x, \hat{\lambda}) := \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$ верно условие стационарности: $L'_x(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\tilde{x}) + \left(F'(\tilde{x})\right)^* y^* = 0$.

Приложение 8. Развитие идей Хачияна

После своей знаменитой статьи [139] Хачиян написал множество замечательных работ на разные темы, однако, к сожалению, его жизнь не была долгой, он очень рано умер. Кратко перечислим некоторые направления его последовавших исследований (см. подробно в [164]). Хачиян понял, что его метод может быть применен ко многим другим вопросам.

Идеи из [139] касались оценки размера решения, рассмотрения рациональных или целочисленных решений и использования геометрических идей в комбинаторике и оптимизации. Они появлялись во многих последующих его работах. Хачиян распространил полиномиальный алгоритм на выпуклое квадратическое программирование с М.К. Козловым и С.П. Тарасовым [86], рассмотрел размер решений и сложность решения выпуклых задач полиномиального программирования как с непрерывными, так и с целочисленными переменными. В [292] он обобщил хорошо известный результат Х. Ленстра (получившего в 1983 г. полиномиальный алгоритм для задач целочисленного программирования с фиксированным числом переменных), показав существование полиномиального алгоритма нахождения точного решения задачи выпуклого полиномиального программирования с действительнозначными и/или целочисленными переменными, если степень и число переменных зафиксированы.

В [372] представлен вариант метода отсечения, где последовательность описанных эллипсоидов заменена последовательностью вписанных, что позволило понизить сложность приближенного решения задачи выпуклой минимизации в n раз (размерность задачи) и получить оптимальную сложность наихудшего случая.

Приложение 9. Экономическая интерпретация линейного программирования

ЛП и математические модели в экономике имеют давнее и глубокое взаимопроникающее влияние. Родившись в процессе исследования и поиска решения задач, выдвинутых экономикой, они нашли огромное множество свих применений в различных ее областях. Среди них необходимо отметить и построение теоретических моделей, описывающих общее развитие экономики и состояния ее равновесия.

Экономическая интерпретация общей ЗЛП. Процесс характеризуют векторы: $x \in X$ – результаты и $y \in Y$ – затраты, где X и Y – линейные пространства. Дано множество реализуемых процессов T. Каждому $t \in T$ соответствуют результат и затраты (x_t, y_t).
$M = \{(x_t, y_t): t \in T\}$ полагают выпуклым. Точка (x_0, y_0) – экстремальна, если выходящий из нее конус (таких элементов, что $x > 0, y < 0$) не пересекается с M, что экономически значит, что нет процесса с большими результатами $x \geq x_0$ и меньшими затратами $y \leq y_0$.

Каждому такому (x_0, y_0) отвечает некоторый линейный функционал с экстремумом в (x_0, y_0). Геометрически это – опорная гиперплоскость, отделяющая точку (x_0, y_0) от внутренних. Если записать какое-нибудь её нормированное уравнение, то каждой точке (x, y) будут соответствовать некоторые числа (ξ, η), $\xi \cdot x + \eta \cdot y = 0$. То есть, любой экстремальной точке (x_0, y_0) соответствуют двойственный ей набор чисел (ξ_0, η_0). Эти числа можно интерпретировать как оценки отдельных координат в X и Y. Данные оценки вполне характеризуют экстремальные состояния: каждому виду результатов и затрат соответствует своя оценка. Если для рассматриваемого процесса есть такой набор оценок, то процесс экстремален (его нельзя улучшить).

Если же мы ищем оценки для какого-то процесса, а их нет, то можно указать направление сдвига к внутренним точкам, чтобы прийти к более хорошему состоянию и, так постепенно найти решение.

Если $t \to (x_t, y_t)$ линейно, эта общая задачи имеет такие важных частные случаи:

1) *Основная производственная задача* – поиск экстремального состояния при заданных ресурсах и ассортименте конечной продукции – определение крайней точки на исходящем из поверхности данных ресурсов луче.

2) *Основная ЗЛП* – поиск способа выполнения данного задания с наименьшими затратами ресурсов в векторной форме или в виде их линейной комбинации.

Эти две задачи математически формулируются так: даны $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ – технологии (производственные процессы), определяющие способы использования ресурсов; $b \in \mathbb{R}^m$ – ресурсы (ограничения); $c \in \mathbb{R}^n$ – внешние (рыночные) цены. Надо найти $x \in \mathbb{R}^n$ – оптимальное распределение ресурсов по процессам.

Имеем <u>прямую задачу (распределительную)</u>: $\begin{cases} x \geq 0 \\ Ax \leq b \\ \langle c, x\rangle \to \max_x \end{cases}$, где $c \cdot x$ – выпуск (доход).

К ней формулируется <u>двойственная задача (экономическая)</u>:

$\begin{cases} p \geq 0 \\ A^T p \geq c \\ \langle b, p\rangle \to \min_p \end{cases}$, где p – внутренние цены, а $b \cdot p$ – затраты (издержки).

Решение двойственной задачи – внутренние цены (суть цены оптимального плана). Можно доказать, что для решений этих задач (x^* и p^*, соответственно) значения целевых функционалов совпадают: $cx^* = bp^*$. Это равенство имеет большое экономическое значение. Можно показать, что в точке оптимума выполнено условие рентабельности (что гарантирует максимальную эффективность использования ресурсов): если ресурс i в избытке ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* < b_i$), то ограничение несущественно, и оптимальная цена ресурса равна нулю ($p_i^* = 0$), аналогично если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i^* > c_j$, то $x_j^* = 0$. Так как p – цены ресурсов, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i^*$ – затраты j-го процесса, c_j – прибыль от реализации единицы соответствующего продукта. То есть, если j-й процесс невыгоден при оптимальных ценах ресурсов, то он не используется.

Уравнения Вальраса и их обобщения. Большую роль в изучении экономики играют математические модели, связанные с классическими уравнениями Вальраса [387]. Они, когда даны матрица $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, вектор-столбец $b \in \mathbb{R}^m$ и функция f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ могут быть записаны, следуя [170], так: $Ax = b$; $yA = z$; $x = f(z)$. Решение данной системы имеет изложенную ниже интерпретацию. Имеются m типов ресурсов и n типов продукции. Каждая компонента b_i вектора b отражает количество наличного ресурса i, элемент матрицы a_{ij} обозначает количество ресурса типа i, которое необходимо затратить для того, чтобы создать единицу продукции типа j, j-ая компонента вектора неизвестных x соответствует производству j-го типа продукции. Из этого следует, что система уравнений $b = Ax$ выражает тот факт, что весь имеющийся в наличии объем ресурсов в полной мере расходуется в процессе производственной деятельности. Положим теперь, что i-ая комнонента вектора y обозначает цену (которая является неизвестной) единицы ресурса типа i, а j-ая компонента в векторе z обозначает цену (которая также является неизвестной) единицы продукции типа j. В таком случае система уравнений $yA = z$ говорит, что цена продукции складывается из цен необходимых составляющих для ее производства. Что касается функции f, то она описывает, каким образом спрос на продукт регулируется его ценой. Если рассматривается модель, в которой, напротив, цены являются функцией спроса, то в последнем случае берут обратную зависимость.

Можно заметить, что общее число уравнений равно общему числу неизвестных, которых всего $m + 2n$. Исходя из этого, есть основания надеяться, что, решив эту систему, удастся найти x, y, z. По Вальрасу, решение данной системы описывает ситуацию экономического равновесия.

Тем не менее, в большом количестве ситуаций выходит так, что эта система или вообще не имеет решения (такая ситуация имеет место, например, когда $m > n$ и система $Ax = b$ переопределена), или решение существует, однако оказывается малосодержательным с точки зрения экономической интерпретации в силу того, что часть переменных оказываются отрицательными. В результате поиска выхода из такой ситуации, описанную выше модель доработали таким образом ([391], [358]): $Ax \le b$; $yA = z$; $x, y, z \ge 0$; $x = f(y, z)$; $y(b - Ax) = 0$. Тогда модель допускает ситуацию, в которой количества части типов ресурсов могут превосходить количества, необходимые для производства. Что же касается появившегося условия $y(b - Ax) = 0$, то оно отвечает за то, что в случае, когда ресурса типа i имеется больше, чем надо для производства, то цена на него y_i равна 0 (это – условие вида дополняющей нежесткости). Исследование её разрешимости см. в [384], [385], [386].

Рассмотренная модель может быть обобщена ([226]):
$Ax \le w$; $yA \ge z$; $x, y, z, w \ge 0$; $x = f(y, z)$; $w = g(y, z)$; $y(w - Ax) = 0$; $(yA - z)x = 0$.
В данной модели A, f, g считаются заданными, а x, y, z, w – неизвестными и требующими определения. Как видно, теперь количество всех типов товаров является функцией от цен и, следовательно, его необходимо находить. В дополнение к этому, допускается ситуация, когда цена на любой тип продукции становится меньше суммарной стоимости необходимых для его изготовления составляющих ($yA \ge z$). Если складывается такая ситуация, то соответствующий тип продукции не производится, о чем говорит условие $(yA - z)\, x = 0$ (см. [113] и [312] относительно связи последней модели, ЛП и теорем о неподвижной точке).

Фон Нейман и модель роста. Еще одна бесспорно заслуживающая внимания модель (см. 5.2), которая была выдвинута фон Нейманом в работе [341], описывает расширяющуюся экономику. Она тоже ведет к линейным неравенствам, и в ней также проявляются двойственность (цен и интенсивностей производства) и условие дополняющей нежесткости.

Фон Нейман доказал, что для двух произвольных данных неотрицательных ($m \times n$)-матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, где у A нет нулевых столбцов, всегда имеет место разрешимость такой системы (где x, y, g, d – переменные):
$gAx \le Bx$; $dyA \ge yB$; $y(Bx - gAx) = 0$; $(dyA - yB)x = 0$; $x, y, g, d \ge 0$; $x \ne 0$; $y \ne 0$. (П1)
А также в случае, когда $A + B > 0$, переменные g и d находятся однозначно и $g = d$.

Данная модель интерпретируется следующим образом: индексы строк i связываются с «товарами», а индексы j – с «процессами». Процесс с номером j может сделать за единицу времени (производственный период, например год) из вектора товаров $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$ вектор товаров $(b_{1j}, \ldots, b_{mj})^T$. То есть, процессы употребляют товары в качестве входных ресурсов и создают товары в качестве продукции. j-ая компонента вектора x показывает «интенсивность» использования производственного процесса j, i-ая компонента вектора y – цену единицы товара i. Величина d обозначает коэффициент ренты на капитал (по определению она равна $1 + z/100$, где z обозначает процентную ставку). То есть неравенство $dyA \geq yB$ требует, чтобы не было процессов j, в которых общая стоимость всех произведенных к концу производственного периода товаров была выше (с учетом годовых процентов) общей стоимости всех товаров, необходимых для производства в начале производственного периода.

В дополнение к этому, если последнее неравенство является строгим, то условие $(dyA – yB)x = 0$ требует равенства нулю интенсивности j-ого процесса.Число g обозначает темпы роста, то есть число, на которое умножаются интенсивности всех процессов от одного производственного периода к следующему. Неравенство $gAx \leq Bx$ означает отсутствие убывания количества каждого типа товаров от одного производственного периода к следующему. Кроме того, уравнение $y(gAx – Bx) = 0$ показывает равенство нулю цены на i-ый товар в ситуации, когда он имеется в избыточном количестве.

Фон Нейман доказал, что система (П1) разрешима, и показал, что в данной модели всегда существует состояние равновесия, в котором темп роста и коэффициент ренты равны между собой: $g = d$.

На самом деле при положительной матрице $A + B$ можно показать, что результат, полученный Нейманом, равносилен следующему тождеству:
$\min \{d \mid \exists\ y \neq 0 \mid y \geq 0,\ dyA \geq yB\} = \max \{g \mid \exists\ x \neq 0 \mid x \geq 0,\ gAx \leq Bx\}$. Иными словами, можно сказать, что минимальный коэффициент ренты равен максимальному темпу роста. Таким образом, можно говорить о том, что утверждения, доказанные фон Нейманом включают в себя ТД для задач ЛП с положительными коэффициентами.

Транспортные задачи: Канторович, Хичкок, Купманс. ТЗ можно назвать одной из первых проблем, относящихся к ИО. Также справедливо будет сказать, что на пути поиска решения данных проблем в работах Канторовича, Хичкока и Купманса появлялось ЛП, развивался и обогащался его аппарат.

Канторович предложил сходный с двойственным СМ путь решения ТЗ (см. 2.3, 3.4). Способ, предложенный в работах Канторовича, основывается на нахождении двойственных переменных, которые сам автор называет РМ, и последующем отыскании решения прямой задачи. В случае, когда данное решение оказывается недопустимым, двойственное решение изменяется специально определенным образом. В дополнение к вышесказанному, Канторович показал значение РМ для исследования чувствительности решения, а также продемонстрировал путь, посредством которого можно показать оптимальность допустимого решения прямой задачи через установление оптимальных значений для двойственных переменных. В сущности, он на самом деле представил способ решения общих ЗЛП (см. подстрочное замечание 2 в [306]).

В своей работе 1941 г. Хичкок [272] исследовал проблему $\sum_{i,j} x_{ij} d_{ij} \to \min_{x_{ij}}$ при $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = c_j, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = f_i, \sum c_j = \sum f_i, x_{ij} \geq 0; i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}; m, n, r_i, c_j, d_{ij} \in \mathbb{N}$. Ему удалось доказать достижение минимума в вершине допустимой области, а также представить путь для решения этой проблемы, который во многом схож (в том числе и преобразованиями на итерациях «ввод и вывод базисных переменных») с (прямым) СМ.

В 1948 г. Купманс изложил в своей работе «задачи трансперевозок» их интерпретацию и суть описываемых ими вопросов, а также представил метод «локального поиска» для получения оптимального решения такого рода задач, утверждая, что он приводит к оптимуму. Более подробно эти вопросы разобраны и прокомментированы Купмансом ([307], [308]), Чанесом и Купером [171], и Вайдом [113].

Можно сказать, что исследование проблем, связанных с ТЗ, стало отправной точкой и сыграло тем самым большую роль в качестве предварительного этапа перед открытием в 1940-х гг. в трудах Данцига, Канторовича, Купманса и фон Неймана новой области математики – ЛП.

Приложение 10. Интервью, взятое Андриановым у академика А.Г. Аганбегяна

Интервью было взято 17 марта 2015 г.

Абел Гёзевич Аганбегян – советский и российский учёный-экономист, доктор экономических наук, академик АН СССР, ректор Академии народного хозяйства при Правительстве РФ. Почётный член Венгерской АН, иностранный член Болгарской АН, член-корреспондент Британской академии, почётный профессор Санкт-Петербургского университета управления и экономики. Награждён медалью им. Леонтьева (2004). Закончил заочно московский механика-математический факультет, переехал в Сибирь в Новосибирск.

А.Л. Андрианов: Был ли обмен информацией (между западными учеными и учеными в СССР) или на Западе делали совсем независимо, не зная о Канторовиче?

А.Г. Аганбегян: На Западе делали совершенно независимо, ничего не подозревая. Я был заместитель директора ЯССА (международный институт системного анализа под Веной), поэтому имел полномочия и очень много сделал, чтобы Леонид Витальевич туда ездил и общался, продвигал свои идеи: туда приезжали разные ученые, в том числе Данциг, где я с ним познакомился и хорошо узнал: очень честный, хороший, добропорядочный человек. Я познакомил Данцига с Канторовичем. Данциг совершенно самостоятельно написал свою книгу, ничего не зная о Канторовиче, а потом, когда он эту книгу написал и писал предисловие уже на заключительной стадии подготовки книги, кто-то ему сказал: посмотри, какие-то близкие работы есть в Санкт-Петербурге, и тогда он познакомился с работами Канторовича. У Канторовича была брошюра, если помните в Санкт-Петербурге, до его основной книги. Вот он познакомился с этой брошюрой 1939 года, «Организация производства…» (*пояснение А.Л. Андрианова: [39]*). С докладом в своем предисловии, если Вы читали Данцига, он, как честный человек – что очень бывает редко – полностью признал приоритет Канторовича: прямо написал, что «Я это делал самостоятельно, но потом вот мне сказали, я познакомился и убедился, что это всё было: основная знаменитая теорема двойственности была доказана Канторовичем в 1939». Причем американцы шли совершенно другим путем. Чем гении отличаются от не гениев. Ведь общая ЗЛП – это какая-то вершина, а можно придумать методы гораздо более простые: для транспортной задачи (самая простая – это транспортная задача). За ней идет задача загрузки – довольно легкая. Потом – задача диеты или раскроя. Потом задача специализации. И только потом – более общая, когда вообще всё можно делать. Транспортная задача, Загрузка, Диета, Раскрой, Специализации, Общая задача линейного программирования – так идет естественное развитие, и таким путем прошли на Западе. Так вот Канторович взял и для частного случая сразу решил общую задачу и доказал теорему двойственности – в этом одно из проявлений его гениальности. Американцы к этому шли с 1944–45.

История этого вопроса в Америке. В Америке в войну зародилось движение, которое стало называться системный анализ (тогда называлось исследование операций). История исследования операций такова. Накануне открытия второго фронта американский флот был задействован в перевозке груза в Англию, а в Атлантическом океане преобладали немецкие подводные лодки, и они топили эти суда. Часть груза и американские суда пропадали. Американцы пытались придумать методы, чтобы минимизировать потери. Они пускали суда под усиленной охраной, но тогда немцы просто стягивали много подводных лодок и становилось еще хуже. Или одинокие суда пускали вокруг по непроторенным дорогам, чтобы их не могли поймать. Разные способы, но результат был плачевный: они теряли много грузов. Тогда, якобы, разгневанный президент (это миф: так это было или не так – сейчас не выяснишь) сказал: «Раз вы, военные, не можете что-нибудь придумать – пригласите ученых, создайте группу: всё-таки у них совсем другой ум, они подойдут аналитически и что-нибудь предложат». И была создана первая группа ИО во главе с Ф.М. Морзом и Дж.Е**.** Кимбеллом. Один – знаменитый физик, один – химик. Есть их книга, Морза и Кимбелла «Исследование операций» (*пояснение А.Л. Андрианова: [Морз Ф.М., Кимбелл Дж.Е. Методы исследования операций / Пер. с англ. И.А. Полетаева и К.Н. Трофимова под ред. А.Ф. Горохова. – М.: Советское радио, 1956. – 308 с.] – перевод [Morse, P.M., Kimball G.E. Methods of Operations Research. – Cambridge, MA: Technology Press of MIT / New York: John Wiley & Sons, 1951. – 158 p.]*) – библиографическая редкость, наверное (издана в послевоенный период), где описано следующее. Как всякие ученые, раз ставится задача, они попытались сформулировать сначала ее, понять, что хочется. Однако, как правило, люди, которые формулируют задачу, не знают точно, количественно, что хотят (так было и в этой ситуации: политики и военные сами не знали количественно, чего хотят, так что пришлось формулировать задачу поэтапно в режиме диалога).

Военные говорят: «Мы хотим, чтобы наши суда не топили», а им отвечают: «Это – невозможно». – «Ну мы хотим, чтобы их меньше топили». – «Пожалуйста, надо меньше посылать груза – меньше будут топить». – «Нет, мы хотим, чтобы процент потопления был меньше». – То есть потихоньку... – «А если вот там уничтожить подводную лодку, то она эквивалентна какому количеству груза?» – А никто, естественно, на эту тему не думал. В общем, сформулировали целевую функцию определенным образом. Понятно, что она достаточно сложная, потому что можно и потопить и так далее. В своей книге они приводят эту функцию, естественно.

Второй этап – это подбор данных. Они стали искать. Выясняется, военные никакими данными не располагают: никто систему данных не собирал. Они интуитивно знают, как это бывает: если судно одно идет транспортное, – лодка всплывает и пушкой уничтожает: лодка экономит торпеды. Лодка может иметь, скажем, 8 торпед – и всё. И, если несколько торпед в цель не попадет, она остается без торпед – безоружна – должна из Атлантики возвращаться в Германию за новыми, а значит она надолго выбывает из боевых действий, и потенциал резко сокращается. Поэтому лодка торпеды бережет для военных судов, когда она не может всплыть. Грубо говоря, обычно, если судно вооружено, лодка сначала пускает торпеду. Судно начинает гореть, а потом она пытается добить его из пушки. Если судно не вооружено, она уничтожает его не торпедой, а пушкой. Морз и Кимпбелл задавали всякие глупые, с точки зрения военных, вопросы: «А как часто вы замечали перископ лодки до того, как она начинала атаку?» – «Чёрт, да кто это считал?! Как часто? Понимаешь… Кого это интересует?!» – Но они в общем провели очень серьезно работу, опросы всякие, и в общем какие-то данные для себя установили. Разработали модель, посчитали и предложили свой метод. Очень грубо, смысл метода – надо торговые суда оснастить обычной пушкой, такой же, как имеет подлодка, даже помощнее. Затем в районах опасных, где действуют подводки, иметь несколько наблюдателей, которые следят за морем, и заметят перископ. Пытаться. И если замечен перископ – начать по нему стрелять из пушки. Ну военные, естественно рассмеялись – это смех и грех: ну как это стрелять по перископу – толку, конечно, не будет: не попадешь и, конечно, подводку так нельзя уничтожить. Но они и не хотели ее уничтожать: задача ведь не уничтожение лодок, а провоз груза! Видя, что это судно вооружено – оно внешне торговое, а на самом деле у него орудия, – подводка не может всплыть, не может приблизиться и начинает нервничать, потому что по перископу ведется прицельный огонь. И она пускает торпеду. Торпеды были тихоходные, а расстояние большое – так как подлодка не подходит и пускает торпеду издалека. Поэтому судно может уклониться (с достаточно большой вероятностью), тем более раз оно наблюдает, – видно же. Есть шансы и не всякая торпеда достигает цели – есть вероятность, с которой она попадает, с какого расстояния. Это всё просчитывается. И мощь этих подводных лодок в разы сокращается. И они стали провозить намного больше груза.

По опыту этой первой группы ИО такие же стали появляться при всяких армиях: приглашали ученых, и те стали решать разные задачи – в том числе, современным языком – задачу по логистике. Вот транспортная задача им попалась, и они нашли метод решения транспортной задачи. Где-то в 40-х гг. еще. Купманс вообще к делу отношения не имел – он был организатором конференций – он сам ЛП не занимался серьезно. Он – специалист по странной области (по той же, что и Макаров Валерий Леонидович – любимый ученик ЛВК, директор ЦЭМИ, д.ф.-м.н., окончил МГЭИ - Московский Государственный Экономический Институт, член президиума АН) – упрощенные модели экономики, где нет потребления – саморазвитие: прирост и появившиеся средства вкладываешь опять в развитие. Если цикл бесконечно повторять, получаются золотые траектории: все время выходишь на какие-то траектории, которые асимптотически к чему-то приближаются. Анализируются эти траектории упрощенных моделей – одно-продуктовых: там нет никаких продуктов выбывающих (что резко усложняет: если потребление в этом году одно, в другом – другое). Так развиваешься только за счет накоплений, причем это накопление в разные годы дает разный эффект – это зависит от того, что ты строишь: одно дело – строишь дороги, другое дело – вкладываешь в оборудование предприятия.

Вообще, ЛП исторически в экономике предшествует межотраслевой баланс – первый такой прорыв в применении математики в экономике не эконометрический. Эконометрика – использование математической статистики – всегда было исторически, а другие математические методы не использовались в экономике – моделей не было таких, кроме простых статистических (типа корреляции). А тут прорыв сделал Василий Васильевич Леонтьев (выходец из СССР), опубликовавший книгу «Структура Американской экономики» (*пояснение А.Л. Андрианова: [Leontief W. W. The Structure of American Economy, 1919–1929, Cambridge, Harvard University Press, 1941.]*), где он впервые применил межотраслевой баланс. Это обратная матрица, и элементы обратной матрицы имеют четкий экономический смысл: если затраты прямые – обычные коэффициенты – с которыми он связан. Скажем электроэнергия идет на производство стали. Сколько электроэнергии идет на тонну стали – это коэффициент прямой. А обратная матрица – коэффициент затрат электроэнергии полный, потому что электроэнергия на производство стали идет не только прямо, но она идет через чугун (на чугун тоже затрачивается электроэнергия, а на сталь – чугун), электроэнергия затрачивается на добычу железной руды (а железная руда идет на чугун), угля, коксование (а кокс идет, чтобы сделать чугун) и так далее. И затраты электроэнергии на тонну стали, к примеру, утраиваются.

И элементы обратной матрицы обрели экономический смысл. И в ЛП тоже образуются коэффициенты, которые характеризуют полные затраты (или их называют замыкающие затраты, теневые цены… – зависит от содержания задачи). Объективно обусловлены оценки, как Канторович называл, или коэффициенты, РМ – он по-разному называл. Эти, как обратные коэффициенты (коэффициенты A^{-1}): характеризуют полные затраты. Здесь прослеживается глубокая связь между межотраслевым балансом и ЛП с экономической точки зрения. Американцы постепенно от транспортной задачи перешли к распределительной (знаменитая фанерная задача, которую решал Канторович, – типа распределительной задачи) и нашли ее решение, а Данциг сделал обобщение. На это в США ушло лет восемь. (Канторовичу же удалось сделал это в своей первой работе).

Я считаю его своим учителем. Он не был ни моим научным руководителем никогда – он оппонент был у меня по докторской защите («Системы оптимального моделирования соединения отраслевых и народнохозяйственных моделей»). У меня докторская была связана с построением системы оптимизационных моделей: я пытался соединить отраслевые модели с народно-хозяйственными в систему. Но все-равно все мои работы по оптимизации – они навеяны его работами. Ведь учитель – не тот, который тобой прямо руководит. Если ты фактически развиваешь какие-то стороны его мысли, то твой учитель будет тот, чьи мысли ты развиваешь. Он всегда категорически возражал, когда я говорил, что он – учитель. Он говорил: «Какой учитель? – Мы с тобой партнеры, у нас совместный семинар!». Мы с ним вели в сибирском отделении семинар по оптимизации в моей лаборатории. Я был директор ЛЭМИ (лаборатории экономико-математических исследований) в Институте экономики и организации промышленного производства, когда он приехал – это было с 61-го по 66-й год, – а он был заведующий математико-экономическим отделом института математики и заместитель директора Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения АН (Соболева Сергея Львовича) и друг его очень близкий. И у нас был совместный семинар, мы очень тесно связаны были: Макарова я же в академики рекомендовал, и я был оппонент сначала его кандидатской, потом – докторской. И так далее – то есть мы были очень тесно связаны все и до сих пор дружим.

Канторович не просто разработал и доказал теорему двойственности – он осознал ее значимость для экономики. И будучи математиком, абстрактным ученым – он занимался очень абстрактными областями – не прикладными, он не специалист по прикладным в математике вначале был. И он обогатил многие разделы в математике – чем только он не занимался. Но, он сразу осознал значимость и стал подбирать учеников: у него один занимался транспортными задачами, один занимался раскроем. У его учеников есть отдельные книги по раскрою. С М.К. Гавуриным – по транспортной задаче. И много всяких конкретных задач. Он пытался применить математические наработки, их идентифицировать в экономических терминах. Занялся ценообразованием. Всё время что-то придумывал. Макаров ему в этом очень помогал.

ЛП положило начало огромному направлению в математике: вообще оптимальному программированию в широком смысле слова, стохастическому программированию. Принцип максимума Понтрягина и всё это оттуда растет.

А.Л. Андрианов: А то, что Леонтьев сделал? Например, Данциг пишет, что его вдохновила сама идея Леонтьева, что можно не качественно, а количественно посчитать и на практике применить, то есть что это осязаемо.

А.Г. Аганбегян: Да, Леонтьев очень многих вдохновил, и я занялся применением математики в экономике тоже частично под влиянием Леонтьева, когда я с ним познакомился в первый его приезд в Москву. Ну я раньше начал, я начал с эконометрики, как все. Но потом я занялся межотраслевым балансом, а потом перешел к оптимизации. А занимался оптимизацией только в бюро балансов Белкин Виктор (доктор наук) – один из первых, кто начал заниматься оптимизацией у нас. Я вместе с ним. Потом я занялся размещением сельхоз культур. Методом оптимизации.

А.Л. Андрианов: Я так понимаю, для решения как раз задачи межотраслевого баланса нужны методы ЛП, чтобы посчитать, потому что всё в терминах линейной алгебры формулируется: сама модель и взаимосвязи секторов?

А.Г. Аганбегян: Сейчас это всё развилось, сейчас, во-первых, динамические модели появились (у Леонтьева статическая модель). Затем появились модели с финансовым блоком. Они сочетают межотраслевые и эконометрические вещи, потому что многое в финансах не поддается такому однозначному расчету, а носит вероятностный характер: спрос населения и так далее. Поэтому там нужны эконометрические зависимости. Поэтому современные модели экономики – комплексные.

А.Л. Андрианов: Канторович со своим математическим подходом к экономике встретил очень большое сопротивление со стороны тех экономистов, которые в то время были во главе?

А.Г. Аганбегян: Да, это сопротивление началось с его первых шагов. Он понял значимость того, что сделал. Первый. Многие люди, которые делают большие открытия, не понимают, насколько это важно. И часто это выясняется потом спустя много лет. И Канторовича никто не понял: он опередил свой век лет на 15–20. Открытия Канторовича не были востребованы тогда совсем. И он опубликовал фактически в докладах Академии этот метод, но никого не заинтересовал. Никто просто не понял даже, о чем идет речь. Понимая важность этого дела, он в конце в 40-ых годах еще написал рукопись книги «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» и не мог ее нигде опубликовать, потому что она посылалась на рецензию экономистам, и она побывала у всех, включая Байбакова (*Байбаков Николай Константинович – пояснение А.Л. Андрианова*). И все написали на это отрицательный отзыв. Больше всех отрицательных отзывов написал, и главный противник был экономист Островитянов (*Константин Васильевич Островитянов – пояснение А.Л. Андрианова*). Я привел Канторовича к Островитянову, я же стал раньше академиком, чем Канторович (я академик уже 40 лет, а членкором – 50; в прошлом году это исполнилось, старше меня в академии только один человек сейчас, я с 64-го года членкор). Я не сторонник, чтобы люди ссорились – хотел, ну просто как-то..., ну мало ли кто что против кого писал? Канторович ему подарил книжку, которую он писал, а Островитянов написал на своей брошюре – он издал брошюру какую-то по полит-экономике – Канторовичу, в фамилии Канторовича он сделал две ошибки! Не специально – нет, он просто не знал его фамилии. Уровень. Причем против Канторовича выступали очень умные люди, которые безусловно имели заслуги перед наукой, но Островитинов – он просто старый коммунист (такой догматик марксист выдающийся, старый коммунист, участник революции и так далее; его именем вот тут улица названа). Скажем, был Боярский Арон Яковлевич – великий демограф, прекрасный статистик экстра-класса, человек с математическим мышлением. Ничего не понял. И он выступил главным оппонентом Канторовичу, пытаясь доказать, что всё это бред какой-то и неизвестно что. Ну большинство людей, которые выступали, они просто малограмотные в этой области вообще. Такой Всеславский был – какой-то проходимец в экономике. Разные. Гатовский – директор института экономики – Лев Маркович, членкор. И он хотел стать академиком. Несмотря на то что я голосовал против и выступал даже против (уже я был академиком), отделение экономики его провело в академики, а на общем собрании выступил академик Александров Александр Данилович – математик, был ректор Ленинградского университета – с зажатым в кулаке журналом «Коммунист», где Гатовский опубликовал статью против применения математики в экономике, называя это попыткой империалистические идеи экономически привнести и разрушить марксизм через формулы – вот он так Канторовича подавал! Можно найти эту статью в «Коммунисте». И Александров вышел на трибуны и сказал: «Разрешите, я зачту несколько цитат из недавно опубликованной статьи кандидата в академики Гатовского». И начал читать. Под улюлюканье зала, потому что там такое написано, ну как «кибернетика…» там понятно «…шлюха империализма» вот всё такого вот класса. А Гатовского поддерживал Келдыш, потому что Гатовский – очень активный организованный человек и много от имени академии писал записок, которые ценились в правительстве. Ну, то есть ценный состав в виде института экономики. Келдыш к нему проникся каким-то доверием и уважением. И он ужасно возмутился после выступления Александрова, вскочил и говорит: «Александр Данилович, ну как так можно?! Ну мало ли кто что в своей жизни писал? Разве можно вот вырвать цитату и на этом основании человека не выбрать?!» – тот обернулся, сходя с трибуны, и сказал: «Мстислав Всеволодович, а Вы такое писали?» – тот говорит: «Конечно нет!» – «И я не писал!» И его провалили. И он не был избран в академики. Вот это – последний критик, а вообще были статьи, ужасные статьи в «Известиях», безобразнейшие. И так далее.

А.Л. Андрианов: Математики как раз в большинстве своем (Колмогоров, Александров, Соболев) поддержали Канторовича и защищали его.

А.Г. Аганбегян: Нет, ну математики, конечно, несмело поддерживали его, но книгу его не издавали, потому что экономисты были против. И не одно издательство не брало же без рецензии. А академиком-секретарем тогда стал Немчинов Василий Сергеевич (*в то время – член Президиума АН СССР с 1953 по 1962 г.; акад.-секретарь Отделения экономических, философских и правовых наук АН СССР с 1953 по 1959 г.; председатель СОПС (Совет по изучению производительных сил) АН СССР; в 1957 году организовал первую в СССР Лабораторию по применению статистических и* *математических методов в экономических исследованиях и планировании в Сибирском отделении АН СССР, которую потом перенесли в столицу – пояснение А.Л. Андрианова*). Который математический статистик. Специализировался на сельском хозяйстве. Он возглавлял ВАСХНИЛ – академию сельскохозяйственную. Там был Лысенко. На августовской сессии ВАСХНИЛ 1948 года выступил против Лысенко в защиту генетики. И Лысенко его «разоблачал» на знаменитом 48-го года (*31 июля – 7 августа 1948 г. – пояснение А.Л. Андрианова*) сборище, где Лысенко победил (*а днем позже его убрали с поста директора Тимирязевской академии, а через полгода с кафедры статистики академии, а также секретариат ЦК вывел Немчинова из состава Комитета по Сталинским премиям в области науки. Много лет спустя Немчинов подписал «Письмо трехсот» – письмо большой группы советских ученых, направленное 11 октября 1955 г. в Президиум ЦК КПСС; письмо содержало оценку состояния биологии в СССР к середине 1950-х гг., критику научных взглядов и практической деятельности Т.Д. Лысенко, являвшегося в то время одним из руководителей биологической науки в стране; письмо, в конечном счёте, явилось причиной отставки Лысенко с поста президента ВАСХНИЛ и некоторых его приверженцев и ставленников с других руководящих постов в системе Академии наук СССР – [https://ru.wikipedia.org/wiki/Письмо_трёхсот], [https://ru.wikipedia.org/wiki/Немчинов,_Василий_Сергеевич] – пояснение А.Л. Андрианова*).

В общем, Немчинова смешали с грязью, лишили работы, выгнали с его поста и так далее. Но Немчинов потом стал председателем СОПСа и стал академиком-секретарем. И он Канторовича очень поддерживал и всё время пробивал публикацию его работы (*[72] – пояснение А.Л. Андрианова*). И Несмеянов Александр Николаевич (который нормально относился к Канторовичу и был президентом АН СССР (после смерти президента АН СССР С. И. Вавилова на внеочередной сессии общего собрания Академии Наук 16.02.1951 он был избран её Президентом) поставил Немчинову ультиматум: что, хорошо, пусть работа будет опубликована, но при одном условии: ты напишешь для нее предисловие, что спорная работа и пережитки там чувствуются буржуазного чего-то – в общем как-то «наведи тень на плетень». Немчинов собрал несколько человек близких к нему, включая меня (я занимался применением математики, примыкал к этому кружку). Немчинов в 1958 году создал первую лабораторию экономико-математическую в России. Институт ему не дали создать, а сначала была лаборатория ЛЭМ, а потом в 1963 году на базе ЛЭМа был создан ЦЭМИ (*Центральный экономико-математический институт АН СССР, ныне ЦЭМИ РАН – пояснение А.Л. Андрианова*). Причем, председателем комиссии по созданию ЦЭМИ был я. Немчинов отказался и говорит, «давай ты, а я буду твоим замом». Смешно, конечно, было. И мы подобрали Федоренко с ним. Подбирали Федоренко, директора. Ни «А», ни «Б» в математике не понимал, категорически отказывался, но надо было, чтобы туда не попал бы политэконом какой-то, чтобы с самого начала это бы не разрушилось. Он же был экономист, но экономист не связанный с политэкономикой. А Федоринко был химик по образованию. Он закончил институт тонкой химической технологии и был специалист по химизации. Книжку такую он большую выпустил, членкором был выбран, потому что он был заместитель академика-секретаря отделения экономики, которым тогда был Арзуманян. Арзуманян был очень занятый человек и выбрал в членкоры Федоренко с тем, чтобы он на полной ставке у него был бы зам. Тогда же все институты международного профиля были у отделения экономики. И вот Арзуманян был академиком секретарем. И мы с ним договаривались, чтобы он отдал Федоренко, тоже масса трудностей, но нам Келдыш помог. В конце концов Федоренко стал директором. Удачней кандидатуры мы тогда не видели. Немчинов хотел, чтобы я был, но я тогда должен был бросить свой институт в Новосибирске, который я с таким трудом создал. И массу своих близких приятелей туда пригласил. И каждый меня спрашивал: «А не получится так, что ты меня совратил, а сам уедешь?!». Так что я никак не мог и не хотел возвращаться в Москву. Это была своя группа и так далее. И Немчинов написал (к старому изданию) безобразнейшее предисловие в духе «Буржуазные пережитки…» (что, в определенном смысле, бросало тень на него, и он сам это понимал). И он нас собрал и сказал, что «Это единственная возможность опубликовать эту книгу, которая крайне важная. Я понимаю, что будут читать и смеяться надо мной – какой дурак, но что делать?!». Такая жертва была.

И они вместе потом получили Ленинскую премию с Новожиловым. Новожилов Виктор Валентинович был очень близким другом Канторовича и экономически развивал его идеи, но не пытался математически их обобщить. А экономически он написал блестящие совершенно труды и ввел понятия частный минимум и максимум, общий максимум и так далее, совместимость частного с общим, замыкающие затраты – массу понятий. Прекрасно описал. Был исключительно образованным человеком, говорил и по-французски, - немецки и -английски блестяще. В общем это старая интеллигенция была.

Он был старше Канторовича. И все попытки Канторовича и меня его избрать в членкоры, в академики не увенчались успехом. Несколько раз мы его предлагали, он не добирал голоса. И когда он умер, Канторович произнес на его могиле памятную для меня речь. Он сказал, что Новожилов не был членом академии, но это не принесло никакого ущерба Новожилову – он великий ученый в этом мире – все знают и так считают, а вот академии это нанесло ущерб, что такой человек не был членом. Это он сказал очень правильно.

Канторович подвергался травле. Надо сказать, что он не всегда себя адекватно вел, давал поводов много. Леонид Витальевич – очень своеобразный человек. Он очень неубедительно выступал. На конференции на одной он себя сравнил с Гагановой – была такая ткачиха тогда – неуместно. Она была там дважды герой – ну зачем такому человеку сравнивать себя с Гагановой?! Где Гаганова и где Канторович?! И получил такую дозу критики! Как ты можешь себя сравнивать с героем?! Ну, то есть, он себя не адекватно вел, в смысле, давал повод иногда. Но он не был такой боец, который бы как-то себя защищал – он просто не обращал на это все особо внимание. Над ним издевались, как хотели. Он получил Нобелевскую премию тогда, когда ее присудили Солженицыну или Пастернаку – я не помню. И поэтому Нобелевская премия у нас была нарицательная. Хотя его принуждали на Западе дать интервью в защиту (по-моему, это все-таки был еще Пастернак) Пастернака, он уходил (не дал интервью в защиту Пастернаку): это, говорит, не мои вопросы прямые. Он приехал и в Национале устроил банкет небольшой в честь Нобелевской премии. Никто не пришел – ни одно должностное лицо из правительства. Потом был мировой эконометрический конгресс в Риме (1980–70 какой-то в начале), где Канторович должен был делать главный доклад на пленарном заседании. Вообще на пленарном заседании было докладов 6–8. И я в том числе должен был делать. Мы заранее, как это полагается, спросили разрешение, то есть написали в иностранное управление академии, что можем ли мы дать согласие на участие в мировом эконометрическом конгрессе. Мы с ним были почетные члены эконометрического общества. И нас не пустили, ни его, ни меня. А вместо нас взяли делегацию из ЦЭМИ во главе с кандидатом наук и пустили туда. И конгресс их не пустил к себе. Президент эконометрического общества с трибуны прочел доклад Канторовича под бурные аплодисменты, зал встал. А мой доклад прочел вице-президент полностью. Вот какая демонстрация была! И они написали письмо в наше правительство, потому что нас с ним пытались вынудить, чтобы мы написали, что по болезни не едем, а мы отказались. И мы дали им телеграмму, что по не зависящим от нас причинам. Без объяснений. И нас потом клеймили позором. Я ужасно тогда обиделся и сказал, что я больше с иностранцами встречаться не буду. А масса делегаций приезжает в Академгородок. «Где Аганбегян?» – «Нет и всё!» И это переросло просто в скандал. Келдыш мне звонил: «Что ты говоришь? На западе все пишут, что тебя арестовали и так далее… Понимаешь, что так нельзя? Ну, в конце концов». Ну а уж что сделать? Меня 19 лет не пускали заграницу, 13 и 6: с 61-го по 74-ый – 13 лет – и с 78-го по 85-ый. А в промежутке пускали – я работал в Ясе в эти годы, когда я Канторовича познакомил с Данцигом – это был 74-ый – 78-ой.

В общем, работать не девали нормально – Конторовичу всё время мешали. Когда было 60 лет Канторовичу, мы с женой (мы дружили семьями – Наталья Владимировна его жена) пришли к нему. 60 лет, лауреат Нобелевской премии, академик, был накрыт стол – было человек 6: академик Марков с женой, математик, а вице-президент академии прислал телеграмму «Поздравляю Вас с семидесятилетием!» Канторович ему ответил: «Я Вас приглашаю на Семидесятилетие, но это будет через 10 лет», но не дожил, к сожалению. Просто показываю отношение. Конечно, все ученые в Академгородке понимали, кто такой Канторович. И один случай был публичный, я даже прослезился. В городок приехал Анатолий Петрович Александров, который стал президентом Академии. И первый раз он приехал в Академгородок, ну ему всё показали и вечером решили одни академики с ним собраться и выпить. Александров хорошо пил. Он водку всегда наливал в фужер, он пил не рюмочками маленькими, а фужерами. Ну не сразу, конечно, фужер пил за тост. Любил он водку. И вот значит выпивали все, с тостами выступали за сибирское отделение, за президиум Академии, за Анатолия Петровича и так далее, и так далее. Разговор такой оживленный, и вдруг кто-то говорит: «Анатолий Петрович, а что мы все произносим тосты, а Вы молчите?» Он говорит: «Ну я слушаю, что вы говорите, но, если вы мне предоставите слово, я скажу. Вы знаете, все мы тут академики, знаменитые ученые, у нас много заслуг, у каждого, но давайте по Гамбургскому счету подойдем. Вот мы здесь сидим. Всё-таки среди нас только один лауреат Нобелевской премии, человек, перед которым я в научном плане приклоняюсь, это Леонид Витальевич» – передаю дословно.

Я всегда Леонида Витальевича считал гением. Надо сказать, мои сотрудники мнение это не разделяли. У нас был совместный семинар, Канторович что ни скажет – не понятно. Сидел в первом ряду и спал – я всегда вел этот семинар совместный. И вот один раз Рубинштейн (его зам, доктор наук, очень четкий такой), Багриновский (у меня был главный математик, который с Келдышем работал, отделение прикладной математики, очень серьёзный математик), и еще один математик (у Канторовича, очень серьезный) придумали новый метод решения сложной оптимизационной задачи и делали доклад на тему «Новые методы решения оптимальных задач». Докладывали, показывали, что этот метод работает, и запутались. То один выходит к доске, то второй – и забыли они, как этот метод продолжать, а Канторович спит, дремлет, хотя всё слышит. Ну в общем они полчаса около доски то стирали, то писали. Не получается ничего. Рубинштейн растолкал Леонида Витальевича: «Ну, Леонид Витальевич, Вы же смотрели, Вы же сказали, что всё правильно!» – он говорит: «Правильно, а что?» – «А вот у нас не получается!» – «С какого места?» – «Вот с такого» – он пришел, стер и всё сразу написал! Он писал мелом, как будто бы ручкой. Он всю жизнь писал мелом. И все тогда, поняли, кто такой Канторович, и кто такие эти люди, которые его труды читали. Столько лет прошло.

А.Л. Андрианов: Ленинская премия ЛВК с Новожиловым и Немчиновым, то что делал Леонтьев и так далее – всё равно камень краеугольный здесь – ЛП. Потому что, чтобы стало возможно посчитать эти экономические модели, необходим был метод, и вот здесь как раз Канторович сдвинул дело в сторону практического применения.

А.Г. Аганбегян: С экономической точки зрения это – решение грандиозной проблемы оптимизации. Собственно говоря, наука экономика должна ответить на вопрос «что такое хорошо, что такое плохо?» – для того, чтобы ответить на этот вопрос, нужно иметь критерий и так далее. Поэтому он открыл новое направление в экономике – направление оптимизации. Не на словах оптимизация, а обличенное в доказательную форму: науке нужны доказательства, истина должна доказываться. Но для экономики важно не только количество, не только сам процесс, чтоб можно вычислить и так далее, но и всё вокруг, какие это порождает новые экономические положения, теоретические, методологические, всё же меняется.